

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE-FRANCHE-COMTÉ
ÉCOLE DOCTORALE CARNOT-PASTEUR
INSTITUT UTINAM (UMR CNRS 6213)

HAUTES THÉORIES DE JAUGE DANS LE CONTRÔLE DES SYSTÈMES QUANTIQUES OUVERTS

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

DAVID VIENNOT

19 juin 2017 à l'Observatoire de Besançon

composition du Jury :

Osman Atabek	directeur de recherche CNRS, Université Paris-Sud	rapporteur
Hans-Rudolf Jauslin	professeur, Université de Bourgogne	rapporteur
Arne Keller	professeur, Université Paris-Sud	rapporteur
Pierre Joubert	professeur, Université de Franche-Comté	examineur
Christoph Meier	professeur, Université Paul Sabatier Toulouse III	examineur
Georges Jolicard	professeur, Université de Franche-Comté	invité

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Introduction au sujet des travaux	9
1.2	Résumé de mes travaux de thèse	11
1.3	Contextes des travaux	12
1.3.1	Contexte physique : Les 4 processus d'action de l'environnement	12
1.3.2	Contexte épistémologique : Topologie algébrique de la complexité	15
1.3.3	Contexte physico-mathématique : La "géométrie quantique"	19
1.4	Autour du déroulement des travaux	20
1.4.1	Encadrements d'étudiants	20
1.4.2	Enseignement en master et diffusion de la culture scientifique	22
1.4.3	Publications	23
1.5	Organisation de ce mémoire	24
2	Hautes théories de jauge et contrôle adiabatique	27
2.1	Quelques aspects de la cohomologie de Deligne	27
2.1.1	Quelques mots sur la géométrie et la topologie algébrique	27
2.1.2	Idée de base de la cohomologie de Deligne	28
2.1.3	Sur la cohomologie de Deligne	31
2.1.4	L'exemple de l'effet Aharonov-Bohm	33
2.1.5	Autres exemples physiques	34
2.2	Réalisations géométriques des classes de Deligne	35
2.2.1	Espaces fibrés et connexions	35
2.2.2	Les différentes constructions de fibrés catégoriques	38
2.2.3	Sur la non-trivialité des structures fibrées	41
2.2.4	Discussion sur le rôle de la théorie des catégories	42
2.3	Théories de jauge en contrôle quantique	45
2.3.1	Degré 0 : Contrôle statique de systèmes fermés	45
2.3.2	Degré 1 : Contrôle quasistatique de systèmes fermés dans des champs cw	45
2.3.3	Degré 1 : Contrôle statique d'un système dissipatif et reservoir engineering	48
2.3.4	Degré 2 : Contrôle adiabatique d'un système fermé	50
2.4	Sur le contrôle adiabatique	51
I	Distorsions du contrôle d'un ensemble de systèmes quantiques	55
3	Dynamique quantique asservie à un système classique	57
3.1	Le modèle de système quantique asservi	58
3.1.1	Le modèle des systèmes de spins contrôlés par des frappes ultra-courtes	58
3.1.2	Sur les différents types de bruit : la hiérarchie ergodique	59
3.2	Décohérence, relaxation et chaos induits par du bruit	62

3.2.1	Bruit aléatoire	62
3.2.2	Bruit chaotique	63
3.2.3	Chaos, désordre et intrication : quantique vs classique	64
3.3	Contrôle d'une chaîne frappée avec du bruit chaotique	67
4	Géométrie des systèmes dynamiques quantiques asservis	71
4.1	Atome contrôlé par un champ laser modulé	71
4.1.1	La théorie adiabatique de Floquet	71
4.1.2	Théorie de jauge et fibration associées aux phases géométriques	73
4.2	Atome contrôlé par laser avec bruit de phase	74
4.3	Idées concernant le cas général	75
II	Contrôle adiabatique des systèmes dissipatifs	81
5	Dynamique des systèmes dissipatifs	83
5.1	Hamiltoniens effectifs	83
5.1.1	Hamiltonien effectif de l'équation de Lindblad	83
5.1.2	Hamiltonien effectif des opérateurs d'onde	84
5.1.3	Hamiltonien avec frontière absorbante	85
5.1.4	Hamiltonien d'un spin localisé en espace-temps courbe	88
5.2	Transport adiabatique des systèmes dissipatifs	90
5.2.1	L'approximation adiabatique avec Hamiltoniens non-autoadjoints	90
5.2.2	Les phases géométriques non-unitaires	90
5.2.3	Dynamique presque adiabatique	91
5.3	Contrôle de systèmes dissipatifs	92
5.3.1	Inversion de populations par encerclement d'un EP	93
5.3.2	Refroidissement vibrationnel à l'aide de résonances de largeur nulle	95
5.3.3	Téléportation autour d'un trou noir	96
6	Fibré catégorique des opérateurs d'onde	99
6.1	Le fibré catégorique des opérateurs d'onde	100
6.2	Gerbes au dessus d'un cercle de EP	100
III	Contrôle des systèmes quantiques intriqués	107
7	Transport adiabatique d'une matrice densité	109
7.1	L'équation aux valeurs propres non-commutatives	109
7.2	Théorème adiabatique pour un système bipartite	111
7.2.1	Transport adiabatique faible d'une matrice densité	111
7.2.2	Interprétation de la théorie de jauge	113
7.3	Le 2-fibré de la théorie de jauge	114
7.3.1	Construction du 2-fibré	114
7.3.2	Les différentes notions de phase dans le C^* -module	117
8	Contrôle d'un système intriqué avec un grand environnement	119
8.1	Difficultés inhérentes au problème	119
8.2	Géométrie de la dynamique d'une matrice densité	121
8.2.1	C^* -phases géométriques non-adiabatiques	121
8.2.2	La catégorie des états mixtes et la fibration	122

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	5
9 Conclusion	127
Bibliographie	132

Introduction

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction au sujet des travaux

Le contrôle des systèmes quantiques (spins, atomes, molécules) est un champ d'étude important de la physique quantique du XXIème siècle [BR02]. La problématique du contrôle quantique se présente sous la forme d'un problème inverse de dynamique. Considérons un système quantique d'espace des états E et un système classique décrit par un ensemble de paramètres réels x générant une variété M et agissant sur le système quantique. On suppose que l'opérateur du contrôle peut modifier à sa guise le système classique (ou du moins qu'il maîtrise en partie l'évolution de celui-ci). On se donne un objectif $\omega_{target} \in E$. Sachant que le système se trouve dans l'état initial ω_0 , la résolution du problème de contrôle consiste à trouver une variation des paramètres de contrôle $t \mapsto x(t)$ telle que le système quantique présente une dynamique $t \mapsto \omega_t$ le conduisant au plus proche possible de l'objectif : $\|\omega_T - \omega_{target}\| < \epsilon$ (avec ϵ le plus petit possible, T étant la durée sur laquelle se déroule le contrôle). À cette situation générique, s'ajoutent plusieurs variantes : on peut considérer le cas particulier du contrôle statique qui consiste à remplacer l'évolution des paramètres de contrôle par la recherche d'une configuration optimale x_{opt} sous laquelle le système quantique évoluera vers la cible ; la réalisation de l'objectif peut être relative à une observable particulière O ($|\omega_T(O) - \omega_{target}(O)| < \epsilon$) ; on peut ajouter des contraintes comme minimiser le temps contrôle T ou l'énergie dépensée. Dans ce travail on restera néanmoins au niveau de la situation générique.

D'un point de vue fondamental la recherche sur le contrôle quantique a pour but une meilleure compréhension des relations entre systèmes dynamiques quantiques et classiques, pour ce qui concerne : le transfert de propriétés classiques vers les systèmes quantiques ; la physique à l'échelle mésoscopique (où propriétés classiques et quantiques s'influencent l'une l'autre) ; ou la modélisation commune des systèmes dynamiques. Le contrôle quantique présente également de nombreuses applications potentielles : la manipulation de qubits pour l'informatique quantique [Luc05] ; l'optimisation de la dynamique de spins en champs magnétiques pour l'imagerie par résonance magnétique [LZB⁺10] ; le pilotage de la dynamique de molécules par champs laser pour la nanotechnologie [SKA⁺05] ; le contrôle de réactions chimiques par champs laser pour la production de nouveaux produits [SB97].

L'un des axes de recherche important en contrôle quantique est la recherche de procédures et d'algorithmes de résolution explicite des problèmes concrets de contrôle. Pour ma part, mes recherches concernent la modélisation mathématique et numérique de la problématique du contrôle. Si de nouvelles modélisations peuvent être mises à profit pour développer des méthodes de résolution, mon objectif est de fournir des modèles donnant un cadre interprétatif permettant une meilleure compréhension des relations entre régimes quantiques et classiques. La manière dont la structure mathématique doit être agencée pour décrire le système et l'efficacité d'un algorithme par rapport aux autres, nous informent sur le comportement profond des systèmes physiques ou des lois physiques. Il est faux de penser que la modélisation et la méthode de résolution résultent toujours linéairement de la compréhension physique. En réalité une part, quelque fois une grande part de la compréhension physique découle de l'intuition mathé-

matique lors de la modélisation et de la logique numérique lors de l'élaboration algorithmique. Mon credo de recherches n'est pas seulement de fournir des outils de modélisation et de simulation des problèmes physiques. Ce n'est pas d'utiliser ces mêmes outils pour fournir une étude phénoménologique. Mon but est de comprendre certaines lois de la Nature concernant la matière et le rayonnement au niveau fondamental. Mon approche ne repose pas sur l'expérimentation instrumentale, l'étude phénoménologique, ou la réflexion théorique. Elle repose sur le dialogue entre mathématiques / algorithmique et problèmes physiques. J'essaie de comprendre les problèmes physiques à travers leurs modélisations mathématiques / numériques. D'un certain point de vue, je procède à des expérimentations mathématiques / numériques. Chaque tentative de décrire un problème par une structure mathématique donnée, en fonction de son adéquation avec la situation physique, nous apprend quelque chose sur les lois profondes qui régissent celles-ci.

Pour revenir au problème de contrôle, la situation idéale concerne un système quantique isolé (*système fermé*) décrit par des états purs $E = \mathcal{H}$ (où \mathcal{H} est un espace de Hilbert, avec ¹ $\forall O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \forall \psi \in \mathcal{H}, \omega_\psi(O) = \langle \psi | O | \psi \rangle$). Ce fut l'objet de ma thèse de doctorat concernant le contrôle d'atomes ou de molécules par des champs laser. Mais dans la réalité, les systèmes quantiques ne sont jamais vraiment isolés de l'environnement (*systèmes ouverts*). Le premier effet de cette interaction avec l'environnement est que l'on doit considérer des états mixtes² $E = \{\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \rho^\dagger = \rho, \rho \geq 0, \text{tr} \rho = 1\}$ (avec $\forall O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \forall \rho \in E, \omega_\rho(O) = \text{tr}(\rho O)$), qui sont des mixtures statistiques d'états quantiques. En écrivant ρ dans sa base de diagonalisation, $\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle \phi_i|$, $p_i \in [0, 1]$ est la probabilité statistique pour que le système se trouve dans l'état $\phi_i \in \mathcal{H}$ qui n'est pas nécessairement état propre de l'Hamiltonien (il peut lui-même incorporer des probabilités quantiques de superposition d'états propres). Mais si c'était là le seul effet de l'environnement, la dynamique du système obéirait à une simple équation de Schrödinger-Liouville $i\hbar\dot{\rho} = [H(x(t)), \rho(t)]$ (H étant l'Hamiltonien du système avec l'action du contrôle) qui ne poserait guère plus de difficultés que le contrôle des systèmes fermés. Mais l'interaction de l'environnement avec le système génère sa propre dynamique, qui peut de plus répondre au contrôle en changeant avec lui : $i\hbar\dot{\rho} = [H(x(t)), \rho(t)] + \mathcal{D}_{x(t)}(\rho(t))$. Cette action \mathcal{D} de l'environnement va gêner le contrôle, dévier sa trajectoire (en faisant rater la cible), voire complètement modifier ses effets. Le problème de contrôle peut être comparé à la manipulation du gréement d'un voilier pour atteindre une île objectif, alors que soufflent des vents contraires. Dans le cas où le système quantique est en contact avec un "grand environnement", c'est un peu comme naviguer en pleine tempête ; tempête qui va déporter irrémédiablement le voilier vers une destination imposée par celle-ci. Et avec certains environnements (type bain thermique, réservoir) c'est un peu comme naviguer au milieu d'un ouragan imprévisible.

Dans le cas d'un système quantique en contact avec un grand environnement, sous certaines conditions (couplage faible système-environnement, approximation markovienne, etc) le système est gouverné par une équation de type Lindblad [BP02] :

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho] - \frac{\nu}{2} \gamma^k \{ \Gamma_k^\dagger \Gamma_k, \rho \} + \nu \gamma^k \Gamma_k \rho \Gamma_k^\dagger \quad (1.1)$$

où les opérateurs $\Gamma_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sont appelés opérateurs de "quantum jumps" et $\gamma^k \in [0, 1]$ sont les taux de "jumps" par unité de temps. La dérivation de cette équation maîtresse, en particulier en présence d'un dispositif de contrôle dynamique, est un problème en soi relativement complexe qui fait l'objet de recherches actives. Ceci n'a pas fait l'objet de mes travaux. Néanmoins, il est à noter que l'équation de Lindblad est la structure la plus générale d'équation différentielle qui garantit l'évolution d'une matrice densité en matrice densité (conservation de l'auto-adjonction, de la positivité, de la trace). On la considérera donc, indépendamment de sa dérivation microscopique, comme le modèle le plus général de dynamique en présence d'un environnement, mais aussi le plus problématique vis à vis du contrôle car correspondant au pire environnement possible.

Schématiquement, on peut considérer qu'il y a trois stratégies de contrôle. Pour expliquer celles-ci, on

1. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ désigne l'ensemble des opérateurs de \mathcal{H} .
2. pour simplifier la discussion ici, on suppose $\dim \mathcal{H} < +\infty$

peut faire l'analogie avec le pilotage d'une voiture de course sur un circuit.

- *Le contrôle adiabatique* consiste à faire varier très lentement les paramètres de contrôle afin de pouvoir décrire la dynamique à partir de la déformation des états propres instantanés (via un théorème adiabatique [Kat50]). C'est un peu comme une conduite de "père de famille" allant lentement pour être certain de passer les virages et de rester sur la piste. L'intérêt principal de cette méthode de contrôle est qu'elle est robuste aux erreurs (une petite erreur de conduite ne va conduire au hors piste), elle est facile à mettre en œuvre, i.e. il n'est pas difficile de trouver une solution au contrôle, et surtout elle est intelligible, on comprend pourquoi une solution est solution. Mais elle a le défaut qu'elle ne permet pas forcément d'atteindre tous les objectifs possibles (difficile de prendre une épingle à cheveux très serrée avec une conduite lente et sans à-coup en peu de manœuvres), mais surtout elle est lente (on arrive au bout du circuit avec un temps peu compétitif) ce qui peut être très problématique alors que le contrôle se déroule sous l'effet de l'environnement.
- *Le contrôle par frappes* ou variations soudaines consiste en un train de changements ultra-courts des paramètres de contrôle pour amener le système vers la cible par des "chocs successifs". C'est un peu comme une conduite de "frimeur" par grands coups de volant, coups de frein et accélérations brutales. Cette méthode a les intérêts et défauts inverses du contrôle adiabatique, elle permet d'atteindre des objectifs difficiles (un coup de frein à main permet de prendre une épingle à cheveux serrée), et elle est relativement rapide. Par contre elle est peu robuste (une manœuvre mal maîtrisée va conduire au hors piste ou au tête à queue), et sa mise en œuvre est peu aisée (il est difficile de trouver les manœuvres conduisant à l'objectif).
- *Le contrôle optimal* consiste à chercher les variations des paramètres de contrôle qui conduisent de façon "optimale" vers la cible (minimisant rapidement la distance à celle-ci). C'est la conduite du "pilote professionnel" qui tient la trajectoire idéale tout au long de la course. Elle est en général peu robuste (la trajectoire idéale est toujours à la limite de la sortie de piste) mais surtout elle très peu intelligible. En effet, les méthodes de contrôle optimal sont essentiellement algorithmiques fournissant des solutions (en général assez complexes) mais sans arguments sur la physique expliquant pourquoi elles sont bien solutions.

Il y a aussi des approches mixtes utilisant simultanément plusieurs de ces stratégies, comme la modulation adiabatique des paramètres de frappes ultra-courtes. Mes travaux s'intéressent principalement au problème du contrôle adiabatique car il fournit un cadre mathématique pertinent pour la description des liens entre le système quantique contrôlé et le système classique de contrôle (à savoir la géométrie des espaces fibrés associés aux phases géométriques du transport adiabatique, et l'analyse spectrale associée aux états propres instantanés impliqués dans ce transport). J'ai aussi étudié l'approche mixte de modulation adiabatique d'un contrôle par frappes. Un autre distinguo dans l'approche du contrôle concerne la différence entre le contrôle passif (contrôle en "boucle ouverte") qui consiste en la résolution *ab initio* du contrôle, et le contrôle actif (contrôle en "boucle fermée", contrôle avec *feed-back*). Dans le premier cas, on trouve à l'avance $t \mapsto x(t)$ que l'on applique au système, alors que dans le second, on adapte "à la volée" $t \mapsto x(t)$ en fonction d'informations récoltées sur le système pendant le déroulement du contrôle. Dans mon travail, je ne me suis intéressé qu'au contrôle passif.

1.2 Résumé de mes travaux de thèse

Ma thèse de doctorat *Géométrie et adiabaticité des systèmes photodynamiques quantiques* était consacrée au développement de méthodes mathématiques et numériques de modélisation et de simulation de la dynamique d'interaction entre un atome ou une molécule avec un champ laser intense. Deux problématiques majeures étaient principalement étudiées, d'une part le contrôle cohérent de la population d'états atomiques, i.e. la possibilité de manipuler avec des champs laser le niveau d'énergie d'un

système atomique ou de lui imposer une superposition d'états d'énergie (le mettre dans un état de "chat de Schrödinger"); et d'autre part la photodissociation de l'ion moléculaire H_2^+ , i.e. la possibilité de "briser" la molécule avec un champ laser tout en contrôlant le déroulement du processus. Deux approches complémentaires ont été développées dans ce cadre. La première, à la fois mathématique et numérique, consistait à utiliser une méthode adiabatique pour décrire la dynamique et la simuler numériquement. L'approximation adiabatique permet de décrire la dynamique du système à partir de successions d'états propres instantanés, ce qui permet d'utiliser peu d'états à chaque instant et offre une très forte contrôlabilité de la dynamique. Malheureusement ses conditions d'application sont très restrictives. J'ai donc développé des méthodes généralisant l'approche adiabatique de manière adaptée aux problèmes traités, en travaillant non plus avec les états propres du système mais avec ceux d'un système effectif défini dans un "espace actif" d'états, corrigeant les différences à l'aide d'un objet mathématique appelé "opérateur d'onde", et forçant éventuellement l'adiabaticité à l'aide d'une méthode de frontière absorbante. La seconde approche a consisté à développer une structure géométrique décrivant le problème de contrôle en donnant un cadre d'interprétation et d'analyse des processus physiques associés. Cette structure, fondée sur le concept de phases géométriques (adiabatiques ou non), se présentait sous la forme d'un espace fibré. La base de cet espace était une variété différentielle (objet géométrique lisse) représentant les possibilités de contrôle et équipée d'une métrique mesurant la "réaction du système quantique à son contrôle". Les fibres, "accrochées" en chaque point de la variété de base, représentaient les "transformations" du système sous l'effet du contrôle. Enfin la connexion entre les fibres permettait de définir la dynamique par une évolution "de proche en proche". J'ai particulièrement travaillé sur la construction de ces structures géométriques dans le cas où l'on considérait un espace actif d'états d'un système effectif et non les états propres du système (ce qui induit aux fibres une structure de groupe non-abélien plus complexe à étudier que dans le cas adiabatique usuel où la structure est abélienne). Le chapitre 2 de ce mémoire reviendra plus clairement sur ces structures géométriques liées au contrôle adiabatique de systèmes isolés. Après ma thèse, je me suis intéressé au cas des systèmes ouverts. La suite de cette introduction présente les points à prendre à compte dans ces cas, ma démarche et le contexte de mes travaux.

