

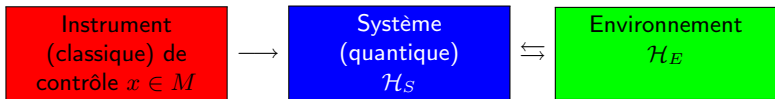
Les phases géométriques dans la description du contrôle quantique

David Viennot

Institut UTINAM (UMR CNRS 6213 - Université de Franche-Comté, Besançon)

OPSI - 14 & 15 mai 2012

1 Le contrôle quantique



$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = (H_S + H_E + H_{S-E} + V(x(t)))\psi \quad \psi \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$$

$$\implies i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H_S, \rho] + \mathcal{D}(\rho) + \mathcal{Q}_{x(t)}(\rho) \quad \rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_E} |\psi\rangle\langle\psi|$$

dans certains cas :

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = (H_S + H_D^{eff} + V(x(t)))\psi \quad \psi \in \mathcal{H}_S$$

Contrôle : on connaît $\psi(0)$ (ou $\rho(0)$), on veut que $\psi(T) = \psi_{target}$ (ou $\rho(T) = \rho_{target}$), on cherche $t \mapsto x(t) \in M$ (M variété \mathcal{C}^∞ du contrôle).

L'approche optimale du contrôle

Les phases
géométriques
dans la
description du
contrôle
quantique

David Viennot

Le contrôle
quantique

Les phase
géométrique
du contrôle
sous
décohérence

Cas 1 :
décohérence
par "chaos"

Cas 2 :
décohérence
par
dissipation

Cas 3 :
décohérence
par intrication

Un peu de
géométrie

Conclusion

Les problèmes de contrôle quantique peuvent être résolus numériquement :

- par un algorithme d'optimisation (minimisation d'une action issue d'un lagrangien mesurant l'insatisfaction par rapport à l'objectif du contrôle),
- par un algorithme génétique ("évolution" d'une "population" de contrôles avec une "sélection naturelle" fonction de l'adaptation à l'objectif du contrôle).

Méthodes **très efficaces**, alors pourquoi faire autre chose ?

L'approche optimale du contrôle

Les phases géométriques dans la description du contrôle quantique

David Viennot

Le contrôle quantique

Les phases géométriques du contrôle sous décohérence

Cas 1 : décohérence par "chaos"

Cas 2 : décohérence par dissipation

Cas 3 : décohérence par intrication

Un peu de géométrie

Conclusion

Les problèmes de contrôle quantique peuvent être résolus numériquement :

- par un algorithme d'optimisation (minimisation d'une action issue d'un lagrangien mesurant l'insatisfaction par rapport à l'objectif du contrôle),
- par un algorithme génétique ("évolution" d'une "population" de contrôles avec une "sélection naturelle" fonction de l'adaptation à l'objectif du contrôle).

Méthodes **très efficaces**, alors pourquoi faire autre chose ?

"Bon d'accord, l'ordinateur a compris, mais moi j'aimerais bien comprendre aussi."

Eugène Wigner

à propos des simulations numériques

Pourquoi une approche géométrique du contrôle ?

Les phases
géométriques
dans la
description du
contrôle
quantique

David Viennot

Le contrôle
quantique

Les phase
géométrique
du contrôle
sous
décohérence

Cas 1 :
décohérence
par "chaos"

Cas 2 :
décohérence
par
dissipation

Cas 3 :
décohérence
par intrication

Un peu de
géométrie

Conclusion

Modélisation naturelle de l'instrument de contrôle

via M la variété des paramètres x .

Solutions de contrôle intelligibles

pouvoir interpréter pourquoi une solution est une solution.

Solutions de contrôle "robustes"

résultats peu sensibles à de petites déformations (avant optimisation) et comparables entre deux systèmes proches.

Outils visuels pour traiter le contrôle

visuels (dans la mesure du possible) ou visualisables (à l'aide de certaines représentations partielles).

