

## Transport adiabatique et phases de Berry : application au contrôle quantique cohérent passif

D. Viennot

*Observatoire de Besançon (UMR CNRS 6091), 41 bis avenue de l'Observatoire,  
 BP. 1615, 25010 Besançon Cedex, France  
 e-mail: david.viennot@obs-besancon.fr*

**Abstract.** L'étude de l'interaction d'atomes ou de molécules avec des champs électromagnétiques intenses, nécessite le développement de nouveaux outils de modélisation rendant compte de la dynamique quantique de ces systèmes. Une approche purement perturbative étant impossible en champs forts, on s'est tourné vers une approche "adiabatique". Afin de traiter correctement le cas des croisements de valeurs propres, on a généralisé les formules de transport adiabatique en faisant intervenir une généralisation de la phase de Berry non-abélienne.

### 1. INTRODUCTION

Dans l'étude du contrôle d'atomes ou de molécules par des lasers intenses, une attention toute particulière doit être donnée à la modélisation de la dynamique du système quantique en interaction avec le champ. C'est la théorie du transport adiabatique qui va nous fournir ces outils de modélisation. On pose  $\vec{R}$  le vecteur décrivant l'ensemble des paramètres adiabatiques de contrôle, qui "vit" dans une variété  $M$   $C^\infty$ -différentiable. Les variations des paramètres au cours du temps, sont modélisées par un vecteur  $\vec{R}(t)$  qui décrit un chemin  $\mathcal{C}$  dans  $M$  supposé fermé. La formule usuelle de transport adiabatique issue du théorème adiabatique standard (réf. [3]) nous indique que si  $|\psi(0)\rangle = |n, \vec{R}(0)\rangle$  alors  $\forall t$ :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t E_n(t') dt' + i\gamma_n(t)} |n, \vec{R}(t)\rangle \quad (1.1)$$

où  $\gamma_n(t) = i \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(t)} \langle n, \vec{R} | \partial_\mu | n, \vec{R} \rangle dR^\mu$  est la phase de Berry, et  $E_n$  la  $n$ -ième valeur propre (supposée non-dégénérée). Le théorème adiabatique standard interdisant les croisements de la valeur propre  $E_n$  et la superposition d'états propres, nous avons du démontrer une généralisation de la formule précédente.

### 2. LA FORMULE DE TRANSPORT ADIABATIQUE GÉNÉRALISÉE

Cette généralisation a été dérivée d'un théorème adiabatique étendu proposé par G. Nenciu (réf. [4]). On regroupe les valeurs propres liées par croisement à la valeur propre de l'état initial. On forme ainsi un sous-espace  $S_0$  de l'espace de Hilbert, nommé espace actif, qui décrit complètement la dynamique. La formule de transport est alors pour toute partition  $\mathcal{P}_N$  de  $[0, t]$  telle que le pas de  $\mathcal{P}_N$  tende vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$  :

$$|\psi(t)\rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m \in S_0} \left[ e^{-i\hbar^{-1} E(t_{N-1}) \Delta t_{N-1}} \prod_{i=0}^{N-2} e^{-A_\mu(\vec{R}(t_i)) \Delta t_i^\mu} e^{-i\hbar^{-1} E(t_i) \Delta t_i} \right]_{mn} |m, \vec{R}(t)\rangle \quad (2.1)$$

avec  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ ,  $\Delta t_i^\mu = R^\mu(t_{i+1}) - R^\mu(t_i)$ , et  $E(t)$  est la matrice diagonale des valeurs propres du groupement. La matrice  $A$  d'éléments :  $A_\mu(\vec{R}(t))_{kl} = \langle k, \vec{R}(t) | \partial_\mu | l, \vec{R}(t) \rangle$ , est la généralisation de la phase de Berry non-abélienne. On démontre que cette formule est indépendante de tout choix de continuation des vecteurs propres à travers les croisements.

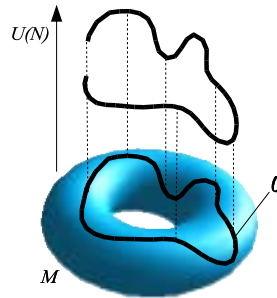
### 3. LA MÉTHODE DE CONTRÔLE

Pour le contrôle, on doit trouver le chemin  $\mathcal{C}$  que doit suivre  $\vec{R}(t)$  pour arriver à l'état désiré. La méthode suivie consiste à construire un réseau de discrétisation de  $M$  tel que les mailles de ce réseau se resserrent au niveau des croisements, c'est en effet au voisinage de ceux-ci que les variations de la fonction d'onde seront les plus brutales. Les matrices  $A$  et  $E$  seront calculées sur chaque point du réseau (c'est l'opération qui prend le plus de temps de

calculs mais qui n'est réalisée qu'une seule fois). On peut alors discrétiser sur ce réseau tout chemin  $\mathcal{C}$ , et ainsi calculer l'effet du chemin sur l'état final. Le programme informatique est encore en cours de développement. Pour prévoir quels seront les chemins les plus adaptés pour résoudre le problème, il est nécessaire de faire une étude mathématique du modèle de transport adiabatique et de la phase de Berry non-abélienne généralisée, permettant une classification des chemins.

#### 4. LE MODÈLE MATHÉMATIQUE

Le modèle mathématique du transport se fonde sur un fibré principal construit sur la variété  $M$  avec pour groupe de jauge  $U(N)$  ( $N = \dim S_0$ ). Le transport adiabatique consiste alors en un transport par parallélisme de l'état initial, le long du relèvement horizontal de  $\mathcal{C}$ . On remarquera que le relèvement de la courbe fermée  $\mathcal{C}$ , n'est pas fermée (c'est l'effet attendu pour l'état final).



**Figure 1.** Schéma d'un relèvement horizontal depuis un espace  $M$  (ici un tore).

Du point de vue mathématique, ceci relève de la géométrie différentielle, de la topologie algébrique, et des théories de cohomologie de Čech-de Rham (réf. [1]).

#### Références

- [1] Phillip GRIFFITHS et Joseph HARRIS. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-interscience publication, 1978.
- [2] Albert MESSIAH. *Mécanique Quantique*, volume 2. Dunod, 1959.
- [3] G. NENCIU. On the adiabatic theorem of quantum mechanics. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 13 :L15, 1980.
- [4] Alfred SHAPER et Frank WILCZEK. *Geometric phases in physics*. World Scientific, 1989.