1.3 Contextes des travaux

1.3.1 Contexte physique : Les 4 processus d'action de l'environnement et les 3 phénomènes dynamiques induits

La problématique du contrôle de systèmes ouverts recouvre plusieurs situations. L'environnement peut se trouver en amont du système, gênant la propagation et déformant le signal de contrôle avant que celui-ci ne parvienne au système quantique. On parlera dans ce cas d'un processus de *distorsion* du contrôle. L'environnement peut être autour du système, gênant sa dynamique induite par le contrôle, ce qui se traduit par une corrélation entre l'état du système et celui (toujours inconnu dans la pratique) de l'environnement. On parlera d'un processus d'*intrication* entre le système et l'environnement. Dans cette situation il faut distinguer le cas d'un petit environnement (de taille comparable au système), du cas d'un "réservoir" (de taille très supérieure au système). L'environnement peut également dissiper l'énergie du système, voire faire disparaître ce dernier en l'absorbant ou en le brisant "en morceaux". On parlera alors de processus de *dissipation* (car dans les deux cas, il se traduit par la dissipation au cours du temps des ondes quantiques associées au système). Enfin l'environnement peut être en aval du système, gênant les mesures sur celui-ci, on parlera d'*altération* du feed-back du contrôle. Je n'ai pas étudié cette dernière possibilité dans mon travail. Bien entendu, les quatre processus peuvent être conjoints. Ceux-ci peuvent engendrer trois phénomènes dynamiques venant perturber le contrôle. Le phénomène de *relaxation* consiste en ce que l'environnement force les populations des états d'énergie du système à évoluer vers des populations d'équilibre ("choisies" par l'environnement). Le phénomène de *décohérence* consiste en ce que l'environnement perturbe les superpositions cohérentes d'états (les "chats de Schrödinger") pour les remplacer par des mélanges statistiques d'états (c'est à dire des états "aléatoires"); on parle aussi

d'une transition des états purs vers les états mixtes). Enfin le phénomène de *contre-réaction* consiste en ce que l'environnement réagisse directement au contrôle (en évoluant sous l'effet de celui-ci) contrant ses effets sur le système.

Ces différents processus peuvent être mis en évidence avec l'équation de Lindblad. Supposons que $\det \rho \neq 0$, alors on peut montrer [23] que l'équation de Lindblad est équivalente à l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar\dot{\Psi}_\rho = \left(H \otimes 1_{\mathcal{H}_A} - \frac{i}{2}\gamma^k \Gamma_k^\dagger \Gamma_k \otimes 1_{\mathcal{H}_A} + \frac{i}{2}\gamma^k \Gamma_k \otimes \Gamma_k^\dagger(\Psi_\rho) \right) \Psi_\rho \quad (1.2)$$

où $\Psi_\rho \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A$ (\mathcal{H}_A est un espace de Hilbert auxiliaire de même dimension que \mathcal{H}) tel que $\rho = \text{tr}_A |\Psi_\rho\rangle\rangle \langle\langle \Psi_\rho|$, Ψ_ρ est appelé purification de ρ . \mathcal{H}_A joue le rôle d'une représentation effective de petite dimension de l'environnement. Γ_k^\dagger est un opérateur non-linéaire construit à partir de Γ_k . L'équation de Schrödinger issue de la purification de l'équation de Lindblad est générée par trois opérateurs. $H \otimes 1_{\mathcal{H}_A}$ (purification de $[H, \cdot]$) est l'Hamiltonien du système sans environnement. Le dissipateur $-\frac{i}{2}\gamma^k \Gamma_k^\dagger \Gamma_k \otimes 1_{\mathcal{H}_A}$ (purification de $-\frac{i}{2}\gamma^k \{\Gamma_k^\dagger \Gamma_k, \cdot\}$) est anti-autoadjoint et rend l'Hamiltonien total non-autoadjoint. C'est le terme responsable du processus de dissipation. En effet considérons un système dont la dynamique est gouvernée par un Hamiltonien indépendant du temps de la forme $H - iD$ avec $H^\dagger = H$, $D^\dagger = D$ et $D \geq 0$. Dans ce cas l'opérateur d'évolution $U(t, 0) = e^{-i\hbar^{-1}(H-iD)t}$ est une contraction $\|U(t, 0)\| \leq e^{-\hbar^{-1}\|D\|t} < 1$ (si $t > 0$). Il s'en suit qu'il provoque la dissipation de l'onde quantique $\psi(t) = U(t, 0)\psi_0$ ($\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi(t)\| = 0$) et de l'énergie moyenne $E(t) = \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle$ ($\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$). Le troisième opérateur $\frac{i}{2}\gamma^k \Gamma_k \otimes \Gamma_k^\dagger(\cdot)$ (purification de $i\gamma^k \Gamma_k \cdot \Gamma_k^\dagger$) a plusieurs rôles. D'une part, il restaure les probabilités totales pour que $\text{tr} \rho = 1$. En d'autres termes, si le dissipateur modélise la perte d'énergie vers l'environnement, ce troisième terme représente le phénomène inverse. La non-linéarité de ce terme vient de cette fonction, la restauration de l'onde quantique doit en effet dépendre de son niveau de dissipation (pour que les probabilités ne dépassent pas 1). De ce point de vue, on peut aussi voir la présence du troisième terme comme une renormalisation de l'opérateur $H - \frac{i}{2}\gamma^k \Gamma_k^\dagger \Gamma_k$. Mais ce troisième opérateur a un rôle plus important encore. C'est un opérateur de couplage entre le système et l'environnement (puisqu'il est produit tensoriel de deux opérateurs non identité des deux espaces de Hilbert). C'est donc lui qui dynamiquement induit une intrication entre l'état du système et celui de l'environnement (dans sa représentation effective). Mais l'intricateur a un troisième rôle moins évident. Pour le mettre en lumière, il est bon de considérer une autre équation de Schrödinger équivalente à l'équation de Lindblad. Il s'agit d'une équation de Schrödinger stochastique [BP02] :

$$i\hbar d\psi = \left(H - \frac{i}{2}\gamma^k \Gamma_k^\dagger \Gamma_k \right) \psi dt + \frac{i}{2}\gamma^k \langle \Gamma_k^\dagger \Gamma_k \rangle_\psi \psi dt + i dN_t^k \left(\frac{\Gamma_k}{\|\Gamma_k \psi\|} - 1_{\mathcal{H}} \right) \psi \quad (1.3)$$

où $\{dN_t^k\}$ sont des processus de Poisson tels que $\mathbb{E}(dN_t^k) = \gamma^k \|\Gamma_k \psi\|^2 dt$ et avec $\rho = \mathbb{E}(|\psi\rangle\rangle \langle\langle \psi|)$ (\mathbb{E} étant l'espérance mathématique sur les processus aléatoires). On retrouve l'Hamiltonien et le dissipateur, mais l'intricateur est séparé en deux termes. Un terme de renormalisation $\frac{i}{2}\gamma^k \langle \Gamma_k^\dagger \Gamma_k \rangle_\psi$ qui restaure les probabilités totales, et un terme de bruit $i dN_t^k \left(\frac{\Gamma_k}{\|\Gamma_k \psi\|} - 1_{\mathcal{H}} \right)$ par des processus poissonniens (il existe une autre version de l'équation de Schrödinger stochastique avec des processus de Wiener). Ce bruit aléatoire peut être considéré comme venant s'ajouter au contrôle présent dans la dépendance temporelle de H , et donc comme constituant une distorsion par l'environnement. L'altération du feedback n'est pas visible au niveau de l'équation gouvernant la dynamique du système car ce processus se situe en aval de celui-ci.

Il est également possible de mettre en évidence les phénomènes dynamiques engendrés par l'équation de Lindblad. Pour simplifier les notations considérons que $\dim \mathcal{H} = 2$. Dans l'hypothèse d'un contrôle adiabatique, dans l'approximation Markovienne et dans l'approximation dite séculaire (le temps de réponse du système est très court devant le temps de relaxation de l'environnement), l'équation de Lindblad

devient

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho] - \frac{i}{2} \sum_{k \in \{+, -, z\}} \gamma^k \{\bar{\sigma}_k^\dagger \bar{\sigma}_k, \rho\} + i \sum_{k \in \{+, -, z\}} \gamma^k \bar{\sigma}_k \rho \bar{\sigma}_k^\dagger \quad (1.4)$$

où $\bar{\sigma}_k(t) = R(t)\sigma_k R(t)^\dagger$ avec $R(t) = |\psi_+(t)\rangle\langle\uparrow| + |\psi_-(t)\rangle\langle\downarrow|$ ($(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)$ étant la base canonique de $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2$ et $(\psi_\pm(t))$ sont les vecteurs propres instantanés de $H(t)$) et $\{\sigma_+, \sigma_-, \sigma_z\}$ les matrices de Pauli ($\sigma_\pm = \sigma_x \pm i\sigma_y$). Dans la représentation de Liouville : $\rho = \sum_{i,j \in \{\uparrow, \downarrow\}} \rho_{ij} |i\rangle\langle j| \rightarrow |\rho\rangle\rangle = \sum_{i,j \in \{\uparrow, \downarrow\}} \rho_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle$, l'équation de Lindblad devient

$$i\hbar|\dot{\rho}\rangle\rangle = R \otimes R^* ((L_{dyn} + L_{dec}) \oplus L_{rel}) R^\dagger \otimes R^T |\rho\rangle\rangle \quad (1.5)$$

avec $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \mathcal{H}_{pop} \oplus \mathcal{H}_{coh}$ où³ $\mathcal{H}_{pop} = \text{Lin}(|\uparrow\uparrow\rangle\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\rangle)$ est l'espace des populations et $\mathcal{H}_{coh} = \text{Lin}(|\uparrow\downarrow\rangle\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\rangle)$ est l'espace des cohérences.

$$L_{dyn} = \begin{pmatrix} \lambda_+ - \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_- - \lambda_+ \end{pmatrix}_{(|\uparrow\downarrow\rangle\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\rangle)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{coh})$$

avec λ_\pm les valeurs propres instantanées de $H(t)$, est l'opérateur engendrant les oscillations des cohérences sous l'effet de la dynamique "naturelle" (sans environnement) du système.

$$L_{dec} = \begin{pmatrix} -i\frac{\Gamma}{2} & 0 \\ 0 & -i\frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix}_{(|\uparrow\downarrow\rangle\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\rangle)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{coh})$$

avec $\Gamma = \gamma_+ + \gamma_- + 4\gamma_z$, est un opérateur provoquant une dissipation des cohérences, c'est donc le terme provoquant la décohérence des états du système. Enfin

$$L_{rel} = \begin{pmatrix} -i\gamma_- & i\gamma_+ \\ i\gamma_- & -i\gamma_+ \end{pmatrix}_{(|\uparrow\uparrow\rangle\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\rangle)} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{pop})$$

est un terme qui induit une relaxation vers l'état d'équilibre $|\rho_\infty\rangle\rangle = \frac{1}{\gamma_+ + \gamma_-} \begin{pmatrix} \gamma_+ \\ \gamma_- \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_{pop}$. Enfin la présence des opérateurs "tournés dans la base adiabatique" $\bar{\sigma}_k = R^\dagger \sigma_k R$ et non des opérateurs dans la base nue σ_k , est la traduction de la contre-réaction de l'environnement au contrôle adiabatique. La discussion est similaire en toute dimension. Sans l'approximation séculaire il y a en plus des couplages entre populations et décohérences rendant la dynamique plus complexe, et sans les approximations adiabatiques et Markovienne la forme mathématique de la contre-réaction est plus compliquée.

L'objectif de mes recherches est de trouver des méthodes mathématiques et numériques pour modéliser et simuler le contrôle des systèmes ouverts, intégrant de façon naturelle ces différents processus. L'idée n'étant pas de mesurer l'effet de l'environnement sur le contrôle (ni l'ampleur de "l'échec" du contrôle induit par celui-ci), ni de chercher des situations où les effets de l'environnement peuvent être réduits, mais de fournir un cadre dans lequel il est possible d'étudier les problèmes de contrôle en s'appuyant sur le bruit environnemental plutôt qu'en luttant contre lui (un peu comme un capitaine d'un voilier louvoyant pour atteindre son objectif au milieu de vents contraires). Pour ce faire, il s'agit pour modéliser la dynamique de trouver des approches dites adiabatiques (i.e. par déformation des états en des successions d'équilibres instantanés), adaptées à la présence des processus induits par l'environnement, sachant que de telles approches fournissent des procédures de contrôle aisément réalisables. D'autre part, il s'agit de trouver une structure géométrique incluant naturellement les processus environnementaux, afin de fournir une description de la relation tripartite contrôle-système-environnement, et d'en dériver des outils d'analyse et d'interprétation de la dynamique du système contrôlé et perturbé par l'environnement. Il est par ailleurs nécessaire de décomposer le problème général en des problèmes plus simples, en l'occurrence

3. $\text{Lin}(\phi_i)_i$ désigne l'espace vectoriel engendré par les vecteurs ϕ_i .

de trouver et d'étudier des modèles de systèmes physiques ne présentant qu'un seul des processus de gêne environnemental afin d'isoler les effets de chacun et de trouver les "ingrédients" spécifiques à ceux-ci dans la modélisation géométrique et les simulations de la dynamique. La partie I de ce mémoire (chapitres 3 et 4) est consacrée au phénomène de distorsion du contrôle. La partie II (chapitres 5 et 6) est consacrée au processus de dissipation. Enfin la partie III (chapitres 7 et 8) est consacrée au processus d'intrication.

Avant de poursuivre, je souhaite faire une remarque sur la notion de décohérence. Celle-ci, particulièrement importante dans la dynamique des systèmes ouverts, fait l'objet de nombreuses études et de nombreuses "polémiques" sur sa définition et son contour. D'un point de vue formel, par étymologie, la décohérence est une chute des cohérences c'est à dire des termes hors diagonaux de la matrice densité ρ . Ce n'est pas une définition des plus robustes, car elle est dépendante du choix de la base de représentation matricielle, et un état propre pour cette représentation (un état membre de la base), sera toujours de cohérence nulle (qui peut masquer la présence comme l'absence d'un processus de décohérence). Il est plus intéressant de caractériser la décohérence comme une chute de la pureté $\text{tr}(\rho^2)$ ou comme une augmentation de l'entropie de von Neumann $-\text{tr}(\rho \ln \rho)$. Mais par rapport à une base d'états physiquement pertinents (pour l'interprétation ou d'un point de vue expérimental), l'étude de l'évolution des cohérences reste important. Mais la simple évolution d'une observable (cohérence, pureté ou entropie) n'est pas suffisamment caractéristique car nombre de processus peuvent être responsables de cette évolution. C'est pour cette raison que je mets l'accent sur les processus environnementaux (distorsion, dissipation et intrication) et non sur le phénomène de décohérence en lui-même. Mais il est à noter que face à cette difficulté, certains auteurs choisissent une définition plus restrictive ou un affinement des définitions de la décohérence. En particulier, de nombreux auteurs adhèrent aux définitions de Joos [Joo07]. La *vraie décohérence* serait restreinte à la chute irréversible des cohérences (une chute de la pureté, ou une augmentation de l'entropie) induite par un processus d'intrication entre le système quantique et un grand environnement. La chute des cohérences induite par l'intrication d'un système avec un petit environnement, qui est réversible du fait de la faible dimension de l'environnement (des oscillations font remonter les cohérences après un certain temps), ne serait qu'une *fausse décohérence*. La chute des cohérences pour des raisons triviales, comme une évolution quantique "spontanée" vers un état propre de la représentation, est aussi considérée comme de la fausse décohérence. Enfin, on qualifie de *décohérence falsifiée*⁴ une chute des cohérences du fait d'un effet de moyenne sur un grand nombre de copies indépendantes du système, sans interaction et donc sans intrication entre elles (décohérence au niveau de la moyenne, mais pas au niveau individuel). Je ne souscris pas à ce raffinement de la notion de décohérence, la distinction entre les trois notions me paraissant artificiel. J'expliquerai pourquoi dans la suite de ce mémoire.

1.3.2 Hypothèse de travail et discussions épistémologiques : topologie algébrique de la complexité

Mes recherches ont été guidées par une hypothèse concernant la complexité des systèmes dynamiques quantiques. Cette hypothèse est que la complexité peut être classifiée à l'aide de la *topologie algébrique* et plus précisément d'objets mathématiques appelés "classes de cohomologie de Deligne".

Le point de départ de ce travail concernant le contrôle des systèmes quantiques soumis à un processus de décohérence est une réflexion sur la complexité. On n'entend pas par là la complexité des systèmes telle qu'étudiée en physique statistique, ni la théorie des classes de complexité de l'informatique théorique⁵ qui étudie la quantité de ressources nécessaires à la résolution d'un problème par une exécution algorithmique ; mais la complexité des théories physiques. Cette question n'est sans doute pas indépendante des deux autres (les outils de la physique statistique étant suffisamment transverses pour aider à

4. Joos utilise les termes *false decoherence* et *fake decoherence* que j'ai choisi de traduire par respectivement "fausse décohérence" et "décohérence falsifiée".

5. P, NP, EXPTIME, NEXPTIME

la compréhension de problèmes difficiles même lorsqu'ils ne mettent pas en jeu un très grand nombre de degrés de liberté, et les simulations numériques de théories physiques complexes étant sous doute liées à la complexité algorithmique).