L'approximation adiabatique (sans décohérence)

Les phases géométriques dans la description du contrôle quantique

David Viennot

Le contrôle quantique

Les phase géométrique du contrôle sous décohérence

Cas 1 : décohérence par "chaos"

Cas 2 : décohérence par dissipation

Cas 3 : décohérence par intrication

Un peu de géométrie

Conclusion

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H(x(t))\psi \quad \psi(0) = \phi_\lambda(x(0))$$

$$H(x)\phi_\lambda(x) = \lambda(x)\phi_\lambda(x)$$

La vitesse de variation des paramètres classiques $x(t)$ est lente devant la vitesse de transition de l'état quantique ϕ_λ vers un autre \Rightarrow approximation adiabatique :

$$\psi(t) \simeq e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \lambda(x(t')) dt'} e^{-\int_C A} \phi_\lambda(x(t))$$

avec C chemin dans M tracé par $t \mapsto x(t)$ et

$$A(x) = \langle \phi_\lambda | d\phi_\lambda \rangle$$

Changements de jauge

Les phases
géométriques
dans la
description du
contrôle
quantique

David Viennot

Le contrôle
quantique

Les phase
géométrique
du contrôle
sous
décohérence

Cas 1 :
décohérence
par "chaos"

Cas 2 :
décohérence
par
dissipation

Cas 3 :
décohérence
par intrication

Un peu de
géométrie

Conclusion

- Changement de jauge général : $\tilde{\phi}_\lambda(x) = g(x)\phi_\lambda(x)$ avec $g(x) \in U(1)$
 $\Rightarrow \tilde{A} = A + g^{-1}dg$

- Changement de jauge à la transition de deux cartes :
 $x \in U^\alpha \cap U^\beta$, $\phi_\lambda^\alpha(x) = g^{\alpha\beta}(x)\phi_\lambda^\beta(x)$ avec $g^{\alpha\beta}(x) \in U(1)$.
 On a une définition locale des vecteurs propres (sur des ouverts U^α de M) car en général on ne peut pas définir de vecteurs propres continus sur toute la variété M .

$$e^{i\gamma(\mathcal{C})} = \prod_{\alpha} e^{i\int_{\mathcal{C}^\alpha} A^\alpha} \prod_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}(x^{\alpha\beta})$$

\mathcal{C}^α est une portion de \mathcal{C} incluse dans U^α , $x^{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\alpha \cap \mathcal{C}^\beta$ (le résultat est indépendant du choix de ces points de transition).

Les phases
géométriques
dans la
description du
contrôle
quantique

David Viennot

Le contrôle
quantique

Les phase
géométrique
du contrôle
sous
décohérence

Cas 1 :
décohérence
par "chaos"

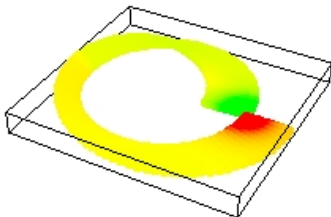
Cas 2 :
décohérence
par
dissipation

Cas 3 :
décohérence
par intrication

Un peu de
géométrie

Conclusion

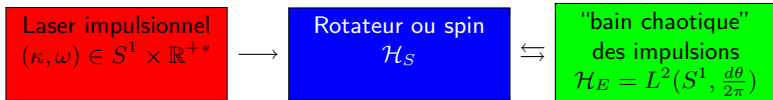
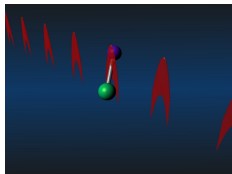
Du générateur de la phase géométrique, A , on tire des informations pour étudier le contrôle :



D. Viennot, J. Math. Phys. 47, 092105 (2006).

2 Les phase géométrique du contrôle sous décohérence

- Cas 1 : décohérence par "chaos"
- Cas 2 : décohérence par dissipation
- Cas 3 : décohérence par intrication



$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = (H_0 - i\hbar\omega(t) \frac{\partial}{\partial \theta} + \hbar\omega(t)\kappa(t)W \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\theta - 2n\pi))\psi$$

$$\psi \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E \quad W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S), \quad W^2 = W^\dagger = W$$

L'anholonomie de Cheon

Les phases géométriques dans la description du contrôle quantique

David Viennot

Le contrôle quantique

La phase géométrique du contrôle sous décohérence

Cas 1 : décohérence par "chaos"

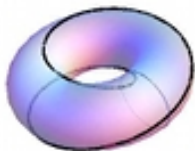
Cas 2 : décohérence par dissipation

Cas 3 : décohérence par intrication

Un peu de géométrie

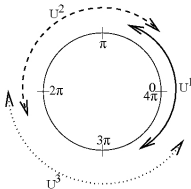
Conclusion

Cas d'un spin, avec $\omega(t) = \omega_0$.