Il n'est pas aisé de définir proprement la complexité des théories physiques, mais l'on pourra s'entendre sur le fait, par exemple, que la théorie de la gravitation Newtonienne en référentiels galiléens (loi d'attraction d'universelle, équation de Poisson), est plus simple que sa version en référentiels non-galiléens (qui ajoute les forces d'inertie), elle-même plus simple que la théorie de relativité générale d'Einstein (espace-temps courbe). Car si ce n'était pas le cas, on commencerait par enseigner cette dernière qui est la plus exacte. Ici la montée en complexité de la théorie accompagne la montée en exactitude de la description. Un autre exemple est le suivant : l'électrostatique qui décrit l'interaction de particules fixes avec le champ électromagnétique, est plus simple que l'électrodynamique qui décrit l'interaction des "lignes d'univers" de ces particules avec le champ, elle-même plus simple que l'électrodynamique 2-forme [HT86], qui décrit l'interaction des "feuillettes d'univers" de la théorie des cordes [Zwi09] avec ce même champ. Ici la montée en complexité accompagne la descente vers le plus élémentaire (vers le plus fondamental, ce qui est aussi d'une certaine façon le cas pour l'exemple de la gravité). On peut légitimement penser qu'une montée en complexité de la théorie accompagne la montée... en complexité des systèmes étudiés. Le contrôle statique de systèmes fermés est plus simple que le contrôle dynamique de systèmes fermés, lui-même plus simple que le contrôle dynamique de systèmes ouverts.

Cette discussion est pour l'instant trop générale et souffre d'un écueil, dans les deux exemples précités, on ne compare que des théories portant sur le même sujet. La question de savoir si la théorie de relativité générale est plus ou moins complexe que l'électrodynamique 2-forme de la théorie des cordes, est beaucoup plus délicate si l'on ne veut pas tomber dans une simple appréciation subjective. Il n'est pas interdit de penser que la complexité d'une théorie physique soit fidèlement reflétée par la complexité de la structure mathématique qui lui sert de langage (les principes physiques qui peuvent apparaître comme contre-intuitifs nécessitent l'usage d'outils mathématiques plus sophistiqués : la superposition d'états et la non-localité de la mécanique quantique se traduisent par l'usage d'un espace de Hilbert complexe en lieu et place de l'espace de phase de la mécanique classique ; la relativité de l'écoulement du temps induit le remplacement de l'espace Euclidien par l'espace Minkowskien, voire par un espace Lorentzien). Mais là encore, il faudrait éviter de sombrer dans la plus pure subjectivité. Une chose intéressante avec l'exemple de l'électromagnétisme, est que la complexité semble liée à la dimension géométrique de l'objet fondamental de la théorie : particules (et donc points) pour l'électrostatique (objets de dimension zéro), lignes d'univers pour l'électrodynamique (objets de dimension une) et feuillettes d'univers pour la théorie des cordes (objets de dimension deux). Une telle progression géométrique n'est pas aussi évidente dans le cas de la gravitation, mais examinons plus avant ce genre de progressions. La dimension géométrique n'est pas la seule chose à prendre en compte, on peut en effet penser qu'une théorie des cordes dont les feuillettes d'univers seraient des sphères ne présente pas le même genre de complexité qu'une théorie pour laquelle ce seraient des tores ou des rubans de Möbius. Ce qui amène au passage à penser que la complexité des théories ne constitue pas nécessairement un ordonnancement total. Par contre une théorie des cordes usant des feuillettes d'univers en sphères n'est certainement pas plus complexe qu'une utilisant des ellipsoïdes ou des patatoïdes. Il est clair que nous tournons ici autour de la notion de topologie et pour être plus précis de topologie géométrique (l'étude des variétés à travers leur déformations continues, leur plongements et leurs immersions ; soit en termes plus triviaux, l'étude des objets géométriques "mous" à travers leurs formes générales indépendamment de toute mesure de longueurs [Nak90]).

Les mathématiques fournissent des outils pour classer les variétés en fonctions de leurs formes. On peut ainsi, par exemple, regrouper les "objets de même forme" dans des classes dites d'homotopie. Ces différentes classes au sein d'un même espace (d'une même théorie) et leurs relations entre elles, forment un groupe d'homotopie, le degré du plus grand groupe d'homotopie non-trivial indiquant la complexité de la géométrie de l'espace. On ne donnera pas ici une définition précise de l'homotopie et du degré du groupe d'homotopie, ce n'est pas le sujet pour l'instant, disons seulement que les sphères ont un groupe d'homotopie de degré un trivial (car tout chemin fermé dessiné sur sa surface peut être déformé

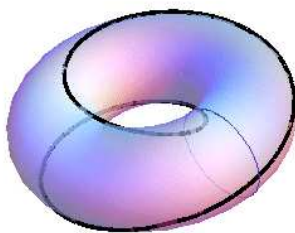


FIGURE 1.1 – Deux chemins fermés sur le tore, en trait fin un chemin de classe d’homotopie $(0, 1)$ et en trait épais un chemin de classe $(1, 2)$.

pour être contracté en un point), alors que celui des tores est assimilable à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (le premier entier comptant le nombre de tours orientés des chemins autour de l’âme du tore, le second autour du centre; deux chemins caractérisés par un même couple de ces entiers peuvent être déformés l’un vers l’autre, ce qui n’est pas le cas si les couples sont différents), voir figure 1.1. L’homotopie n’est pas l’unique concept permettant de classer les formes géométriques, nous pouvons citer les concepts d’homologie et de cohomologie. L’étude de cette classification constitue un domaine des mathématiques appelé topologie algébrique. Or, pour revenir au problème initial de cette discussion, la topologie algébrique est de portée beaucoup plus générale que la classification des formes géométriques, elle permet de définir la “forme” de structures mathématiques beaucoup plus abstraites. Sans rentrer dans les détails pour l’instant, la forme de la structure des différentes théories électromagnétiques (et plus généralement des théories des champs) est la cohomologie de Deligne [Joh02]. Pour faire simple, disons qu’elle classe les relations champs-potentiels (les changements de jauge jouant le rôle des déformations continues des chemins de l’exemple de l’homotopie). L’électrostatique est de degré de Deligne un, l’électrodynamique de degré deux, et l’électrodynamique 2-forme de degré trois. On notera qu’il existe un lien naturel avec la dimension géométrique que l’on a discuté précédemment⁶. On considérera donc le degré de Deligne comme une mesure de la complexité de la théorie. La gravitation Newtonienne en référentiels Galiléens est de degré de Deligne un (l’identité structurelle entre la théorie du champ électrostatique et du champ gravitationnel ne surprendra personne tant elle est évidente), celle en référentiels non-Galiléens est de degré 2. Pour ce qui est de la relativité générale, la question n’est pas tranchée. Elle est au moins de degré 2 car une théorie partielle de la relativité, dite de la spin-connexion, est de degré de Deligne 2. Mais la spin-connexion ne décrit que partiellement la gravitation et est largement insuffisante sans une autre composante dite des tétrades (ou vierbeins). Le degré de Deligne de la théorie complète (spin-connexion+tétrades) est une question ouverte, mais des indices montrent qu’elle serait de degré 3. Nous montrerons que le contrôle quantique cohérent statique est de degré de Deligne 1, et que le contrôle quantique cohérent dynamique est de degré 2. Le paradigme de ce travail est que le contrôle quantique dynamique de systèmes ouverts est de degré 3, et c’est la ligne directrice des recherches présentées ici. La difficulté est que si en basse dimension la réalisation concrète de la cohomologie de Deligne conduit à une unique forme structurelle (fonctions localement définies à valeurs dans un groupe pour le degré 1, espaces fibrés principaux pour le degré 2), il existe une multitude de réalisations de la cohomologie de Deligne de degré 3 (espaces 2-fibrés principaux, fibrés tordus, fibrés de gerbes, gerbes connectées, fibrés composites), qui, même si elle sont reliées par des “équivalences faibles”, ne se construisent pas de la même façon. La question de la construction de la structure réalisant la cohomologie de degré 3 en fonction de la situation physique étudiée, constitue le point de départ de ces travaux.

6. Ce lien se caractérise à travers divers théorèmes liant les groupes de cohomologie de Deligne, de de Rham et de Čech [GHV72].

Ce paradigme est soutenu par un autre point épistémologique. Nombre de physiciens se reconnaissent dans une approche de la physique dite réductionniste [Bit96]. Celle-ci considère que les lois d'une échelle se déduisent des lois de l'échelle plus élémentaire / plus fondamentale. Les lois du tout se déduiraient des lois des constituants. On dirait alors que les lois de la physique de la matière condensée se déduiraient des lois de la physique atomique, qui se déduiraient des lois de la physique des particules, elles mêmes qui se déduiraient des lois de la théorie des cordes (ou d'une de ses théories concurrentes). Une compréhension plus fine de la Nature se ferait donc par une réduction au plus élémentaire / plus fondamental. Bien sûr, chacun reconnaît qu'en pratique on ne sait pas déduire toutes les lois d'une échelle des lois de l'échelle plus élémentaire, mais d'un point de vue réductionniste, il ne s'agirait que d'un problème calculatoire ou/et d'astuces de démonstration. Cela conduit d'ailleurs beaucoup de physiciens à ne plus compter que sur l'augmentation de la puissance de calcul informatique pour simuler la complexité physique sur de grands centres de calculs parallèles traitant la dynamique de chaque entité constitutive du système complexe. Cette vision épistémologique de la physique, conduit un grand nombre de physiciens des cordes à qualifier leur théorie de "théorie du tout". Si le "tout" peut être compris comme l'ensemble de la physique, il peut (et il est par certains physiciens [Smo07]) être entendu comme l'ensemble des lois de la Nature et de l'Homme. En effet, en poussant les idées du réductionnisme, les lois de la chimie et de la biochimie se réduiraient aux lois de la physique, celles de la biologie et de la neurobiologie se réduiraient à celles de la biochimie, celles de la psychologie se réduiraient à celles de la neurobiologie, celles de la sociologie à celles de la psychologie. Si les approches réductionnistes sont nécessaires à la compréhension de la Nature (y compris en sciences de la vie, avec la biologie moléculaire et les neurosciences), la philosophie purement réductionniste n'est pas le seul point de vue possible. L'alternative est dite émergentisme [Bit96]. Cette position considère que de nouvelles lois fondamentales émergent à toutes les échelles de complexité. Par "fondamental" on entend qui ne peuvent se réduire ou se démontrer par les lois des constituants. La question de la position des postulats microcanonique (ou de l'équation maîtresse) et ergodique en physique statistique relèvent de cette discussion : postulats par défaut faute de démonstration complète pour les réductionnistes ; lois fondamentales de la complexité pour les émergentistes. En théorie des systèmes dynamiques, on peut définir le chaos par l'émergence de structures à toutes les échelles avec auto-similarité de ces structures (structure globale en fractale). S'inspirant de ce phénomène, ce travail adhère à une philosophie émergentiste "chaotique" de la physique : non seulement de nouvelles lois fondamentales émergent à toutes échelles de complexité et de constitution, mais il y aurait similarité de ces lois. Suivant cette idée, en réduisant à l'élémentaire (atomes \rightarrow particules \rightarrow cordes), en allant vers le plus fondamental (gravité Newtonienne en référentiels Galiléens \rightarrow gravité Newtonienne en référentiels non-Galiléens \rightarrow gravité en relativité générale), en augmentant la complexité (contrôle statique \rightarrow contrôle dynamique \rightarrow contrôle dynamique ouvert sur un environnement), on passerait par des théories de mêmes structures (de même "formes"). D'où le sentiment que le contrôle dynamique de systèmes ouverts est de degré de Deligne 3, et est donc structurellement similaire à l'électrodynamique 2-forme de la théorie des cordes.

Je ne crois donc pas que la théorie des cordes (ou ses concurrentes) constitue une théorie du tout, ce qui ne réduit en aucun cas sa portée et son intérêt, bien au contraire, si l'on adhère à l'idée que sa structure doit émerger de la complexité, mieux l'on comprendra la théorie des cordes à l'échelle de Planck, mieux l'on pourra comprendre les systèmes quantiques complexes à l'échelle atomique. Les résultats de la théorie des cordes ont été une inspiration constante pour ces travaux concernant le contrôle quantique sous décohérence. Je ne crois pas non plus que la simple augmentation de la puissance de calcul informatique permettra seule d'atteindre une compréhension plus fine de la Nature, les travaux méthodologiques et théoriques restant pertinents pour appréhender la complexité de celle-ci.

Il est à noter que la cohomologie de Deligne n'est certainement pas un cadre universel à la description de la complexité des théories physiques, de part sa nature, elle ne s'applique qu'au cadre de la théorie des champs. De plus pour des raisons de simplification nous n'avons discuté que du degré de la cohomologie, la complexité des problèmes physiques est, à degrés égaux, également caractérisée par le fait qu'un problème appartienne à la classe triviale ou à une classe non-triviale, et par le fait qu'il soit décrit par

une cohomologie abélienne ou non-abélienne (commutative ou non-commutative). Ces questions seront discutées par la suite.

Le chapitre 2 est consacré à une présentation synthétique de la cohomologie de Deligne et ses applications afin de rendre la lecture du reste de ce mémoire plus aisée au lecteur non familier de la topologie algébrique.

1.3.3 Contexte physico-mathématique : La “géométrie quantique”

Les différentes classes de Deligne sont associées à différentes réalisations géométriques (i.e. des objets géométriques supports des champs définissant les classes de Deligne), que nous désignerons sous le terme générique de *fibrations*. Dans le cas du contrôle quantique, ces réalisations géométriques sont le cadre de la modélisation mathématique des systèmes contrôlés, et c’est donc à travers celles-ci que j’espère fournir un cadre d’interprétation du contrôle. Plus généralement, cela s’inscrit dans une démarche de développement d’une “géométrie quantique”, à savoir la reformulation de la mécanique quantique dans un langage géométrique. Pourquoi vouloir développer une description géométrique de la mécanique quantique alors que les descriptions fonctionnelles et algébriques (espaces de Hilbert, algèbres d’opérateurs) semblent largement suffisantes ? La finalité ultime des approches géométriques est d’essayer de répondre aux trois grandes questions ouvertes de la mécanique quantique.

- Les problèmes de la relation quantique classique :
 - le problème de la quantification (comment trouver les opérateurs des observables quantiques sans ambiguïté)
 - le problème de la transition quantique classique (montrer proprement qu’un système avec un très grand nombre de particules se comporte classiquement).
 - le problème du mélange de dynamiques classiques et quantiques (difficulté à assurer la conservation de l’énergie, l’invariance de jauge, l’invariance de référentiel, etc).
 - le problème de définition du chaos quantique.

Toutes les approches pour résoudre ces problèmes donnent une impression de “bricolage” ne donnant pas une image globale cohérente. Et comme tout bricolage, il n’est pas très robuste : une approche qui fonctionne bien pour une classe de systèmes, fonctionnera mal pour une autre. La réponse traditionnelle qui veut que, épistémologiquement parlant, ce n’est pas une question pertinente car la mécanique classique est une approximation de la mécanique quantique, n’est pas convaincante. La mécanique classique est une approximation de la mécanique quantique dans le sens de la limite \hbar tendant vers 0, comme elle est une approximation de la relativité à la limite c tendant vers 0. Mais pour la relativité, on peut faire varier la vitesse d’un même corps pour la faire passer d’une valeur proche de c à une valeur petite par rapport à celle-ci. Mais on ne peut pas faire varier l’action d’un même corps de cette façon. Une particule élémentaire aura toujours une action de l’ordre du quantum \hbar , alors qu’un ballon de foot aura toujours une action très grande devant ce quantum. Pour passer de la particule au ballon, il faut assembler un très grand nombre de particules, on ne parle donc pas du même système. L’intérêt de la géométrie pour ce problème est que la mécanique classique peut être vue comme la géométrie d’un espace de phase (géométrie symplectique). Formuler géométriquement la mécanique quantique permettrait d’avoir un langage commun.

- Le problème de la théorie quantique de la gravitation.
C’est supposé être le problème majeur de la physique actuelle. L’incompatibilité entre la mécanique quantique et la relativité générale est essentiellement due à ces différences :

- la mécanique quantique est une théorie foncièrement non-locale (fonctionnelle), nécessitant une scène préalablement existante (un espace-temps) et à perturbations renormalisables ;
- la relativité générale est une théorie géométrique (donc foncièrement locale), indépendante d'arrière-fond (il n'existe pas d'espace-temps pré-existant, il est lui-même une variable dynamique), et à dynamique fortement non-linéaire (perturbations non renormalisables).

L'intérêt de la géométrie quantique et qu'elle pourrait résoudre les deux premières incompatibilités en définissant par exemple une géométrie non locale (comme par exemple la théorie de gravité par géométrie non-commutative [Con90]), ou en proposant une version quantique de l'espace-temps dynamique (comme par exemple la théorie de gravité quantique par boucles [RV15]).

- Le problème de l'interprétation de la mécanique quantique :
Comment résoudre les différents paradoxes ou de manière plus prosaïque, comment se faire une image intuitive de la dynamique quantique ? En fournissant des images géométriques, voire même des images graphiques de processus quantiques, la géométrie quantique peut être un puissant outil d'interprétation.

Pour ma part, concernant le premier problème, je ne me focalise que sur la question du couplage classique quantique pour ce qui est des systèmes quantiques asservis à des systèmes classiques (question en lien avec le contrôle quantique) et sur le chaos quantique dans ce contexte. Pour le second problème, je m'intéresse essentiellement aux analogies entre le contrôle quantique et les théories de gravitation quantique. Je m'intéresse aussi à la question de l'information quantique en espace-temps courbe, dans le cadre de l'étude des systèmes quantiques asservis (ici au champ classique de gravité). Pour le troisième problème, il s'agit pour moi d'avoir des images géométriques pour interpréter les problèmes de contrôle quantique (pourquoi une solution de contrôle est solution), de comprendre la décohérence, de classifier le degré de complexité des problèmes de contrôle.

1.4 Autour du déroulement des travaux

Mon travail de recherche présenté dans ce mémoire s'est déroulé de 2005 à 2017 à l'Institut UTINAM de Besançon (UMR CNRS 6213, Université de Bourgogne-Franche-Comté) et à l'Observatoire de Besançon (OSU THETA de Bourgogne-Franche-Comté). Tout au long de ces années, j'ai bénéficié du soutien de ces deux structures, et en particulier de l'aide de la plateforme informatique de l'institut, du soutien financier de l'équipe Physique Théorique & Astrophysique (et avant elle de l'équipe Dynamique des Systèmes Complexes), et du soutien financier de l'observatoire (à travers les projets Soutiens à la Recherche de l'OSU). Ces soutiens m'ont permis le coencadrement d'une thèse de doctorat et l'encadrement de huit stages de master, ainsi que de la publication de plusieurs articles. D'autre part de 2007 à 2011 j'ai collaboré au projet ANR CoMoC (Control of Molecular processes in Contact with an environment) qui était coordonné par Stéphane Guérin de l'Université de Bourgogne. Et récemment, j'ai participé à la rédaction du projet de recherche I-QUINS (Integrated Quantum Information at the Nanoscale) retenu pour financement par l'I-SITE de Bourgogne-Franche-Comté issu du plan d'investissement d'avenir (PIA2), projet porté par Frédéric Holweck (Université de Technologie de Belfort-Montbéliard).

1.4.1 Encadrements d'étudiants

Encadrement de la thèse de Mlle L. Aubourg

De septembre 2013 et à février 2017 j'ai coencadré avec Pierre Joubert la thèse de doctorat de Lucile Aubourg [Aub17] intitulée *Contrôle et transmission de l'information dans les systèmes de spins*. La thèse de Lucile porte essentiellement sur la distorsion du contrôle, ses effets de relaxation et de décohérence, et sur la transmission du désordre et du chaos entre un système classique et un système quantique (ainsi que

le rôle de l'intrication dans cette transmission). La thèse de Lucile se focalise sur les systèmes de spins (ensembles, chaînes, matrices, et glaces de spins). Par ailleurs la thématique du contrôle de l'information par frappes et de l'approximation adiabatique pour les systèmes intriqués ont été abordés avec elle durant ce travail. Cette thèse a donné lieu à quatre publications dans des revues internationales à comité de lecture [4-6,22], plus une issue du travail commencé en master [3]. À la suite de sa thèse, Lucile a débuté un post-doctorat de 3 mois à l'observatoire de Besançon sur un projet concernant l'information quantique et les trous noirs.

Encadrements de stages de master

Au cours de ces années, j'ai (co)encadré quatre stages de master 2.

- De février à juin 2017, j'ai encadré dans le cadre du master "Physique, physique numérique" de Besançon le stage d'Olivia Moro s'intitulant *Géométrie des trous noirs du point de vue de l'information quantique* qui traitait des analogies formelles entre la description des trous noirs en théorie des cordes et la physique de l'intrication quantique. En particulier il s'agissait d'étudier les similitudes entre l'équation définissant les branes non-commutatives et l'équation "aux valeurs propres non-commutatives" utilisée pour la dynamique adiabatique de qubits intriqués (que nous verrons au chapitre 7). D'autre part, il s'agissait de voir s'il existait un lien entre cette similitude et le fait que la théorie mathématique de classification des trous noirs en théorie des cordes était la même que celle de la classification des états intriqués de plusieurs qubits. Ce travail a donné lieu à une publication [17].
- De février à juin 2015, j'ai encadré dans le cadre du master "Physique, physique numérique" de Besançon le stage de Quentin Ansel s'intitulant *Transport de qubits autour d'un trou noir* qui traitait du formalisme dit des qubits localisés en espace-temps courbes. Ce formalisme permet à la suite d'approximations semi-classiques de passer de l'équation de Dirac-Einstein à une équation de Schrödinger d'Hamiltonien non-auto-adjoint. Il apparaît donc comme un exemple exotique de système dissipatif. À la suite de ce stage, Quentin a démarré une thèse de doctorat à l'Institut Carnot de Bourgogne et à la Technische Universität München sous la direction de Dominique Sugny concernant le contrôle de spins en résonance magnétique nucléaire.
- De février à juin 2013, j'ai encadré dans le cadre du master "Physique, physique numérique" de Besançon le stage de Lucile Aubourg s'intitulant *Peut-on dresser un chat de Schrödinger en le frappant ?* qui traitait du contrôle par frappes et de ses applications en informatique quantique. À la suite de ce stage, Lucile a démarré sa thèse de doctorat coencadrée par Pierre Joubert et moi-même. Ce travail a donné lieu à une publication [3].
- De février à juin 2009, j'ai coencadré avec José Lages dans le cadre du master "Physique théorique, physique des particules et astrophysique" d'Aix-Marseille II le stage d'Aurélien Vautey intitulé *Les phases géométriques en dynamique et contrôle quantique* qui traitait des méthodes géométriques pour le contrôle quantique. À la suite de ce stage, Aurélien devait commencer une thèse de doctorat pour laquelle il avait obtenu un financement, mais il a finalement préféré se tourner vers une autre carrière que celle de la recherche.

J'ai également encadré quatre stages de master 1.

- De février à juin 2016 (à temps partiel), Olivia Moro, dans le cadre du master "Physique, physique numérique" de Besançon, *Décomposition de la géométrie d'un trou noir et application au transport d'un qubit en espace-temps courbe*.
- De février à juin 2014 (à temps partiel), Quentin Ansel, dans le cadre du master "Physique, physique numérique" de Besançon, *Contrôle d'une molécule diatomique par impulsions ultra-courtes : la théorie des spaghettis*.

- De février à juin 2012 (à temps partiel), Lucile Aubourg, dans le cadre du master “Réactivité, molécules et matériaux” de Besançon, *Comment apprendre à compter à un chat de Schrödinger ?*.
- De mai à juin 2009 (à temps plein), Joévin Giboudot, dans le cadre du master “Physique subatomique, astrophysique et rayonnement” de Lyon I, *L'électromagnétisme et les monopôles magnétiques*.

De plus, j'ai encadré sept stages de travaux d'études de la Licence de physique de Besançon et deux stages d'été d'étudiants en licence de physique.

1.4.2 Enseignement en master et diffusion de la culture scientifique

Enseignement en master

Outre l'encadrement de stages, depuis 2011 j'enseigne en master “physique et physique numérique” de l'université de Franche-Comté. Je suis responsable du module de mécanique quantique de première année de master où l'ensemble des concepts fondamentaux sont abordés (de la notion d'opérateur à la théorie de la seconde quantification, en passant par la dynamique quantique, les méthodes d'approximation usuelles, des éléments de la théorie de l'information quantique et les modèles simples d'interaction matière-rayonnement). Pendant deux années j'ai également été responsable de l'enseignement des systèmes dynamiques classiques. Il s'agissait d'un enseignement par projets, où les étudiants devaient étudier un système dynamique réel issu de problèmes de physique, de sciences de l'ingénieur, de chimie ou de biologie sans a priori sur les résultats qu'ils pouvaient obtenir. L'idée est de confronter les étudiants à une situation concrète du travail d'un chercheur ou d'un ingénieur en physique nécessitant la compréhension d'un système dynamique. À charge de l'étudiant de construire et mener un projet pour cela par toutes les voies qu'il juge pertinentes (étude mathématique, simulations numériques, expérimentations,...), mais l'accent était mis sur les méthodes numériques. Par ailleurs, j'ai eu l'occasion d'enseigner une année en master seconde année, dans le cadre d'un cours libre, les concepts de topologie algébrique appliqués en physique quantique et en électromagnétisme.

Diffusion de la culture scientifique

En parallèle avec l'enseignement et la recherche, j'ai essayé d'avoir une activité soutenue de diffusion de la culture scientifique pour le grand public local. Cette activité s'est principalement déroulée dans le cadre de l'Université Ouverte de Besançon (qui organise des cours et des conférences pour le grand public) et avec le service de CST de l'université de Franche-Comté. Si cette activité n'a pas porté sur la “vulgarisation” du contrôle quantique, la majeure partie était consacrée à des thématiques tournant autour de la gravitation, de la relativité et de la cosmologie, où j'ai toujours essayé d'introduire le rôle de la géométrie dans la compréhension de la physique.

- Conférences pour le grand public à l'Université Ouverte de Besançon (48 conférences depuis 2006, principalement sur la gravitation, la théorie de la relativité générale, la cosmologie et la comparaison entre science et science-fiction).
- Animation d'un stand d'expériences de physique (machine de Wimshurst, générateur de Van de Graaff, moteur de Stirling, pendule de Newton,...) pour la fête de la science à l'UFR Sciences et Techniques de Besançon (tous les ans depuis 2010).
- Un article pour la revue de l'association des planétariums de langue française intitulé *Albert Einstein contre Maître Yoda* à propos de la confrontation entre théorie de la relativité et l'imaginaire issu des films de la franchise *Star Wars* (2016).

- Intervention radio sur France Bleu Besançon pour la manifestation *les 24h du temps* en 2015 (concernant les voyages dans le temps), et 3 interventions web-tv pour la rubrique *Y a-t-il un chercheur dans la salle?* (site web de l'Université de Franche-Comté, besancon.tv, youtube) en 2014 et 2015 pour commenter les éléments scientifiques dans les films *Interstellar*, *Retour vers le futur* et *Star Wars*.

1.4.3 Publications

Publications concernant principalement la distorsion du contrôle et les systèmes de spins

- [1] D. Viennot, *Geometric phases in adiabatic Floquet theory, abelian gerbes and Cheon's anholonomy*, J. Phys. A : Math. Theor. **42**, 395302 (2009) [arXiv :0905.4584].
- [2] D. Viennot, *Geometric phases in quantum control disturbed by classical sochastic processes*, J. Math. Phys. **53**, 082106 (2012) [arXiv :1208.0143].
- [3] D. Viennot & L. Aubourg, *Decoherence, relaxation and chaos in a kicked-spin ensemble*, Phys. Rev. E **87**, 062903 (2013) [arXiv :1303.3412].
- [4] L. Aubourg & D. Viennot, *Analyses of the transmission of the disorder from a disturbed environment to a spin chain*, Quantum Information Processing **14**, 1117 (2015) [arXiv :1408.4570].
- [5] D. Viennot & L. Aubourg, *Quantum chimera states*, Phys. Lett. A **380**, 678 (2016) [arXiv :1408.4585].
- [6] L. Aubourg & D. Viennot, *Information transmission and control in a chaotically kicked spin chain*, J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys. **49**, 115501 (2016) [arXiv :1402.2411].

Publications concernant principalement le contrôle adiabatique des systèmes dissipatifs

- [7] G. Jolicard, J.P. Killingbeck, D. Viennot, J. Buldyreva & P. Joubert, *Transitional and permanent regimes in the adiabatic Floquet approach to photodissociation processes*, J. Phys. A : Math. Theor. **41**, 095303 (2008) .
- [8] D. Viennot, G. Jolicard & J.P. Killingbeck, *Topology of the adiabatic passage process for molecular photo-dissociative dynamics*, J. Phys. A : Math. Theor. **41**, 145303 (2008).
- [9] D. Viennot, *The need for a flat higher gauge structure to describe a Berry phase associated with some resonance phenomena*, J. Math. Phys. **50**, 052101 (2009).
- [10] G. Dridi, S. Guérin, H.R. Jauslin, D. Viennot & G. Jolicard, *Adiabatic approximation for quantum dissipative systems : formulation, topology and superadiabatic tracking*, Phys. Rev. A **82**, 022109 (2010).
- [11] A. Leclerc, G. Jolicard, D. Viennot & J.P. Killingbeck, *Constrained adiabatic trajectory method : a global integrator for explicitly time-dependent Hamiltonians*, J. Chem. Phys. **136**, 014106 (2012) [arXiv :1201.1150].
- [12] A. Leclerc, D. Viennot & G. Jolicard, *The role of the geometric phases in adiabatic populations tracking for non-hermitian Hamiltonians*, J. Phys. A : Math. Theor. **45**, 415201 (2012) [arXiv :1202.3290].
- [13] D. Viennot, A. Leclerc, G. Jolicard & J.P. Killingbeck, *Consistency between adiabatic and nonadiabatic geometric phases for nonselfadjoint Hamiltonians*, J. Phys. A : Math. Theor. **45**, 335301 (2012) .
- [14] D. Viennot, *Almost quantum adiabatic dynamics and generalized time dependent wave operators*, J. Phys. A : Math. Theor. **47**, 065302 (2014) [arXiv :1308.1528].
- [15] G. Jolicard, A. Leclerc, D. Viennot & J.P. Killingbeck, *Global integration of the Schrödinger equation within the wave operator formalism : the role of the effective Hamiltonian in multidimensional active spaces*, J. Phys. A : Math. Theor. **49**, 195305 (2016) [arXiv :1604.05545].
- [16] A. Leclerc, D. Viennot, G. Jolicard, R. Lefebvre & O. Atabek, *Controlling vibrational cooling with zero-width resonances : an adiabatic Floquet approach*, Phys. Rev. A **94**, 043409 (2016) [arXiv :1607.07371].
- [17] D. Viennot & O. Moro, *Adiabatic transport of qubits around a black hole*, Class. Quant. Gravity **34**, 055005 (2017) [arXiv :1609.01540].

- [18] A. Leclerc, D. Viennot, G. Jolicard, R. Lefebvre & O. Atabek, *Exotic states in the strong field control of H_2^+ dissociation dynamics : from exceptional points to zero-width resonances*, J. Phys. B (soumise) [arXiv :1703.05618].

Publications concernant principalement le contrôle des systèmes intriqués

- [19] D. Viennot & J. Lages, *A new kind of geometric phases in open quantum systems and higher gauge theory*, J. Phys. A : Math. Theor. **44**, 365301 (2011) [arXiv :1101.2852].
- [20] D. Viennot & J. Lages, *C^* -geometric phase for mixed states : entanglement, decoherence and the spin system*, J. Phys. A : Math. Theor. **45**, 365305 (2012) [arXiv :1207.7340].
- [21] D. Viennot, *Adiabatic quantum control hampered by entanglement*, J. Phys. A : Math. Theor. **47**, 295301 (2014) [arXiv :1310.4095].
- [22] D. Viennot & L. Aubourg, *Adiabatic theorem for bipartite quantum systems in weak coupling limit*, J. Phys. A : Math. Theor. **48**, 025301 (2015) [arXiv :1407.4356].
- [23] D. Viennot, *Purification of Lindblad dynamics, geometry of mixed states and geometric phases*, J. Math. Phys. (soumise) [arXiv :1508.02279].

Publications concernant principalement les hautes théories de jauge et la géométrie appliquée en physique

- [24] D. Viennot, *Holonomy of a principal composite bundle connection, non-abelian geometric phases and gauge theory of gravity*, J. Math. Phys. **51**, 103501 (2010) [arXiv :1003.4591].
- [25] D. Viennot, *Non-abelian higher gauge theory and categorical bundle*, J. Geom. Phys. **110**, 407 (2016) [arXiv :1202.2280].

1.5 Organisation de ce mémoire

Après cette introduction expliquant la démarche et le contexte de mon travail, j'ai choisi d'écrire un long chapitre tentant d'introduire de façon la plus pédagogique possible les objets mathématiques que j'utilise et manipule dans mes articles. Ces concepts mathématiques, bien qu'étant au cœur de ma démarche car ils guident mon travail, peuvent souvent paraître quelque peu obscurs et abscons. J'aurai pu me contenter de présenter les résultats physiques sans insister sur les aspects mathématiques cachés par ceux-ci, mais j'ai pensé que cela ne représentait ni le fond de ma démarche, ni la réalité de mes résultats (dont l'originalité de certains reposent sur l'interprétation des structures mathématiques), ni même ma pensée profonde (j'adhère à une philosophie pythagoricienne⁷ consistant à penser que les objets mathématiques sont au plus proche de la nature profonde de la réalité). Le chapitre 2 est donc à considérer comme une tentative d'explication de ce que sont les objets mathématiques dont je parle à longueur d'article, mais du point de vue de leur rôle physique, de ce qu'ils pourraient nous dire sur l'essence de la réalité. Par conséquent, il ne s'agit aucunement d'une présentation rigoureuse ou exhaustive. À la suite du chapitre 2, ce mémoire est décomposé en trois parties, traitant chacune du contrôle gêné par un phénomène différent issu de l'environnement : la distorsions du signal de contrôle dans la partie I, la dissipation dans la partie II, et l'intrication dans la partie III. Les deux premières parties sont décomposées en deux chapitres, dont le premier traite des modèles, des phénomènes observés, et d'exemples de contrôle, alors que le second traite du formalisme géométrique dans lequel le contrôle prend place. La troisième partie est structurée un peu différemment. Son premier chapitre (chapitre 7) traite de l'intrication avec un petit environnement (c'est à dire du contrôle de systèmes bipartites), alors que son second chapitre (chapitre 8) traite de l'intrication avec un grand environnement et des difficultés inhérentes à ce cas. Ce chapitre 8 est plus une présentation de perspectives et de résultats prospectifs car

7. Certains auteurs parlent (improprement à mon avis) de philosophie platonicienne. J'utilise ici la notion de réalisme pythagoricien (ou réalisme einsteinien) telle que définie par B. d'Espagnat [d'E02].

mes travaux sur ce point n'ont pas encore tout à fait aboutis. Dans cette dernière partie, il est plus difficile de séparer la discussion sur la modélisation géométrique car l'essentiel de mes résultats concernent soit directement les aspects mathématiques, soit sont issus d'une réflexion sur ce que nous disent les aspects mathématiques. Les chapitre 3 à 8 sont rédigés comme des synthèses de mes travaux.

Chapitre 2

Hautes théories de jauge, géométrie catégorique et contrôle adiabatique

L'aspect mathématique de mes travaux est attaché à la modélisation géométrique des systèmes quantiques ouverts contrôlés. Dans ce chapitre, je vais essayer de donner les ingrédients essentiels à la compréhension de cette approche. Il ne s'agit pas ici de donner des définitions tout à fait rigoureuses (pour cela je laisse au lecteur le soin de se référer aux ouvrages appropriés), mais de donner une idée sur ce que sont ces objets mathématiques. La première section de ce chapitre est consacrée au rôle de la topologie algébrique en théorie des champs, la seconde aux objets géométriques qui vont être manipulés et la troisième à l'utilité de ces outils en contrôle quantique.

Avant d'entrer dans le cœur du sujet, un point sur les notations concernant les formes différentielles est nécessaire. $\Omega^n(M, \mathfrak{g})$ désigne l'ensemble des formes différentielles de la variété M à valeurs dans \mathfrak{g} (corps, espace vectoriel, algèbre), avec en particulier $\Omega^n(M, \mathbb{R}) \equiv \Omega^n M$. Ainsi on a $\Omega^0 M = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ (fonctions \mathcal{C}^∞ -différentiables de M), $\Omega^1 M = \{x \mapsto \alpha_\mu(x) dx^\mu, \alpha_\mu \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})\}$, $\Omega^2 M = \{x \mapsto \alpha_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu, \alpha_{\mu\nu} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})\}$, etc. dx^μ désigne un élément infinitésimal de chemin orienté sur M , $dx^\mu \wedge dx^\nu$ désigne un élément infinitésimal de surface orientée sur M ($dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$), $dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho$ désigne un élément infinitésimal de volume orienté dans M , etc. Dans \mathbb{R}^3 , à un champ de vecteurs \vec{E} , à un champ de pseudovecteurs¹ \vec{B} , et à un champ pseudoscalaire² $\hat{\rho}$, on associe des formes différentielles $A = \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \in \Omega^1 \mathbb{R}^3$, $B = \vec{B} \cdot d\vec{S} \in \Omega^2 \mathbb{R}^3$ et $\rho = \hat{\rho} d\tau \in \Omega^3 \mathbb{R}^3$ (avec $d\vec{\ell} = dx^i \vec{e}_i$, $d\vec{S} = \epsilon_{ij} dx^i \wedge dx^j \vec{e}_k$, $d\tau = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ étant les vecteurs unitaires associés au système de coordonnées (x^1, x^2, x^3)). On remarquera que dans cette représentation en formes différentielles, les opérateurs vectoriels se traduisent par l'action de la différentielle : $\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} = df$ ($f \in \Omega^0 \mathbb{R}^3$), $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = dA$ et $\overrightarrow{\text{div}} \vec{B} d\tau = dB$.

2.1 Quelques aspects de la cohomologie de Deligne

2.1.1 Quelques mots sur la géométrie et la topologie algébrique

La géométrie est la science qui étudie la "forme" des objets. Les objets ordinaires que l'on peut considérer (courbes, surfaces, espaces) sont désignés sous le terme de *variétés*. L'étude des propriétés locales des variétés (continuité, degré de différentiabilité – texture, rugosité –) fait l'objet de la topologie

1. Un champ de pseudovecteurs est un champ à valeurs vectorielles invariant sous la symétrie miroir \mathcal{P} (à contrario d'un champ de vecteurs qui s'inverse sous cette symétrie).