Quasiénergies du système $\lambda_{\uparrow}(\kappa)$ et $\lambda_{\downarrow}(\kappa)$ sur la variété engendrée par $\kappa \bmod 2\pi$ et $\epsilon \bmod \hbar\omega_0$

Pas de définition globale des quasiénergies sur M :



$$\forall \kappa \in U^1 \cap U^2, \quad \lambda_{\uparrow}^2(\kappa) = \lambda_{\uparrow}^1(\kappa)$$

$$\forall \kappa \in U^2 \cap U^3, \quad \lambda_{\uparrow}^2(\kappa) = \lambda_{\uparrow}^3(\kappa)$$

$$\forall \kappa \in U^3 \cap U^1, \quad \lambda_{\uparrow}^3(\kappa) = \lambda_{\uparrow}^1(\kappa) + \hbar\omega_0$$

Phase géométrique non-usuelle

Les phases géométriques dans la description du contrôle quantique

David Viennot

Le contrôle quantique

Les phases géométriques du contrôle sous décohérence

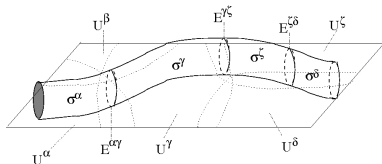
Cas 1 : décohérence par chaos

Cas 2 : décohérence par dissipation

Cas 3 : décohérence par intrication

Un peu de géométrie

Conclusion



Feuillet $S = \mathcal{C} \times S^1$ de la dynamique $(\kappa(t), \omega(t), \theta) \in M \times S^1$ sur M (représenté par un plan). $t \mapsto (\kappa(t), \omega(t))$ trace le chemin \mathcal{C} sur M .

La phase géométrique est de la forme :

$$e^{i\gamma(S)} = \prod_{\sigma^\alpha} e^{\iint_{\sigma^\alpha} B^\alpha} \prod_{E^{\alpha\beta}} e^{\int_{E^{\alpha\beta}} \eta^{\alpha\beta}}$$

avec $B^\alpha = \frac{1}{2\pi} \langle \phi_\lambda^\alpha | \partial_t | \phi_\lambda^\alpha \rangle dt \wedge d\theta - \frac{\omega_0}{2\pi} \langle \phi_\lambda^\alpha | \partial_\theta | \phi_\lambda^\alpha \rangle d\theta \wedge dt$ et $\eta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} (g^{\alpha\beta-1} \dot{g}^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \omega_0 t) (d\theta + \frac{2\pi}{\hbar \omega_0} \dot{\lambda}^\alpha dt)$.

D. Viennot, J. Phys. A : Math. Theor. 42, 395302 (2009).

Les systèmes dissipatifs

Les phases géométriques dans la description du contrôle quantique

David Viennot

Le contrôle quantique

Les phases géométriques du contrôle sous décohérence

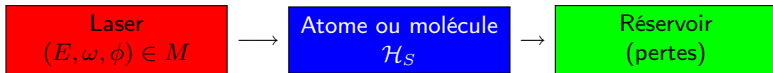
Cas 1 : décohérence par "chaos"

Cas 2 : décohérence par dissipation

Cas 3 : décohérence par intrication

Un peu de géométrie

Conclusion



$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = (H_0 - iH_D + \mu E(t) \cos(\omega(t)t + \phi(t)))\psi \quad \psi \in \mathcal{H}_S$$

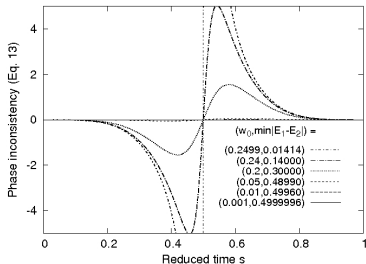
L'Hamiltonien total est non-hermitien $H^\dagger \neq H$. Modèles décrivant par exemple :

- Le contrôle d'un atome avec émission spontanée (la dissipation décrit les pertes vers des états noirs).
- Le contrôle d'un atome avec ionisation (la dissipation décrit les pertes vers le continuum).
- Le contrôle d'une molécule avec dissociation (la dissipation décrit les pertes vers les continua).