2. Un champ pseudoscalaire est un champ à valeurs scalaires qui s'inverse sous la symétrie miroir \mathcal{P} (à contrario d'un champ scalaire qui est invariant sous cette symétrie).

générale. L'étude de la forme globale des variétés indépendamment des proportions de celles-ci (donc en tant qu'objets déformables à volonté tant que l'on ne le déchire ni ne le plie) fait l'objet de la topologie géométrique. Enfin l'étude des proportions d'une variété (la mesure des longueurs, des volumes sur une variété) fait l'objet de la géométrie Riemannienne (ou de son équivalent sur des variétés complexes, la géométrie Kählerienne). Même si les trois aspects ne sont pas indépendants, nous nous intéressons ici à la topologie géométrique, c'est à dire à la forme générale des variétés indépendamment de toutes mesures métriques. Deux variétés sont équivalentes du point de vue de la topologie géométrique, si l'on peut déformer l'une en l'autre par une application continue (donc sans déchirer ni plier). On dit alors que les deux variétés sont homotopes l'une à l'autre. Il vient qu'il peut être intéressant de classifier les variétés en fonction de leur homotopie, par exemple en regroupant les sphères avec les patatoïdes, ou les tores avec les tasses à café (ou tout objet avec une hanse). On pourrait aussi vouloir que cette classification soit équipée d'opérations reflétant les constructions géométriques telles que coller une variété sur une autre, ou inverser l'orientation d'une variété. C'est l'un des buts de la topologie algébrique, traduire la topologie géométrique en termes purement algébriques et plus particulièrement sous la forme de groupes dont les éléments seront les classes, le produit (la loi de composition interne) traduira le collement, et le passage à l'inverse traduira l'inversion de l'orientation. Les groupes en question sont appelés groupes d'homotopie de la variété. Par exemple $\pi^1(M)$ décrit les classes d'homotopie des chemins fermés sur M (deux chemins sur M sont homotopes si l'on peut déformer continûment l'un dans l'autre en restant sur M), $\pi^2(M)$ décrit les classes d'homotopie des surfaces fermées de M homéomorphes³ à des sphères, etc. La topologie algébrique permet également de traduire d'autres propriétés des variétés issues de la topologie générale ou de la géométrie topologique (groupes d'homologie et de cohomologie de de Rham pour les propriétés d'intégration et de différentiation, groupe de cohomologie simpliciale pour les propriétés de discrétisation triangulaire, etc...). L'autre but de la topologie algébrique est de faire le lien entre la topologie générale des variétés (propriétés locales) et la topologie géométrique (forme globale), en particulier en étudiant la manière de recouvrir une variété par un bon ensemble d'ouverts⁴ (groupe de cohomologie de Čech). Je ne rentrerai pas dans tous ces détails ici.

2.1.2 Idée de base de la cohomologie de Deligne

La cohomologie de Deligne est l'équivalent pour les théories de champs de ce qu'est l'homotopie pour les variétés. Elle a pour but d'étudier (de façon algébrique) les formes générales des théories de champs indépendamment de "toute mesure métrique" c'est à dire indépendamment de tout choix de densité de Lagrangien. Avant de donner des idées générales, considérons l'exemple de l'électromagnétisme. Considérons un physicien qui fait une expérience d'électrostatique. Comme le potentiel est défini à une constante près, il fait dans son laboratoire un choix de jauge arbitraire. Notons U^α le voisinage de son laboratoire. Supposons qu'un autre physicien fasse une autre expérience d'électrostatique, et fixe donc un choix de jauge dans son propre laboratoire. Notons U^β le voisinage de ce second laboratoire. Il n'y a pas de raison pour que les deux choix arbitraires soient les mêmes, on doit donc considérer V^α le choix de potentiel du premier physicien et V^β celui du second. Supposons que les deux voisinages aient une petite région commune $U^\alpha \cap U^\beta$. Alors $\forall x \in U^\alpha \cap U^\beta$ on a

$$E = -dV^\alpha = -dV^\beta$$

$$V^\beta - V^\alpha = \kappa^{\alpha\beta}$$

où $\kappa^{\alpha\beta}$ est une constante, et $E = \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \in \Omega^1\mathbb{R}^3$ le champ électrique. Ces dernières équations sont un point important des théories de jauge. Le potentiel électrostatique n'est défini que localement (pour

3. en bijection continue

4. par un bon recouvrement d'ouverts, on entend des ouverts simplement connexes (d'un seul tenant et sans trou), dont toute intersection forme un ouvert simplement connexe.

des voisinages, encore appelés cartes locales de \mathbb{R}^3) alors que le champ électrostatique est bien défini globalement. Si l'on considère trois cartes, on voit que l'on doit avoir

$$\kappa^{\beta\gamma} - \kappa^{\alpha\gamma} + \kappa^{\alpha\beta} = 0$$

dite condition de cocycle. On peut étendre une des définitions locales du potentiel aux deux autres cartes (grâce à la relation précédente). Finalement, en regroupant les cartes, il est possible de s'accorder sur le choix de jauge dans tout \mathbb{R}^3 (et ainsi définir un potentiel global). Mais ce n'est pas toujours le cas.

Considérons une boucle \mathcal{C} fixe dans l'espace parcourue par un courant I . On ne peut pas définir simplement un potentiel scalaire magnétique Υ tel que $H = -d\Upsilon$ avec $H = \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C})$ l'excitation magnétique, car alors $dH = -d^2\Upsilon \neq j$ (avec la distribution de courant $j = I\delta_{\mathcal{C}}(x)ds$ où $\delta_{\mathcal{C}}$ est la distribution de Dirac associée à \mathcal{C} et s est une coordonnée curviligne de \mathcal{C}). Néanmoins, de par la loi de Biot et Savart, on a

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{\ell}' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

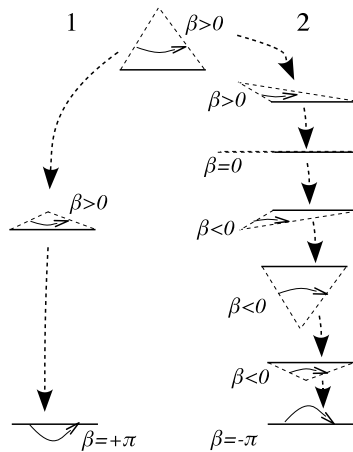
Avec un peu de calculs on montre que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{\ell}' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} &= -\overrightarrow{\text{grad}} \iint_S \frac{d\vec{S}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}}\Omega(\vec{r}) \end{aligned}$$

où $\Omega(\vec{r})$ est l'angle solide sous lequel on voit la boucle de courant depuis le point \vec{r} ($\mathcal{C} = \partial S$)⁵. On peut donc écrire que

$$H = -\frac{I}{4\pi}d\Omega$$

Mais il faut noter que Ω est une fonction multivaluée. Pour simplifier prenons l'exemple de l'angle β sous lequel on voit un segment dans le plan, en changeant le point de vue suivant deux chemins menant au même point.



Entre les deux chemins, on a un écart de 2π sur la valeur de l'angle β . Avec un angle solide dans l'espace, on aurait un écart de 4π . Pour introduire un potentiel scalaire magnétique, il faut donc considérer au moins quatre cartes locales autour de la boucle \mathcal{C} . U^α comme un pseudocylindre au dessus de \mathcal{C} , U^β comme le pseudocylindre en dessous de \mathcal{C} et U^γ, U^δ comme des zones entourant le cylindre. On définit alors $\Upsilon^\alpha = \frac{I}{4\pi}\Omega|_{U^\alpha}$ (restreint à une carte, l'angle solide est une fonction monovaluée), avec

$$H = -d\Upsilon^\alpha$$

5. ∂S désigne le bord de S .

et aux intersections

$$\Upsilon^\beta - \Upsilon^\alpha = \kappa^{\alpha\beta} = I$$

$$\Upsilon^\gamma - \Upsilon^\alpha = \kappa^{\alpha\gamma} = 0$$

$$\Upsilon^\gamma - \Upsilon^\beta = \kappa^{\beta\gamma} = 0$$

Cette fois on ne peut pas faire un choix de jauge qui annule les κ car

$$\kappa^{\beta\gamma} - \kappa^{\alpha\gamma} + \kappa^{\alpha\beta} = I \neq 0$$

Néanmoins, la condition de cocycle est toujours vérifiée car $U^\alpha \cap U^\beta \cap U^\gamma = \emptyset$ (il n'y a pas de point commun à ces trois cartes, exception faite de la boucle de courant elle-même mais où les champs ne sont pas définis). La relation précédente n'a donc pas de sens géométrique et n'exprime que le fait que l'on ne peut pas étendre le choix de jauge à tout l'espace.

La théorie de champs caractérisant le champ électrostatique ou l'excitation magnétique est donc caractérisée par un potentiel $\{V^\alpha\}_\alpha$, défini localement (par chaque ouvert U^α) à une constante près (le changement de jauge $V^\alpha \rightarrow V^\alpha + k^\alpha$, k^α étant une constante, ne modifie pas la physique de la théorie). Le potentiel permet de définir globalement un champ $E = -dV^\alpha$, et des constantes de transition entre deux ouverts $\kappa^{\alpha\beta} \propto V^\beta - V^\alpha$ satisfaisant la condition de cocycle. Les changements de jauge et les changements de système de cartes locales sont pour les théories de champs ce que sont les déformations continues pour les variétés. Ainsi la classe de cohomologie de Deligne associée à $\{V^\alpha\}_\alpha$ est $[V]_{\mathcal{D}} = \{V^\alpha + k^\alpha; \forall k^\alpha \in \mathbb{R}, \forall \{U^\alpha\}_\alpha\}$. On peut distinguer deux cas particuliers, lorsque $\forall \alpha, \beta, \kappa^{\alpha\beta} = 0$ aux changements de jauge près, $[V]_{\mathcal{D}}$ est alors dite *triviale*; et lorsque $E = -dV = 0$, $[V]_{\mathcal{D}}$ est alors dite *plate*.

Mais toute théorie de champs ne rentre pas dans le cadre ci-dessus. Par exemple pour le champ magnétique $B = \overset{\curvearrowright}{B} \cdot d\overset{\curvearrowright}{S} \in \Omega^2\mathbb{R}$, on a

$$B = dA^\alpha$$

et à l'intersection de deux cartes

$$A^\beta - A^\alpha = d\chi^{\alpha\beta}$$

où $\chi^{\alpha\beta} \in \Omega^0(U^\alpha \cap U^\beta)$. La condition de cohérence entre trois cartes impose seulement que

$$\chi^{\beta\gamma} - \chi^{\alpha\gamma} + \chi^{\alpha\beta} = z^{\alpha\beta\gamma}$$

avec $z^{\alpha\beta\gamma}$ une constante sur $U^\alpha \cap U^\beta \cap U^\gamma$ ($dz^{\alpha\beta\gamma} = 0$). Comme dans le cas du champ électrostatique, on peut choisir les conventions de jauge telles que $z^{\alpha\beta\gamma} = 0$, et faire en sorte d'étendre l'une des conventions aux trois cartes, puis à tout l'espace. De même, avec l'excitation électrique $D = \overset{\curvearrowright}{D} \cdot d\overset{\curvearrowright}{S} \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ en présence d'une charge électrique ponctuelle q en 0, avec U^N une carte pour la partie nord des coordonnées sphériques autour 0 et U^S pour la partie sud (les deux cartes se recouvrant légèrement à l'équateur), on a

$$C^N = \frac{q}{4\pi}(1 - \cos\theta)d\varphi$$

$$C^S = -\frac{q}{4\pi}(1 + \cos\theta)d\varphi$$

où θ est la colatitude et φ la longitude. On a alors

$$D = dC^a = \frac{q}{4\pi} \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$$

En utilisant le fait que $d\vec{\ell} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$, on retrouve bien

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

et à l'intersection

$$C^S - C^N = -\frac{q}{2\pi}d\varphi = d\chi^{NS}$$

On aurait donc $\chi^{NS} = -\frac{q}{2\pi}\varphi$, mais cette fonction est multivaluée, en effet les points x_{gw} se trouvant dans le plan équatorial et dans le plan du méridien fondamental ont deux longitudes $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$. Ainsi on peut avoir $\chi^{NS}(x_{gw}) = 0$ ou $\chi^{NS}(x_{gw}) = -q$. Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de scinder les cartes. On considère U^α la carte locale essentiellement dans le quart nord est, U^β dans la quart nord ouest ($U^\alpha \cup U^\beta = U^N$), U^γ dans le quart sud est et U^δ dans le quart sud ouest ($U^\gamma \cup U^\delta = U^S$). On a alors $\chi^{\alpha\gamma} = -\frac{q}{2\pi}\varphi|_{U^\alpha \cap U^\gamma}$ et $\chi^{\alpha\beta} = 0$ avec

$$D = dC^\alpha$$

et aux intersections

$$C^\beta - C^\alpha = d\chi^{\alpha\beta}$$

$$C^\gamma - C^\alpha = d\chi^{\alpha\gamma}$$

et

$$\chi^{\beta\gamma} - \chi^{\alpha\gamma} + \chi^{\alpha\beta} = -q$$

On notera que compte-tenu de la quantification des charges électriques, $-q = z^{\alpha\beta\gamma}e$ avec e la charge élémentaire et $z^{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{Z}$.

Il vient que la classe de cohomologie de Deligne pour ce type de théorie de jauge est de la forme $[\chi, A]_{\mathcal{D}} = \{(\chi^{\alpha\beta} + \zeta^\beta - \zeta^\alpha, A^\alpha + d\zeta^\alpha), \forall \zeta^\alpha \in \Omega^0 U^\alpha, \forall \{U^\alpha\}_\alpha\}$. Le potentiel local définit globalement un champ appelé courbure $F = dA^\alpha$ et les fonctions de transition sur les intersections de deux cartes définissent des constantes de transition sur les intersections de trois cartes $z^{\alpha\beta\gamma} \propto \chi^{\beta\gamma} - \chi^{\alpha\gamma} + \chi^{\alpha\beta}$ satisfaisant la condition de cocycle à l'intersection de quatre cartes. Enfin le potentiel et les fonctions de transition sont reliés par $A^\beta - A^\alpha = d\chi^{\alpha\beta}$. On dira à nouveau que $[\chi, A]_{\mathcal{D}}$ est triviale si $z^{\alpha\beta\gamma} = 0$ aux changements de jauge près et qu'elle est plate si $B = 0$.

Ce deuxième cas semble plus complexe que le premier (il y a plus de champs impliqués). Le premier exemple (champ électrostatique et excitation magnétique) est dit de degré de Deligne 1, le second (champ magnétique et excitation électrique) est dit de degré 2.

2.1.3 Sur la cohomologie de Deligne

On voit une incrémentation de la complexité de la théorie des champs dans le paragraphe précédent. On peut alors donner une idée générale des différentes topologies. Soit M une variété sur laquelle on décrit les champs. On note $H_{\mathcal{D}}^n M$ le groupe de cohomologie de Deligne de degré n de la variété M , c'est à dire l'ensemble des classes de Deligne de degré n définies comme suit :

- $[V]_{\mathcal{D}} = \{V^\alpha + k^\alpha; \forall k^\alpha \in \mathbb{R}, \forall \{U^\alpha\}_\alpha\} \in H_{\mathcal{D}}^1 M$ avec

$$\begin{aligned} \kappa^{\alpha\beta} &\in \mathbb{R} & \kappa^{\beta\gamma} - \kappa^{\alpha\gamma} + \kappa^{\alpha\beta} &= 0 \\ V^\alpha &\in \Omega^0 U^\alpha & V^\beta - V^\alpha &\propto \kappa^{\alpha\beta} \\ E &\in \Omega^1 M & E &= -dV^\alpha \\ & & dE &= 0 \end{aligned}$$

κ étant appelée constante de transition, V 0-potentiel et E champ.

- $[\chi, A]_{\mathcal{D}} = \{(\chi^{\alpha\beta} + \zeta^{\beta} - \zeta^{\alpha}, A^{\alpha} + d\zeta^{\alpha}), \forall \zeta^{\alpha} \in \Omega^0 U^{\alpha}, \forall \{U^{\alpha}\}_{\alpha}\} \in H_{\mathcal{D}}^2 M$ avec

$$\begin{aligned} z^{\alpha\beta\gamma} &\in \mathbb{R} & z^{\beta\gamma\delta} - z^{\alpha\gamma\delta} + z^{\alpha\beta\delta} - z^{\alpha\beta\gamma} &= 0 \\ \chi^{\alpha\beta} &\in \Omega^0(U^{\alpha} \cap U^{\beta}) & \chi^{\beta\gamma} - \chi^{\alpha\gamma} + \chi^{\alpha\beta} &\propto z^{\alpha\beta\gamma} \\ A^{\alpha} &\in \Omega^1 U^{\alpha} & A^{\beta} - A^{\alpha} &= d\chi^{\alpha\beta} \\ F &\in \Omega^2 M & F &= dA^{\alpha} \\ & & dF &= 0 \end{aligned}$$

avec z appelée constante de transition, χ fonction de transition, A potentiel et F courbure.

- $[\xi, A, B]_{\mathcal{D}} = \{(\xi^{\alpha\beta\gamma} + \zeta^{\beta\gamma} - \zeta^{\alpha\gamma} + \zeta^{\alpha\beta}, A^{\alpha\beta} - d\zeta^{\alpha\beta} + k^{\beta} - k^{\alpha}, B^{\alpha} + dk^{\alpha}); \forall \zeta^{\alpha\beta} \in \Omega^0(U^{\alpha} \cap U^{\beta}), \forall k^{\alpha} \in \Omega^1 U^{\alpha}, \forall \{U^{\alpha}\}_{\alpha}\} \in H_{\mathcal{D}}^3 M$ avec

$$\begin{aligned} w^{\alpha\beta\gamma\delta} &\in \mathbb{R} & w^{\beta\gamma\delta\zeta} - w^{\alpha\gamma\delta\zeta} + w^{\alpha\beta\delta\zeta} - w^{\alpha\beta\gamma\zeta} + w^{\alpha\beta\gamma\delta} &= 0 \\ \xi^{\alpha\beta\gamma} &\in \Omega^0(U^{\alpha} \cap U^{\beta} \cap U^{\gamma}) & \xi^{\beta\gamma\delta} - \xi^{\alpha\gamma\delta} + \xi^{\alpha\beta\delta} - \xi^{\alpha\beta\gamma} &\propto w^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ A^{\alpha\beta} &\in \Omega^1(U^{\alpha} \cap U^{\beta}) & A^{\beta\gamma} - A^{\alpha\gamma} + A^{\alpha\beta} &= -d\xi^{\alpha\beta\gamma} \\ B^{\alpha} &\in \Omega^2 U^{\alpha} & B^{\beta} - B^{\alpha} &= dA^{\alpha\beta} \\ H &\in \Omega^3 M & H &= dB^{\alpha} \\ & & dH &= 0 \end{aligned}$$

avec w appelée constante de transition, ξ fonction de 2-transition, A potentiel-transformation, B cambrure et H 2-courbure.

La loi de groupe de $H_{\mathcal{D}}^n M$ (qui est toujours abélien) est induite par l'additivité des champs :

$$\forall [A_1, \dots, A_n]_{\mathcal{D}}, [B_1, \dots, B_n]_{\mathcal{D}} \in H_{\mathcal{D}}^n M, [A_1, \dots, A_n]_{\mathcal{D}} + [B_1, \dots, B_n]_{\mathcal{D}} = [A_1 + B_1, \dots, A_n + B_n]_{\mathcal{D}}.$$

Le passage d'un représentant d'une classe de Deligne $(A_1, \dots, A_n) \in [A_1, \dots, A_n]$ à un autre $(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) \in [A_1, \dots, A_n]$ (avec $\tilde{A}_n^{\alpha} = A_n^{\alpha} + dk^{\alpha}$, $\tilde{A}_{n-1}^{\alpha\beta} = A_{n-1}^{\alpha\beta} - d\zeta^{\alpha\beta} + k^{\beta} - k^{\alpha}$, etc) est appelé changement (ou transformation) de jauge⁶. Par définition une classe de Deligne est un invariant de jauge, tout comme le champ global (la courbure) et les constantes de transition qu'elle définit.

Dans la plupart des cas, les constantes de transition prennent en réalité des valeurs dans \mathbb{Z} .

On peut considérer que la complexité de la théorie des champs dépend de son degré de Deligne (et de savoir si elle est ou non triviale). Mais nous n'avons considéré ici que les théories de jauge classiques et abéliennes. Dans une théorie de jauge non-abélienne, les champs sont à valeurs matricielles (ou plus généralement dans une algèbre de Lie), ce qui induit que les composantes des champs ne commutent pas (par exemple $A \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$, $A = A_{\mu} dx^{\mu}$ et $[A_{\mu}, A_{\nu}] \neq 0$). Les formules reliant les champs doivent alors être modifiées (par exemple $B = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ avec $\frac{1}{2}[A, A] = A \wedge A = \frac{1}{2}[A_{\mu}, A_{\nu}] dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$), et à partir du degré 3 de nouveaux champs spécifiques au cas non-abélien apparaissent en plus. On ne donnera pas ici les différentes formules pour les théories de jauges non-abéliennes, on pourra les trouver dans différentes publications. Enfin pour les théories de jauge quantiques, les différents champs doivent subir l'opération de seconde quantification, transformant les champs en opérateurs d'une algèbre CCR⁷ (c'est à dire décrit par des opérateurs création et annihilation bosoniques).

6. Les formules de la cohomologie de Deligne peuvent être formulées à l'aide de la différentielle de Deligne définie par $\mathcal{D}\omega = \delta\omega \oplus (-1)^{\deg(\omega)} d\omega$ où δ est la dérivation discrète par rapport aux indices de cartes $((\delta\omega)^{\alpha\beta} = \omega^{\beta} - \omega^{\alpha}, (\delta\omega)^{\alpha\beta\gamma} = \omega^{\beta\gamma} - \omega^{\alpha\gamma} + \omega^{\alpha\beta}, \dots)$. $\mathcal{D}^2 = 0$ et par conséquent les classes de Deligne sont définies par $[A_1, \dots, A_n]_{\mathcal{D}} = \{A_1 \oplus \dots \oplus A_n \oplus \mathcal{D}(\zeta_1 \oplus \dots \oplus \zeta_{n-1}), \forall \zeta_1 \oplus \dots \oplus \zeta_{n-1}\}$, avec $\mathcal{D}(A_1 \oplus \dots \oplus A_n) = (z, F)$ et $\mathcal{D}(z, F) = 0$.

7. Canonical Commutation Relation

2.1.4 Sur l'interprétation physique des classes de Deligne : l'exemple de l'effet Aharonov-Bohm

La question des classes de Deligne est liée au problème ontologique du porteur du sens physique dans une théorie de champs. Reprenons l'exemple du magnétisme. Nous avons deux champs pour décrire le magnétisme, le potentiel-vecteur $A \in \Omega^1 M$ et le champ magnétique $B \in \Omega^2 M$. Quel est le porteur de la "réalité" physique ? La réponse "traditionnelle" est qu'il s'agit de B car il est défini de manière univoque (puisque'il est invariant de jauge et indépendant du choix du recouvrement d'ouverts), alors que A est soumis au choix de jauge, $\tilde{A} = A + d\zeta$ définissant les mêmes observables physiques que A . Mais une situation, l'effet Aharonov-Bohm, montre que les choses ne sont pas aussi simples.

Supposons qu'une particule chargée se trouve dans un solide infini percé d'un tube infini de rayon a dans lequel on a installé un solénoïde infini parcouru par un courant I et comportant ν spires par unité de longueur. Le cylindre est ainsi une portion de l'espace interdite à la particule. On note z l'axe du cylindre et (x, y) les coordonnées dans le plan perpendiculaire au cylindre. Le problème étant symétrique par translation suivant z , les champs ne vont pas dépendre de z . De plus le problème étant invariant par rotation autour de z , les champs ne dépendent que de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les plans (x, y) étant plans de symétrie, et le champ magnétique étant orthogonal à tout plan de symétrie, on a

$$B = B(r)dx \wedge dy$$

Par application du théorème d'Ampère :

$$B = \begin{cases} \mu_0 \nu I dx \wedge dy & \text{si } r < a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

et

$$A = \begin{cases} \frac{\mu_0 \nu I r^2}{2} d\theta & \text{si } r < a \\ \frac{\mu_0 \nu I a^2}{2} d\theta & \text{si } r > a \end{cases}$$

($dr \wedge r d\theta = dx \wedge dy$).

Supposons que l'on astreint la particule à suivre un cercle C dans le plan (x, y) de rayon $R > a$ centré sur l'axe du tube. Alors après le déplacement, la fonction d'onde de la particule devient

$$\begin{aligned} \psi'(x, y, z) &= e^{i\hbar^{-1}q \oint_C A} \psi(x, y, z) \\ &= e^{i\hbar^{-1}q \mu_0 \nu I \pi a^2} \psi(x, y, z) \end{aligned}$$

La phase acquise par la fonction d'onde au cours du déplacement est mesurable, il suffit de faire interférer le paquet d'ondes déplacé avec un paquet d'ondes resté inchangé :

$$\psi_{tot}(x, y, z) = \frac{\psi(x, y, z) + \psi'(x, y, z)}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi_{tot}(x, y, z)|^2 = |\psi(x, y, z)|^2 \frac{1 + \cos(\hbar^{-1}q \oint_C A)}{2}$$

La particule voit tout au long du chemin un champ magnétique nul, et pourtant elle subit un effet magnétique visible dans sa phase, c'est l'effet Aharonov-Bohm [Nak90].

L'effet Aharonov-Bohm induit un questionnement difficile sur l'interprétation ontologique de l'électromagnétisme, c'est à dire sur la recherche de l'entité porteuse du sens physique, de l'objet fondamental de l'électromagnétisme, de l'essence de la théorie physique [Hea01]. Comme on l'a déjà évoqué le champ magnétique est généralement considéré comme la bonne entité physique, car contrairement au potentiel,

il est défini de manière univoque. Le problème de cette interprétation est que l'électron ne voit jamais qu'un champ magnétique nul. Si le champ magnétique B est porteur du sens physique, la logique serait qu'aucun effet magnétique ne serait mesurable sur une particule qui ne rencontre que des champs nuls. Or ce n'est pas le cas. Si l'on admet que le potentiel A est le porteur du sens physique, alors l'interprétation est cohérente avec l'effet Aharonov-Bohm, sauf que la définition de l'objet fondamental est soumise à un choix arbitraire, ce qui n'est pas très satisfaisant. Une autre possibilité est de considérer la boucle de Wilson $W(\mathcal{C}) = e^{i\hbar^{-1}q \oint_{\mathcal{C}} A}$ comme la bonne entité physique. Ce serait cohérent avec l'effet Aharonov-Bohm (c'est l'entité qui apparaît explicitement dans l'effet), et cela nous donne un objet défini de manière univoque. Le défaut majeur de ce point de vue est que cet objet est non-local (car définie sur un chemin et non en un point). Or comme la théorie des champs avait été précisément introduite pour donner une interprétation locale des interactions à distance, on a là un retour en arrière.

Une possibilité serait de considérer la classe de cohomologie de Deligne $[0, A]_{\mathcal{D}} \in H_{\mathcal{D}}^2(\mathbb{R}^2 \setminus D_a)$ comme la bonne entité physique (D_a étant le disque section du solénoïde). Elle permet d'interpréter l'effet Aharonov-Bohm ; elle est locale et est définie de manière univoque. Le seul problème est que ce n'est pas à proprement parlé un champ, et n'est donc pas une entité "concrète". On pourrait presque la considérer comme n'étant pas une interprétation réaliste objectiviste, mais comme une interprétation réaliste pythagoricienne tant $[0, A]_{\mathcal{D}}$ est liée à la symétrie de jauge. On notera néanmoins que l'on a déjà l'habitude de considérer des classes d'équivalence comme des objets physiques en mécanique quantique. L'état d'un système est en effet la classe $[\psi] = \{e^{i\phi}\psi, \phi \in \mathbb{R}\}$ puisque la phase n'a pas de sens physique (seule la différence de phase à un sens). Plus encore, lorsque l'on dit que ψ est une fonction de carré sommable, on oublie que l'on considère en fait non pas ψ comme état quantique mais la classe des fonctions presque partout égales à ψ (si l'on change la valeur ψ en des points isolés⁸ on ne change pas les probabilités de présence). Il en est de même pour les densités de probabilité en général. Ces exemples supposent tout de même que l'on attribue à la fonction d'onde en mécanique quantique ou aux densités de probabilité en général, un caractère ontologique ; ce qui ne va pas de soi.

2.1.5 Autres exemples physiques

Outre l'électromagnétisme, la gravitation donne des exemples de théorie de champs. Le champ de gravité Newtonienne définit une théorie de jauge abélienne classique de degré de Deligne 1 triviale. Si l'on ajoute les changements de référentiels non-Galiléens, le vecteur rotation instantané joue le rôle de potentiel d'une théorie de jauge abélienne classique de degré de Deligne 2 triviale. Pour la relativité générale, les choses sont plus complexes. Dans le formalisme Riemannien usuel, il n'y a pas de champs de gravité mais seulement la géométrie de l'espace-temps décrite par le couple $(g_{\mu\nu}, \Gamma^{\mu}_{\nu\rho})$ où $g_{\mu\nu}$ est la métrique (mesure des longueurs) et $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ sont les symboles de Christoffel (mesure de la rotation instantanée des vecteurs induite par la courbure de l'espace-temps). Mais il existe un autre formalisme équivalent, sans géométrie métrique de l'espace qui est remplacée par des champs $(e_{\mu}^A, \omega_{\mu}^{AB})$; les tétrades (ou vierbeins) e_{μ}^A définis par $g_{\mu\nu} = e_{\mu}^A e_{\nu}^B \eta_{AB}$ (où η_{AB} est la métrique de Minkowski de l'espace-temps plat apparent d'un observateur localement Galiléen), et la connexion de Lorentz (ou spin-connexion) définie par $\omega_{\mu}^{AB} = e_{\nu}^A \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} e^{B\rho} + e_{\nu}^A \partial_{\mu} e^{B\nu}$. La connexion de Lorentz (qui est une sorte de champ "magnétique" gravitationnel induisant la mise en rotation de tous les moments cinétiques) définit une théorie de jauge non-abélienne classique de degré de Deligne 2 non-triviale. Si l'on ajoute les tétrades (qui forme la base de vecteurs d'un référentiel localement Galiléen idéal) il semble que l'on obtienne une théorie de jauge non-abélienne classique de degré de Deligne 3 non-triviale [BW15] (mais ce point ne fait pas l'objet d'un consensus, et le sens physique des classes de Deligne que l'on peut construire avec le couple $(e_{\mu}^A, \omega_{\mu}^{AB})$ n'est pas clair). On trouvera plus de détails sur le cas de la gravitation au chapitre 5.1.4. Un autre exemple de théorie de jauge abélienne classique de degré de Deligne 3 est l'électrodynamique 2-forme [HT86] qui est la version de l'électromagnétisme pour la théorie classique des cordes. Ainsi si l'on remplace les particules élémentaires ponctuelles par des cordes, deux potentiels électromagnétiques

8. ou sur un ensemble de mesure de Lebesgues nulle

sont nécessaires : $A \in \Omega^1 \mathbb{R}^3$ qui se couple avec les extrémités des cordes (et se comporte comme celui des particules ponctuelles), $B \in \Omega^2 \mathbb{R}^3$ qui se couple avec le corps des cordes.

2.2 Réalisations géométriques des classes de Deligne

2.2.1 Espaces fibrés et connexions

Les classes de Deligne définissent les “formes générales” des théories de champs, mais ces mêmes champs doivent être supportés par une variété (sur laquelle il sont définis) et par une structure supplémentaire associée à l’invariance de jauge. C’est ce point qui nous intéresse ici. Comparons l’invariance de jauge (telle qu’elle se définit dans les classes de Deligne) avec l’invariance de référentiel. Soit $v \in T_x M$ un vecteur tangent à la variété M au point x (M étant supposée Riemannienne ou Lorentzienne de métrique g) et $\|v\|^2 = g_{\mu\nu}(x)v^\mu v^\nu$ sa longueur carrée. Un changement de référentiel se présente comme une transformation Λ telle que $\forall v \in T_x M$, $\tilde{v}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu$ est tel que $\|\tilde{v}\|^2 = \|v\|^2 \iff g_{\rho\lambda} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\lambda{}_\nu = g_{\mu\nu}$. Cela implique que $\Lambda \in O(n, p)$ (matrices orthogonales $\Lambda g \Lambda^T = g$, avec $n + p = \dim M$ pour une métrique de signature (n, p) ⁹). Ce qui définit le changement de référentiel est donc un groupe de symétries locales (la symétrie est définie point par point $x \in M$: $\tilde{v}^\mu(x) = \Lambda(x)^\mu{}_\nu v^\nu(x)$), laissant invariante la longueur des vecteurs. Mais les changements de référentiel sont des symétries internes à la variété M , totalement définies par celle-ci. À l’inverse, l’invariance de jauge est manifeste d’une symétrie locale externe (une même variété peut être équipée de champs correspondant à des classes de Deligne différentes, de degrés différents). La structure géométrique supplémentaire dont il est question ici pour réaliser les classes de Deligne doit “internaliser” la symétrie externe de l’invariance de jauge.

Reprenons l’exemple de l’électromagnétisme avec l’équation de Schrödinger d’une particule de charge q et de masse m dans un champ électromagnétique.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}(x, t))^2 \psi(x, t) + qV(x, t)\psi(x, t)$$

avec $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R}^3, dx^1 dx^2 dx^3)$. $[0, A]_{\mathcal{D}} \in H^2 \mathbb{R}^4$ définit une classe de Deligne (avec $A = V(x, t)dt + \vec{A}(x, t) \cdot d\vec{\ell} \in \Omega^1 \mathbb{R}^4$ le quadri-potential électromagnétique). L’équation de Schrödinger est invariante sous le changement de jauge et de phase locale suivant :

$$\tilde{A}(x, t) = A(x, t) + qd\chi(x, t)$$

$$\tilde{\psi}(x, t) = e^{i\chi(x, t)} \psi(x, t)$$

pour $\chi \in \Omega^0 \mathbb{R}^4$. Il vient que le changement de jauge électromagnétique et le changement local de phase ne font qu’un, car c’est conjointement qu’ils laissent invariante l’équation de Schrödinger (la même remarque s’applique aux équations de Klein-Gordon et de Dirac). La symétrie de jauge porte donc sur les fonctions d’onde de l’espace-temps et non sur l’espace-temps lui-même (d’où le fait qu’il s’agit d’une symétrie externe à la variété espace-temps $M = \mathbb{R}^4$). Étant donné que les changements de jauge sont des changements de phase, le groupe de symétrie est ici $U(1) = \{e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}\}$. La généralisation non-abélienne de cet exemple est relativement aisée. Considérons un groupe de Lie G et \mathfrak{g} son algèbre de Lie (i.e., $X \in \mathfrak{g} \Rightarrow e^X \in G$) que nous pourrions assimiler ici pour simplifier à un groupe et une algèbre de matrices¹⁰. Pour une classe de Deligne de degré 2 $[g, A]$ avec $g^{\alpha\beta} \in \Omega^0(U^\alpha \cap U^\beta, G)$ et $A^\alpha \in \Omega^1(U^\alpha, \mathfrak{g})$, la transformation de jauge $\tilde{A}^\alpha = h^{\alpha-1} A^\alpha h^\alpha + h^{\alpha-1} dh^\alpha$ ($\tilde{g}^{\alpha\beta} = h^{\alpha-1} g^{\alpha\beta} h^\beta$)¹¹ avec $h^\alpha \in \Omega^0(U^\alpha, G)$ est associée à la “rotation” d’un spineur $\psi \in L^2(M, d\tau) \otimes \mathbb{C}^n$: $\tilde{\psi} = h^\alpha \psi$.

9. n valeurs propres de $g(x)$ sont strictement positives et p sont strictement négatives

10. exemple : $G = SU(n)$ est l’ensemble des matrices complexes d’ordre n unitaires de déterminant 1 et $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ est l’ensemble des matrices complexes d’ordre n anti-auto-adjointes et de trace nulle

11. par rapport au formalisme abélien, $g^{\alpha\beta} = e^{\chi^{\alpha\beta}}$

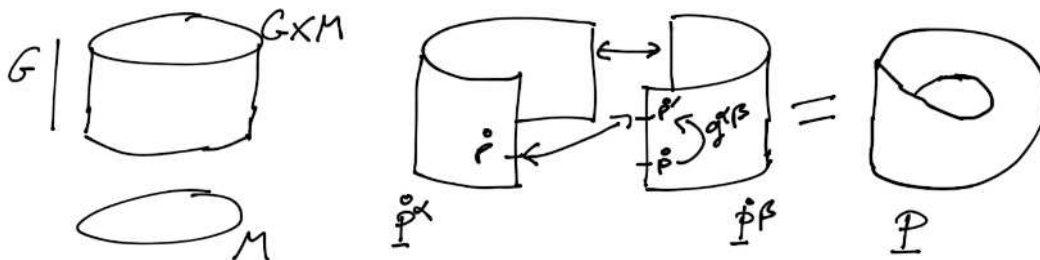
Pour "internaliser" la symétrie externe, on cherche donc un objet géométrique P tel que le groupe G puisse agir directement sur P tout en gardant l'aspect local (les changements de jauge sont dépendants du point x de M considéré), de sorte que tous les points de P associés à un point x soient reliables par un changement de jauge, et tels que les spineurs ψ apparaissent comme des "généralisations" de la notion de vecteurs tangents. Par formalisation de ces remarques, il doit exister une application surjective $\pi : P \rightarrow M$ (une projection) permettant de définir en quel point de la variété de base M (de l'espace-temps dans l'exemple de l'électromagnétisme) on se trouve, et une action de G sur P ($\forall g \in G, R(g) : P \rightarrow P$ que l'on notera simplement $\forall p \in P, R(g)p = pg$) telle que $\forall p \in P, \pi(pG) = \{\pi(p)\}$ et telle que l'action de G restreinte à $\pi^{-1}(x)$ ($\forall x \in M$) soit transitive ($\forall p, q \in \pi^{-1}(x), \exists g \in G$ tel que $q = pg$). On peut alors définir un objet $E = P \times_G \mathbb{C}^n = \{(pg^{-1}, gu)_{g \in G}, p \in P, u \in \mathbb{C}^n\}$ tel que ses sections ($\psi : M \rightarrow E$ telles que $\pi_E(\psi(x)) = \pi(p_{\psi(x)}) = x$ avec $\psi(x) = (p_{\psi(x)}g^{-1}, gu_{\psi(x)})_{g \in G}$) soient

les spineurs. Les définitions ainsi données sont celles pour $\begin{matrix} P \leftarrow G \\ \downarrow \\ M \end{matrix}$ d'un G -fibré principal, et pour E de

son fibré vectoriel associé (dans le cas de la symétrie interne, $\begin{matrix} P \leftarrow SO(n, p) \\ \downarrow \\ M \end{matrix}$ est appelé fibré des repères

et $E = P \times_{SO(n, p)} \mathbb{R}^{n+p} = TM$ fibré tangent de M). $\pi^{-1}(x) \subset P$ ($\forall x \in M$) est appelée fibre au dessus de x , et on remarquera que $\pi^{-1}(x) \simeq G$ (l'homéomorphisme étant au sens des variétés – en tant qu'objet géométrique –, $\pi^{-1}(x)$ n'hérite pas de la structure de groupe de G ; par exemple avec le cas de l'électromagnétisme, $\pi^{-1}(x) \simeq U(1)$ mais en voyant $U(1)$ comme un simple cercle et non comme un groupe avec une loi de multiplication interne). Le groupe de jauge¹² G est aussi appelé fibre type de P , alors que \mathbb{C}^n est la fibre type de E .