Deux phases géométriques

Deux générateurs possibles pour la phase géométrique :

- $A_s = \langle \phi_\lambda^* | d\phi_\lambda \rangle$ (avec $H^\dagger \phi_\lambda^* = \bar{\lambda} \phi_\lambda^*$) décrit mieux l'adiabaticité du régime dynamique.
- $A_o = \frac{\langle \phi_\lambda | d | \phi_\lambda \rangle}{\langle \phi_\lambda | \phi_\lambda \rangle}$ décrit mieux la cyclicité du régime dynamique.



$A_s - A_o$ pour différentes dynamiques d'un système dissipatif à 2 niveaux, avec des couplages non-adiabatiques croissants.

Changement de jauge anormal

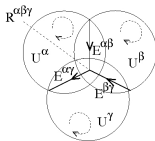
Les phases géométriques des systèmes dissipatifs semblent être soumises à un deuxième type de changement de jauge :

$$\tilde{A} = A + \langle \phi_\lambda^* | \Omega^{-1} d\Omega | \phi_\lambda \rangle$$

avec $\Omega = P_s (PP_s P)^{-1}$ opérateur d'onde de Bloch ($P_s = |\phi_\lambda^*\rangle \langle \phi_\lambda|$ et P projecteur quelconque tel que $PP_s \neq 0$).

A_o et A_s sont reliés par un tel changement.

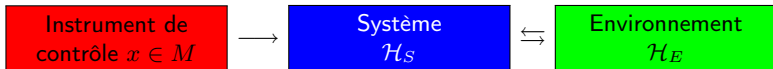
Ce point semble lié à la présence des croisements exceptionnels (croisement de valeurs propres sur M où l'Hamiltonien est non-diagonalisable) qui induit également un théorème de Stokes différent pour la phase géométrique :



$$e^{i\gamma} = \prod_{\sigma^\alpha} e^{\int \int \sigma^\alpha B^\alpha} \prod_{E^{\alpha\beta}} e^{\int E^{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta}} \prod_{x^{\alpha\beta\gamma}} h^{\alpha\beta\gamma}(x^{\alpha\beta\gamma})$$

avec $B^\alpha = dA^\alpha$ et $\eta^{\alpha\beta} = \langle \phi_\lambda^{\alpha*} | \Omega^{\alpha\beta} d\Omega^{\alpha\beta-1} | \phi_\lambda^\alpha \rangle$.

Intrication système-environnement



- Dynamique de l'Univers

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = (H_S + H_E + H_{S-E} + V(x(t)))\psi \quad \psi \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$$

- Dynamique du système

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H_S, \rho] + \mathcal{D}(\rho) + \mathcal{Q}_{x(t)}(\rho) \quad \rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_E} |\psi\rangle\langle\psi|$$

ρ représente l'information sur l'état du système quand toute information concernant l'environnement est perdue (ρ est une distribution statistique de probabilités sur l'état du système ; i.e. $\text{tr}_{\mathcal{H}_S}(\rho|\chi\rangle\langle\chi|)$ est la probabilité pour que le système soit dans l'état χ).