Tout cela ne dit néanmoins pas ce qu'est l'objet P . C'est dans la construction explicite de cet objet qu'interviennent les fonctions de transition de la classe de Deligne. Soit $\{U^\alpha\}_\alpha$ un bon recouvrement d'ouverts de M . Comme toutes les fibres sont homéomorphes à G , il suffit de "greffer" en chaque point x de U^α une copie de G (une copie au sens des variétés). On obtient alors $\dot{P}^\alpha = U^\alpha \times G$ avec π et l'action de groupe définis de manière évidente. \dot{P}^α est un morceau de P . Pour avoir P , il suffit maintenant de recoller les morceaux. La question est de savoir comment coller l'une sur l'autre les zones communes aux morceaux. C'est là qu'interviennent les fonctions de transition $g^{\alpha\beta}$. Le point $\dot{p} = (x, h) \in U^\alpha \times G$ doit être collé sur le point $\dot{p}' = (x, hg^{\alpha\beta}(x)) \in U^\beta \times G$ ($x \in U^\alpha \cap U^\beta$). Il n'y a pas de raison a priori pour que $(x, h) \in \dot{P}^\alpha$ soit toujours collé sur $(x, h) \in \dot{P}^\beta$, et lorsque c'est le cas à toutes intersections (toutes les fonctions de transition sont réduites à 1_G (élément neutre de G) aux changements de jauge près), alors on a simplement $P = M \times G$ comme le produit cartésien de la base et de la fibre type (on dit que le fibré est trivial).



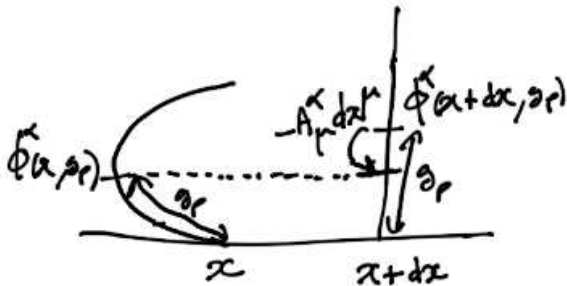
Néanmoins ce principe de recollement nécessite une transitivité, pour $x \in U^\alpha \cap U^\beta \cap U^\gamma$, si $\dot{p} \in \dot{P}^\alpha$ est collé sur $\dot{p}' \in \dot{P}^\beta$ et que $\dot{p}' \in \dot{P}^\beta$ est collé sur $\dot{p}'' \in \dot{P}^\gamma$, alors $\dot{p} \in \dot{P}^\alpha$ doit être collé sur $\dot{p}'' \in \dot{P}^\gamma$, ce qui implique que les fonctions de transition satisfassent la condition de cocycle :

$$g^{\alpha\beta}(x)g^{\beta\gamma}(x) = g^{\alpha\gamma}(x) \tag{2.1}$$

12. Nous adoptons ici la convention des physiciens à savoir appeler le groupe structural "groupe de jauge", alors que pour les mathématiciens ce terme désigne $\text{Aut}P$.

Une fois P construit, on retrouve les décompositions en morceaux à l'aide d'homéomorphismes appelés trivialisations locales, $\phi^\alpha : \pi^{-1}(U^\alpha) \rightarrow U^\alpha \times G$, telles que $\phi^\alpha(\phi^{\beta-1}(x, 1_G)) = (x, g^{\alpha\beta}(x))$ ($\forall x \in U^\alpha \cap U^\beta$). Lorsqu'un G -fibré principal s'avère être un simple produit cartésien, $P = M \times G$, c'est à dire lorsque les fonctions de transition de sa classe de Deligne de degré 2 sont toutes réduites (aux changements de jauge près) à 1_G , P est dit trivial en tant que fibré principal. Dans les classes de Deligne de degré 1, étant donné qu'il n'y a pas de fonctions de transition, le seul objet que l'on puisse construire est le produit cartésien de M par G . On voit donc que $[\Upsilon]_{\mathcal{D}} \in H_{\mathcal{D}}^1(M, G)$ et $[1_G, A]_{\mathcal{D}} \in H_{\mathcal{D}}^2(M, G)$ peuvent avoir la même réalisation géométrique.

Que définit le potentiel de jauge $A^\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ de la classe $[\chi, A]_{\mathcal{D}}$? Supposons que l'on se trouve en un point p de P sur la fibre au dessus de $x \in U^\alpha$. On désire "passer" sur la fibre "d'à côté" au dessus de $x + dx$. Sur quel point de P arrive t-on? Une réponse simple serait sur $\phi^{\alpha-1}(x + dx, g_p)$ avec $g_p \in G$ défini par $p = \phi^\alpha(x, g_p)$. Mais il n'y pas de raison à priori d'imposer qu'un déplacement infinitésimal horizontal n'engendre pas un décalage infinitésimal par rapport au marquage des fibres par la fonction de trivialisation locale. C'est le potentiel de jauge qui définit ce décalage. Lorsque l'on saute de $p = \phi^\alpha(x, g_p)$ vers la fibre au dessus $x + dx$, on atterrit en $\phi^{\alpha-1}(x + dx, g_p e^{-A_\mu^\alpha(x) dx^\mu})$.



Le choix d'un potentiel de jauge sur le fibré P est appelé une connexion de P . La connexion permet de définir le transport parallèle au dessus d'un chemin \mathcal{C} (paramétré par $[0, 1] \ni \tau \mapsto x(\tau) \in U^\alpha$) d'un point $p_0 \in \pi^{-1}(x(0))$, c'est à dire le passage de fibre en fibre au dessus de \mathcal{C} sans mouvements verticaux supplémentaires. Le point d'arrivée sera $p_1 = \phi^{\alpha-1}(x(1), g_{p_0} \mathbb{P} e^{-\int_{\mathcal{C}} A^\alpha})$. L'exponentielle ordonnée sur le chemin étant définie par $\mathbb{P} e^{-\int_{\mathcal{C}} A^\alpha} = U^\alpha(1, 0)$ avec $\frac{dU^\alpha(\tau, 0)}{d\tau} = -A_\mu^\alpha(x(\tau)) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} U^\alpha(\tau, 0)$ ($U^\alpha(0, 0) = 1_G$). Cette formule du transport parallèle doit être quelque modifiée à l'aide des fonctions de transition si le chemin \mathcal{C} traverse plusieurs ouverts (on ne la donnera pas ici). L'image de \mathcal{C} induite par le transport parallèle de p_0 , $\{p_\tau = \phi^{\alpha-1}(x(\tau), g_{p_0} \mathbb{P} e^{-\int_{\mathcal{C}:0 \rightarrow \tau} A^\alpha})\}_{\tau \in [0, 1]}$ est appelée relèvement horizontal de \mathcal{C} passant par p_0 . Enfin si l'on revient à la fibre de départ, c'est à dire si $x(1) = x(0)$ (\mathcal{C} est fermé), on ne revient pas forcément sur le point de départ : $p_1 = \phi^{\alpha-1}(x(1), g_{p_0} \mathbb{P} e^{-\oint_{\mathcal{C}} A^\alpha}) \neq p_0$. Dans ce cas $\text{Hol}(\mathcal{C}) = \mathbb{P} e^{-\oint_{\mathcal{C}} A^\alpha}$ est appelée holonomie de \mathcal{C} (dans l'exemple du magnétisme, l'holonomie d'un chemin fermé est appelée boucle de Wilson, voir par exemple la discussion sur l'effet Aharonov-Bohm¹³). La connexion d'un fibré principal est dite triviale si toute les holonomies sont réduites à 1_G . Dans le cas abélien avec M simplement connexe ($\pi^1(M) = \{0\}$), on a en utilisant le théorème de Stokes $e^{-\oint_{\mathcal{C}} A^\alpha} = e^{-\int_{\mathcal{S}} F}$ où $F = dA^\alpha$ est la courbure de la connexion et \mathcal{S} est une surface de M ayant \mathcal{C} comme bord ($\partial \mathcal{S} = \mathcal{C}$). Il vient que la connexion est triviale si et seulement si elle est plate $F = 0$. La remarque s'applique également dans le cas non-abélien (mais nécessite l'usage d'un théorème de Stokes non-abélien plus compliqué à utiliser). Par contre, si $\pi^1(M) \neq \{0\}$, tout chemin fermé \mathcal{C} ne supporte pas nécessairement une surface de M , et la connexion peut être non-triviale bien que plate (voir par exemple l'effet Aharonov-Bohm où $\pi^1(\mathbb{R}^2 \setminus D_a) = \mathbb{Z}$ (D_a est le disque section du solénoïde), l'entier de la classe d'homotopie d'un chemin comptant le nombre de tours orientés que fait le chemin autour du solénoïde).

On dit que $A^\alpha \in \Omega^1(U^\alpha, \mathfrak{g})$ est pur jauge si $\exists g^\alpha \in \Omega^0(U^\alpha, G)$ tel que $A^\alpha = g^{\alpha-1} dg^\alpha$ (ce qui induit

13. il arrive d'ailleurs que certains auteurs appellent boucle de Wilson toute holonomie quelque soit le contexte physique

immédiatement que la connexion est plate). Dans ce cas $\mathbb{P}e^{-\int_c A^\alpha} = g^\alpha(x(1))^{-1}g^\alpha(x(0))$.

De même pour une classe Deligne de degré 1 $[\Upsilon]_{\mathcal{D}} \in H_{\mathcal{D}}^1(M, G)$, le 0-potentiel définit une connexion, le transport parallèle de $(x(0), g) \in M \times G$ étant $(x(1), g\mathbb{P}e^{\int_c E}) = (x(1), g\Upsilon^\alpha(x(1))^{-1}\Upsilon^\alpha(x(0)))$ avec $E = -\Upsilon^{\alpha-1}d\Upsilon^\alpha$ (remarque : dans le formalisme abélien on a $V^\alpha = \ln \Upsilon^\alpha$). Le transport parallèle est donc défini par la différence de potentiel.

2.2.2 Les différentes constructions de fibrés catégoriques

Si l'on résume la discussion précédente, une classe de Deligne de degré 1 $[\Upsilon]_{\mathcal{D}} \in H_{\mathcal{D}}^1(M, G)$ se réalise géométriquement en le produit cartésien $M \times G$ équipé de la connexion définie par le champ $E = -\Upsilon^{\alpha-1}d\Upsilon^\alpha$; et une classe de Deligne de degré 2 $[g, A]_{\mathcal{D}} \in H_{\mathcal{D}}^2(M, G)$ se réalise géométriquement en

un fibré principal $\begin{array}{c} P \leftarrow G \\ \downarrow \\ M \end{array}$ construit par recollements définis par les fonctions de transition $g^{\alpha\beta}$ et équipé

d'une connexion définie par le potentiel A^α . Mais qu'en est-il en haut degré $[h, A, B] \in H_{\mathcal{D}}^3(M, H \rtimes G)$ (avec $h^{\alpha\beta\gamma} \in \Omega^0(U^\alpha \cap U^\beta \cap U^\gamma, H)$, $A^{\alpha\beta} \in \Omega^1(U^\alpha \cap U^\beta, \mathfrak{g})$ et $B^\alpha \in \Omega^2(U^\alpha, \mathfrak{h})$, H et G étant deux groupes de Lie tels qu'il existe un homomorphisme $t : H \rightarrow G$ permettant de définir l'action d'un élément de H sur G ($t(h)g$)? Le sens de la 2-fonction de transition $h^{\alpha\beta\gamma}$ est d'être une obstruction à la construction d'un fibré principal. Ainsi si l'on trouve des fonctions de transition $g^{\alpha\beta} \in \Omega^0(M, G)$, les 2-fonctions de transitions sont définies par

$$\forall x \in U^\alpha \cap U^\beta \cap U^\gamma, \quad t(h^{\alpha\beta\gamma}(x)) = g^{\alpha\beta}(x)g^{\beta\gamma}(x)g^{\alpha\gamma}(x)^{-1} \quad (2.2)$$

La condition de cocycle n'étant pas satisfaite, on ne peut pas recoller de manière cohérente les morceaux $\mathring{P}^\alpha = (U^\alpha, G)$ en une variété. Dans un premier temps on peut supposer que l'on peut trouver un

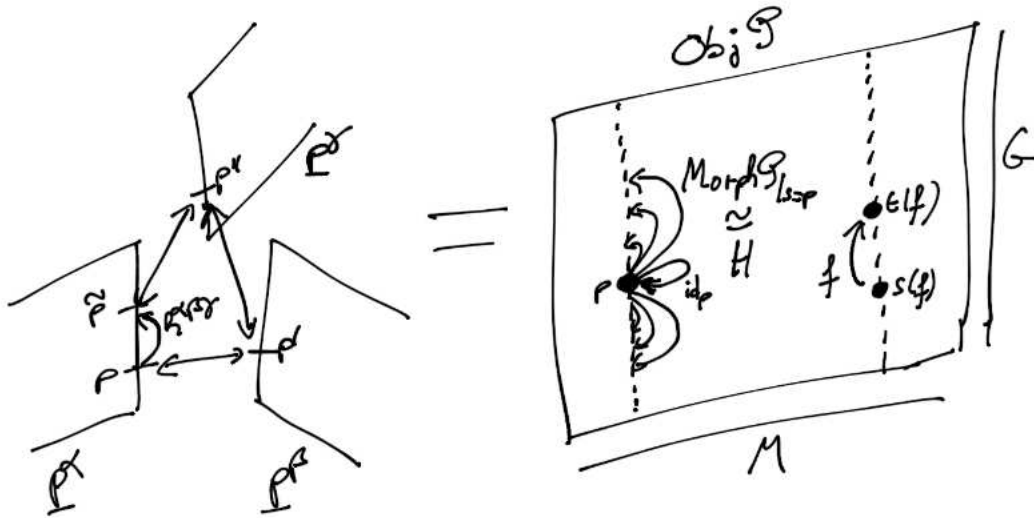
bon recouvrement d'ouverts tels que sur U^α on puisse construire un G -fibré principal $\begin{array}{c} P^\alpha \leftarrow G \\ \downarrow \\ U^\alpha \end{array}$ (non-

nécessairement trivial) en recollant les morceaux qui peuvent l'être (l'opération rendant plus grossier le recouvrement en regroupant les ouverts des parties recollables).

Dans un second temps on va chercher à rendre cohérent l'ensemble disparate de fibrés $\{P^\alpha\}_\alpha$. Si H et G sont tels que $t(H)$ est un sous-groupe normal de G (c'est à dire que $G/t(H) = \{t(H)g, g \in G\}$ forme un groupe de coensembles) alors il est clair que les fonctions de transition $\hat{g}^{\alpha\beta} = t(H)g^{\alpha\beta} \in \Omega^0(M, G/t(H))$ satisfont à la condition de cocycles et que les espaces fibrés $P^\alpha/t(H)$ peuvent être assemblés en un $G/t(H)$ -fibré principal unique assurant la cohérence d'ensemble (au sens faible car il n'est cohérent qu'après réduction des fibres $G \rightarrow G/t(H)$). La raison de l'introduction du second groupe H est ici évidente. Il sert à la réalisation de ce quotient nécessaire à au moins imposer une cohérence faible, si on laisse l'obstruction $t(h^{\alpha\beta\gamma})$ prendre ses valeurs dans tout G , il ne resterait "rien" après le quotient (pour être précis il ne resterait que le groupe trivial $\{1\}$).

Mais que forment $\{P^\alpha\}_\alpha$ puisqu'ils ne peuvent pas être assemblés en une unique variété? Considérons tout d'abord $\text{Obj}(\mathcal{P}) = \bigsqcup_\alpha P^\alpha$ (c'est à dire l'union disjointe extérieure des P_α – dit trivialement, on met juste les P_α les uns à côté des autres sans les assembler (c'est à dire sans la moindre structure topologique globale) –). Nous savons que sur une intersection triple, on peut avoir $p \in P^\alpha$, $p' \in P^\beta$ et $p'' \in P^\gamma$, tels que $\pi(p) = \pi(p') = \pi(p'')$, avec p "collé" sur p' , p' collé sur p'' mais sans que p et p'' soient collés l'un sur l'autre (à cause de la violation de la condition de cocycle). p'' est collé sur $\tilde{p} \in P^\alpha$ mais p et \tilde{p} sont associés par $\tilde{p} = t(h^{\alpha\beta\gamma})p$ ($p, \tilde{p} \in t(H)p$). On doit donc considérer à la fois les recollements et des "sauts" définis par H "rattrapant" l'impossibilité de faire un recollement global cohérent. Il est donc nécessaire de pouvoir considérer les possibles applications qui à p associent un autre point de $\text{Obj}(\mathcal{P})$ par l'action de H (l'ensemble des sauts possibles depuis p). Et de manière plus générale, s'il est nécessaire de le faire sur les triples intersections, il faudra aussi le faire partout pour rendre la construction indépendante du choix de recouvrement d'ouverts. On définit donc $\text{Morph}(\mathcal{P}) = H \times \text{Obj}(\mathcal{P})$ vu comme un ensemble

d'applications (de morphismes) tels que le point de départ de $(h, p) \in \text{Morph}(\mathcal{P})$ est $s(h, p) = p$ et le point d'arrivée est $t(h, p) = t(h)p$. Deux morphismes peuvent être composés si le point d'arrivée de l'un et le point de départ de l'autre $(h', t(h)p) \circ (h, p) = (h'h, p)$.