Analogie structurelle entre dissipation et intrication

| Systèmes dissipatifs | Systèmes intriqués |
|--|---|
| corps \mathbb{C} | C^* -algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$ |
| espace de Hilbert $\mathbb{C} \otimes \mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S$ | C^* -module à gauche $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ |
| $\langle \psi \phi \rangle \in \mathbb{C}$ | $\langle \psi \phi \rangle_* = \text{tr}_{\mathcal{H}_E} \phi\rangle \langle \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$ |
| $\ \psi\ ^2 \in \mathbb{R}^+$ | $\ \psi\ _*^2 = \text{tr}_{\mathcal{H}_E} \psi\rangle \langle \psi = \rho$ |

Dans le C^* -module, on a une équation aux valeurs propres "non-commutatives" :

$$H(x)\phi_\Lambda(x) = \Lambda(x)\phi_\Lambda(x) \quad \phi_\Lambda \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E, \quad \Lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$$

$$[\Lambda(x) \otimes 1_{\mathcal{H}_E}, H(x)]\phi_\Lambda(x) = 0$$

Λ est non-dégénérée si $(G_x \times K_x)\phi_\Lambda(x) = \ker(H(x) - \Lambda(x) \otimes 1_{\mathcal{H}_E})$ avec :

- $K_x \subset \mathcal{U}(\mathcal{H}_E)$ groupe des changements de phase généralisés :
 $\|k\phi_\Lambda\|_*^2 = \|\phi_\Lambda\|_*^2$ pour $k \in K_x$
- $G_x \subset \mathcal{GL}(\mathcal{H}_S)$ groupe des changements de norme généralisés :
 $\|g\phi_\Lambda\|_*^2 = g\|\phi_\Lambda\|_*^2 g^\dagger$ pour $g \in G_x$.
 (similaire à $\|a\phi_\lambda\|^2 = |a|^2\|\phi_\lambda\|^2$ dans le cas dissipatif)

Une solution de

$$\mathcal{A} \|\phi_\Lambda\|_*^2 = \langle \phi_\Lambda | d\phi_\Lambda \rangle_* \iff \mathcal{A} \rho_\Lambda = \text{tr}_{\mathcal{H}_E} |d\phi_\Lambda\rangle \langle \phi_\Lambda|$$

Pour une dynamique $i\hbar \frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}_{x(t)}(\rho)$, $\rho(0) = \rho_\Lambda(x(0))$, dans l'approximation adiabatique, $\exists \eta \in]x$ tel que

$$\rho(t) \simeq g_{\text{dyn}}(t) g_{\text{geom}}(\mathcal{C}) \rho_\Lambda(x(t)) g_{\text{geom}}(\mathcal{C})^\dagger g_{\text{dyn}}(t)^\dagger$$

avec

$$g_{\text{dyn}}(t) = \underline{\mathbb{T}} e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \Lambda(x(t')) dt'} \quad g_{\text{geom}}(\mathcal{C}) = \underline{\mathbb{P}} e^{-\int_{\mathcal{C}} (\mathcal{A} + \eta)}$$

Changements de jauge

Les phases géométriques dans la description du contrôle quantique

David Viennot

Le contrôle quantique

Les phase géométrique du contrôle sous décohérence

Cas 1 : décohérence par "chaos"

Cas 2 : décohérence par dissipation

Cas 3 : décohérence par intrication

Un peu de géométrie

Conclusion

$$g \in G_x, k \in K_x$$

$$\tilde{\phi}_\Lambda = gk\phi_\Lambda \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\rho}_\Lambda = g\rho_\Lambda g^\dagger \\ \tilde{\mathcal{A}} = g\mathcal{A}g^{-1} + dgg^{-1} + g\eta g^{-1} \end{cases}$$

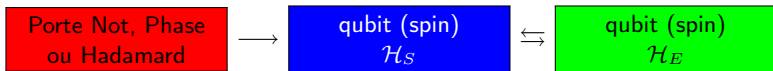
avec $\eta \in \mathfrak{j}_x$ solution de

$$\eta \|\phi_\Lambda\|_*^2 = \langle \phi_\Lambda | k^{-1} dk \phi_\Lambda \rangle_*$$

- G_x (et entités liées) : caractéristique des effets dynamiques déjà présents pour les systèmes fermés.
- \mathfrak{j}_x (et entités liées) : caractéristique des effets de la décohérence.

D. Viennot & J. Lages, J. Phys. A : Math. Theor. 44, 365301 (2011).

Contrôle d'un qubit



- Contrôle par un champ magnétique \vec{B}

- Phase géométrique $U(1)$ similaire à celle de Berry ($\vec{B} \cdot \vec{S}$ structure de jauge d'un monopôle magnétique).
- Phase géométrique \mathbb{R}^+ caractéristique de la décohérence (provoque une diminution des cohérences de la matrice densité structure de jauge d'une sorte "d'instanton").

D. Viennot & J. Lages, (soumis).

- Contrôle par une rotation isospectrale $e^{i\vec{x} \cdot \vec{S}}$

- Validation (numérique) de l'hypothèse adiabatique avec les valeurs propres "non-commutatives".
- Étude de la déformation adiabatique d'un état stationnaire.

D. Viennot, J. Lages & L. Aubourg, (en cours d'étude).

Environnement trop petit \rightarrow très faible décohérence.

Très rapidement : traiter d'un grand environnement (bain de spins).

Les phases
géométriques
dans la
description du
contrôle
quantique

David Viennot

Le contrôle
quantique

Les phase
géométrique
du contrôle
sous
décohérence

Cas 1 :
décohérence
par "chaos"

Cas 2 :
décohérence
par
dissipation

Cas 3 :
décohérence
par intrication

Un peu de
géométrie

Conclusion

3 Un peu de géométrie

Fibré principal

Les phases géométriques dans la description du contrôle quantique

David Viennot

Le contrôle quantique

La phase géométrique du contrôle sous décohérence

Cas 1 : décohérence par "chaos"

Cas 2 : décohérence par dissipation

Cas 3 : décohérence par intrication

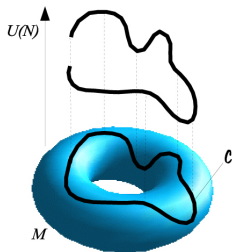
Un peu de géométrie

Conclusion

Sans décohérence : sur $U^\alpha \cap U^\beta$, $\phi_\lambda^\alpha = g^{\alpha\beta} \phi_\lambda^\beta$
 $g^{\alpha\beta}$ satisfait à la relation de cocycle sur $U^\alpha \cap U^\beta \cap U^\gamma$

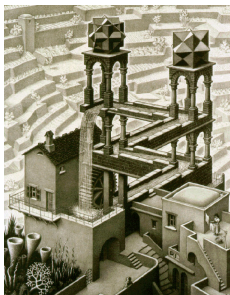
$$g^{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} g^{\gamma\alpha} = 1$$

$\Rightarrow \{g^{\alpha\beta}\}$ définit une variété P (un fibré principal) avec localement $P|_{U^\alpha} \simeq U^\alpha \times U(1)$. A^α est le potentiel d'une connexion sur P et $F = dA^\alpha$ est la courbure de P .



Avec la décohérence : violation de la relation de cocycle

$$g^{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} g^{\gamma\alpha} = h^{\alpha\beta\gamma} \neq 1$$



M.C. Escher, *Waterfall*, 1961

$\{g^{\alpha\beta}, h^{\alpha\beta\gamma}\}$ ne définissent pas une variété mais une catégorie \mathcal{P} (une gerbe (cas 1 et 2) ou un 2-fibré (cas 3)). A^α est le potentiel de connexion, $\eta^{\alpha\beta}$ le potentiel-transformation, B^α la "cambrure" (curving) de \mathcal{P} .

D. Viennot, J. Phys. A : Math. Theor. 42, 395302 (2009).

D. Viennot, J. Math. Phys. 50, 052101 (2009).

D. Viennot & J. Lages, J. Phys. A : Math. Theor. 44, 365301 (2011).

4 Conclusion

- Les phases géométriques dans le contrôle sous décohérence semblent être associées à une "haute théorie de jauge" (changements de jauge "anormaux", théorème de Stokes "anormal", fibrés catégoriels).
- Il faudrait extraire des objets géométriques des informations spécifiques de la décohérence.
- L'approximation adiabatique n'est pas bien comprise pour les systèmes sous décohérence (du fait de la présence de trois échelles de temps : le temps propre rapide de transition d'états du système quantique, le temps lent du contrôle et le temps caractéristique des processus de décohérence).

⇒ Il est nécessaire d'étudier différents cas avec un environnement suffisamment "grand" (nécessite des simulations numériques lourdes).