L'entité \mathcal{P} que définit $\{P^\alpha\}_\alpha$ n'est pas une variété, mais elle constituée de deux ensembles : $\text{Obj}(\mathcal{P})$ l'ensemble de ses objets, et $\text{Morph}(\mathcal{P})$ l'ensemble de ses morphismes dits aussi ses flèches. Elle est également équipée de deux applications $s, t : \text{Morph}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{P})$ appelées applications source et cible, d'une loi de composition \circ entre flèches composables, et d'une application $\text{id} : \text{Obj}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Morph}(\mathcal{P})$ ($\text{id}_p = (1_H, p)$) qui à un objet p associe sa flèche identité (le morphisme qui associe p à lui-même). En mathématique, l'entité \mathcal{P} porte le nom de catégorie. D'un point de vue géométrique, la catégorie \mathcal{P} est donc en quelque sorte une entité où il est naturel de pouvoir "sauter instantanément" d'un point à un autre via les flèches.

Les réalisations de classes de Deligne de degré 3 que nous venons de définir sont appelées "fibrés tordus". Il est à noter que ce n'est pas à proprement parler une définition de la catégorie \mathcal{P} mais une méthode de construction de celle-ci connaissant ses fonctions de 1-transition $g^{\alpha\beta}$ et de 2-transition $h^{\alpha\beta\gamma}$. Pour les fibrés principaux nous disposons aussi d'une définition directe (une projection de P vers M avec une action transitive sur les fibres de G) en plus d'une méthode de construction. Pour obtenir une définition directe, on trouve dans la littérature deux approches, qui toutes deux partent des fibrés principaux en les rendant "plus complexes". La première approche est une méthode par "empilement d'espaces fibrés". Il peut s'agir d'un empilement horizontal, c'est à dire un bifibré (fibré à gauche par G et à droite par

$$H) : \begin{array}{ccc} G \rightarrow P_+ \leftarrow H \\ \Downarrow \\ M \end{array}$$

, avec des relations de compatibilité entre les fibrations gauche et droite ; ou d'un em-

pilement vertical, c'est à dire un fibré composite (un fibré de fibré) :

$$\begin{array}{ccc} P_+ \leftarrow H \\ \downarrow \\ S \leftarrow G/H \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

. Comme je l'ai montré

[24], il est alors possible en utilisant les trivialisations locales de toutes les fibrations, de décomposer P_+ pour en faire une catégorie \mathcal{P} construite comme un fibré tordu.

Une autre approche pour une définition directe est dite de "l'internalisation". Sachant que la variété P de la réalisation des classes de Deligne de degré 2 va être remplacée pour les réalisations des classes de degré 3 par une catégorie \mathcal{P} , l'idée est de reprendre la définition d'un fibré principal en remplaçant

toutes les variétés qui s'y trouvent par des catégories :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} \leftarrow \mathcal{G} \\ \Downarrow \\ \mathcal{M} \end{array}$$

(les doubles flèches indiquant que les

applications sont remplacées par des foncteurs, c'est à dire des "biapplications" qui transforment aussi

TABLE 2.1 – Les différentes approches de fibrés catégoriques c'est à dire de réalisations géométriques de classes de Deligne de degré 3.

Méthode	Nom de la fibration	Auteurs	ref.
Assemblage	fibré tordu abélien	Mackaay	[Mac03]
	fibré tordu non-abélien	Ascheri <i>etal</i>	[ACJ05]
	fibré de gerbes en cup-produit	Brylinski, MacLaughlin	[BM94]
Empilement	bifibré	Ascheri <i>etal</i>	[ACJ05]
	fibré composite	Sardanashvilly, Viennot	[Sar00] [24]
	fibré de gerbes abélien	Murray	[Mur96]
	fibré de gerbes non-abélien	Kalkkinen	[Kal07]
	fibré sur espace des chemins	Cattaneo, Chatterjee <i>etal</i>	[CCRR99, CLS10]
Internalisation	gerbes abéliennes	Girraud	[Gir71]
	champ continu de C^* -algèbres	Dixmier, Douady	[DD63]
	gerbes non-abéliennes	Breen, Laurent-Gegoux <i>etal</i>	[LGSX09]
	2-fibré	Baez, Wockel <i>etal</i>	[BS04, Woc11]
	fibré catégorique sur 2-espace affine	Viennot	[25]

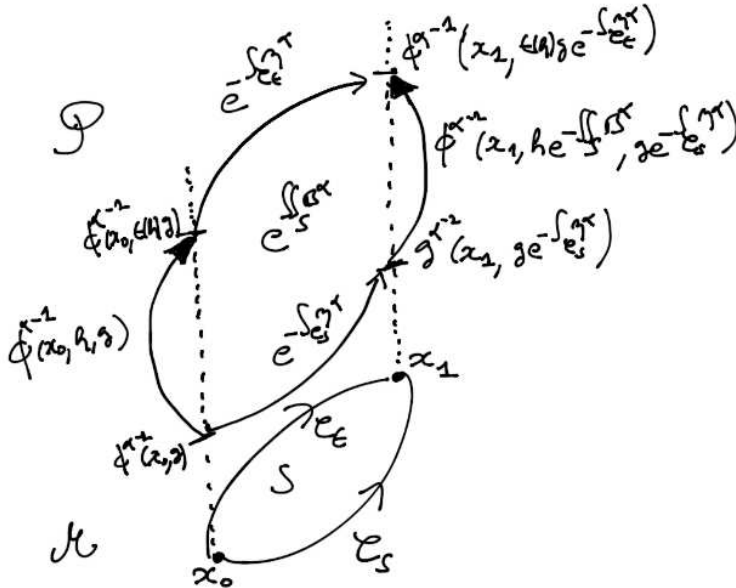
bien les objets que les morphismes de manière compatible avec les structures de catégorie). Le groupe de Lie G doit donc être remplacé par une catégorie. Une possibilité est de considérer la catégorie \mathcal{G} telle que $\text{Obj}(\mathcal{G}) = G$, $\text{Morph}(\mathcal{G}) = \text{Aut}(G) \times G$ ($\text{Aut}(G)$ est le groupe des automorphismes de G qui remplace ici H) avec $s(f, g) = g$ et $t(f, g) = f(g)$. En considérant pour la catégorie de base une catégorie triviale : $\text{Obj}(\mathcal{M}) = M$, $\text{Morph}(\mathcal{M}) = \{\text{id}_x\}_{x \in M}$; la structure ainsi formée est appelée gerbes. Une autre possibilité pour la catégorie \mathcal{G} est $\text{Obj}(\mathcal{G}) = G$, $\text{Morph}(\mathcal{G}) = H \rtimes G$ avec $s(h, g) = g$ et $t(h, g) = t(h)g$. Comme les morphismes doivent également former un groupe, on doit introduire un produit entre morphismes défini par $(h', g')(h, g) = (h'\alpha_{g'}(h), g'g)$ avec $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ telle que $\alpha_{t(h)}(h') = hh'h^{-1}$ et $t(\alpha_g(h)) = gt(h)g^{-1}$. Le quadruplet (G, H, t, α) qui supporte la définition de la catégorie \mathcal{G} est appelé par les mathématiciens module croisé de Lie. Toujours avec pour la base une catégorie triviale, ce choix forme une structure appelée 2-fibré. Pour des raisons techniques, ces définitions par internalisation se limitent à une catégorie de base triviale. J'ai moi-même proposé une généralisation des 2-fibrés supportant des catégories de bases non-triviales mais choisies dans une classe très particulière de catégories appelées 2-espaces affines [25].

Il faut noter que ces différentes méthodes pour réaliser géométriquement des classes de Deligne de degré 3 existent sous différentes variantes et il n'est pas évident que toutes ces constructions soient équivalentes entre elles, même s'il existe quelques résultats d'équivalence (en un sens très faible) entre deux types de construction [NW13]. La table 2.1 résume les différentes approches de fibrés catégoriques.

Dans une classe de Deligne de degré 3 $[h, A, B]$, $h^{\alpha\beta\gamma}$ définit la structure de la catégorie \mathcal{P} . Si les 2-fonctions de transition sont réduites à 1_H (aux changements de jauge près), il n'y a pas d'obstruction à recoller entre eux les morceaux de \mathcal{P} qui définissent donc un fibré principal ordinaire.

$h^{\alpha\beta\gamma}$ définissant \mathcal{P} , quel est le sens de la 2-connexion définie par $A^{\alpha\beta} \in \Omega^1(U^\alpha \cap U^\beta, G)$ et $B^\alpha \in \Omega^2(U^\alpha, H)$ (pour simplifier la discussion on supposera ici que G et H sont abéliens)? Soient deux chemins orientés \mathcal{C}_s et \mathcal{C}_t partant tous deux de $x_0 \in U^\alpha$ et arrivant tous deux en $x_1 \in U^\alpha$. Soit $\mathcal{S} \subset U^\alpha$ une surface orientée supportée par les deux chemins c'est à dire telle que $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_t^{-1}$ (\mathcal{C}_t^{-1} étant le chemin \mathcal{C}_t avec son orientation renversée). La 2-connexion ne sert pas à définir le relèvement horizontal des chemins mais celui des surfaces : $\{\phi^{\alpha-1}(x, ge^{-\iint_{\mathcal{S}:x_0 \rightarrow x} B^\alpha}), x \in \mathcal{S}\}$ est le relèvement horizontal de \mathcal{S} passant par $\phi^{\alpha-1}(x_0, g)$. ϕ^α est la trivialisatoin locale de P^α et " $\mathcal{S} : x_0 \rightarrow x$ " est une surface incluse dans \mathcal{S} ayant x_0 et x comme extrémités de ses deux bords (on ne discutera pas ici les problèmes de choix arbitraires dans le découpage de \mathcal{S} , mais l'holonomie d'une surface fermée $\text{Hol}(\mathcal{S}) = e^{-\iint_{\mathcal{S}} B^\alpha}$ est définie de manière univoque). Le potentiel-transformation $A^{\alpha\beta}$ sert à définir la transition entre les deux cartes U^α et U^β le long d'un chemin tracé dans l'intersection. La 2-connexion peut être complétée par

un champ $\eta^\alpha \in \Omega^1(U^\alpha, G)$ permettant de définir les relèvements horizontaux des chemins frontières de S telle que $e^{-\int_{c_t} \eta^\alpha} = e^{-\int_S B^\alpha} e^{-\int_{c_s} \eta^\alpha}$. Le tout permet de définir le transport parallèle d'une flèche $q_0 \in \text{Morph}(\mathcal{P})|_{U^\alpha}$ le long de S avec $q_0 = \phi^{\alpha-1}(x_0, h, g)$. $q_1 \in \text{Morph}(\mathcal{P})|_{U^\alpha}$ est la flèche atteinte par ce transport parallèle si $\phi^\alpha(q_1) = (x_1, h e^{-\int_S B^\alpha}, g e^{-\int_{c_s} \eta^\alpha})$ (où ϕ^α a été promue au rang de foncteur sur $\mathcal{P}|_{U^\alpha}$). $\mathbf{g}_S = (e^{-\int_S B^\alpha}, e^{-\int_{c_s} \eta^\alpha}) \in H \times G = \text{Morph}(\mathcal{G})$ avec $s(\mathbf{g}_S) = e^{-\int_{c_s} \eta^\alpha}$ et $t(\mathbf{g}_S) = e^{-\int_{c_t} \eta^\alpha}$.



2.2.3 Sur la non-trivialité des structures fibrées

Nous avons vu qu'une classe de Deligne de degré n était plate si sa n -courbure (le champ global dérivant de la forme de plus haut degré de la classe) est nulle, et est triviale si ses fonctions de n -transition sont réduites à l'identité (aux changements de jauge près). Si la classe est triviale, la n -fibration (sa réalisation géométrique) est triviale c'est à dire est équivalente à une $(n - 1)$ -fibration. On peut montrer que si la variété de base M est compacte, de n -connexité triviale, sans bord et dimension réelle n alors connexion plate et trivialité de la fibration sont deux notions équivalentes. Dans les autres cas, il est possible d'avoir une connexion non-plate sur une fibration triviale, ou une fibration triviale avec une connexion non-plate. On peut donc se demander quels sont les critères géométriques pour avoir une fibration non-triviale? L'exemple de l'effet Aharonov-Bohm montre que l'on peut avoir des holonomies non-triviales (même avec une connexion plate) si la topologie de la variété de base n'est pas triviale en un certain sens. Pour être plus précis, il existe pour les G -fibrés principaux une suite de variétés de dimension croissante $B^1(G) \subset \dots \subset B^n(G) \subset \dots$ dites variétés universelles classifiantes, et des fibrés universels

$$\begin{array}{ccc} U^n(G) \leftarrow G & & P \leftarrow G \\ \downarrow & \text{tels que pour tout fibré} & \downarrow \\ B^n(G) & & M \end{array} \quad \text{il existe une application } f : M \rightarrow B^n(G)$$

(pour un n suffisamment grand¹⁴) telle que P (muni de sa connexion) soit isomorphe à $U^n(G)|_{f(M)}$ (muni de sa connexion). La topologie de P est alors associée à la classe d'homotopie de l'application f (ce n'est donc pas totalement la topologie de M qui compte, mais la manière dont celle-ci se retrouve à l'intérieur de celle de $B^n(G)$) [RF77].

Une autre caractéristique de non-trivialité est la présence de défauts topologiques dans la n -fibration, à savoir de sous-variétés de M sur laquelle la fibration n'est pas définie. Cela se traduit par le fait que toutes les sections de la fibration vectorielle associée passent par zéro et que la n -courbure diverge sur la sous-variété. La dimension des défauts topologiques dépend du degré de la fibration et du groupe considéré.

14. Pour éviter le problème de dimension, on peut utiliser $B^\infty(G) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B^n(G)$.

Ainsi pour un $U(1)$ -fibré, on s'attend à avoir des défauts de dimension 0 (défauts ponctuels), par exemple une particule chargée électriquement sera le défaut topologique pour l'excitation électrique, un monopôle magnétique sera le défaut du champ magnétique, et une singularité gravitationnelle (trou noir) sera celui du champ gravité. Néanmoins cela n'est vrai que si la variété de base est "convenablement" bien choisie. Sans rentrer dans les détails, on peut le comprendre dans le cas du contrôle quantique. Considérons un Hamiltonien de contrôle $H(x)$ avec $x \in M$, avec un défaut topologique ponctuel en x_* . Supposons que l'on ajoute un paramètre de contrôle comme un angle θ , mais sans que celui-ci ne fasse quoi que soit au système (un paramètre inactif, un paramètre dont la variation ne modifie pas l'interaction avec le système sous contrôle). On a alors un nouvel Hamiltonien $\tilde{H}(x, \theta) \equiv H(x)$ avec $(x, \theta) \in M \times \mathbb{S}^1$ et un défaut topologique de dimension 1 le cercle $\{x_*\} \times \mathbb{S}^1$. On voit bien que c'est artificiel, mais cela pourrait être plus subtil avec par exemple N paramètres de contrôle qui semblent faire quelque chose au système mais qui par un changement de variables pourraient être réduits à $N - 1$ paramètres actifs. Les défauts topologiques peuvent donc apparaître avec une dimension supérieure à ce qu'elle devrait être avec un système sur-contrôlé (dans le sens où il y a plus de paramètres de contrôle que nécessaire). À l'inverse, on pourrait avoir une dimension inférieure avec un système sous-contrôlé (pas assez de paramètres de contrôle pour avoir une contrôlabilité totale du système). Le nombre adéquate de paramètres de contrôle (et donc la dimension de M) dépend (en espace de Hilbert de dimension finie) de la symétrie et de l'ordre d'une matrice de référence H_0 (Hamiltonien libre du système par exemple). Cette question a été étudiée par Arnold [Arn71] qui appelle les systèmes "bien contrôlés" $x \mapsto H(x)$ des *déformations miniverselles* de H_0 . Pour des $U(1)$ -fibrés principaux correspondant à un contrôle via un Hamiltonien miniversel, les défauts topologiques attendus sont ponctuels. Pour un $U(1)$ -fibré principal l'ensemble de ses défauts ponctuels sur M pondérés par leurs charges (une mesure de l'importance du défaut) forme ce que les mathématiciens nomment le *diviseur* du fibré [GH78].

Pour les fibrations de haut degré ($n > 2$) la question des espaces classifiants (et donc de la topologie de la variété de base induisant une topologie non-triviale) a été étudiée dans quelques cas particuliers de constructions (2-fibrés au sens de Baez et fibrés de gerbes) [NW13]. Le cas de la dimension attendue des défauts topologiques n'a pas à ma connaissance été traitée (on ne connaît pas l'équivalent des diviseurs pour les 2-fibrations) même si l'on peut s'attendre à des défauts de dimension 1 (linéaires) pour des \mathbb{C}^* -2-fibrés avec un Hamiltonien miniversel de système ouvert.

2.2.4 Discussion sur le rôle de la théorie des catégories

Initialement la théorie des catégories a été introduite par Eilenberg et MacLane [Mac69] afin de fournir une approche des mathématiques qui soit fondée sur les relations entre les structures mathématiques et non plus sur leurs constructions en termes d'ensembles. D'une certaine façon, il s'agissait d'adopter en mathématique une approche holistique plus proche de la démarche de taxinomie des biologistes que l'approche constructive et reductiviste de la théorie des ensembles. Elle met plus l'accent sur les relations entre les objets (à travers les morphismes) que sur les objets eux-mêmes dont la nature "concrète" importe peu. Mais en dehors de son objet mathématique, et sa capacité à définir des objets géométriques qui seraient "incohérents" en termes de variétés, y a-t-il une raison de l'émergence de la théorie des catégories dans le contexte physique du présent mémoire? D'un point de vue conceptuel, il est possible de rapprocher l'approche catégorique avec les difficultés ontologiques de la mécanique quantique. Les tentatives en mécanique quantique d'interprétation *réalistes objectivistes* (à savoir supportant une réalité indépendante, accessible et intelligible composée d'objets) se heurtent systématiquement aux "paradoxes" que sont la dualité onde-corpuscule, la superposition d'états et la non-localité. La vision naïve d'une physique constituée de particules élémentaires concrètes résiste peu à l'analyse précise de la théorie quantique des champs. Des systèmes peuvent être constitués par une superposition entre le vide et un nombre arbitraire de particules, des particules virtuelles ne respectant pas les lois de conservation peuvent être échangées, le vide pour un observateur peut se trouver rempli d'un ensemble thermique de particules pour un autre (le vide quantique d'un référentiel galiléen devient un état mixte de rayonnement

thermique par changement de référentiel non-galiléen, c'est l'effet Unruh). On peut donc s'interroger sur la pertinence épistémologique du concept d'objets (comme les particules) en mécanique quantique tant la définition d'un système en termes d'objets semble si peu tangible. Il peut donc être intéressant d'adopter une posture dans laquelle l'on met plus l'accent sur la réalité physique des relations entre les objets, et en particulier entre système observé et observateur (probabilités de résultats de mesure entre l'observateur et le système, interaction et intrication entre deux systèmes, etc...) plutôt que sur les objets eux-mêmes, une approche que l'on pourrait qualifier de *réalisme structuraliste*. Le parallèle avec la philosophie derrière la théorie des catégories est évident. Il est possible d'aller plus loin dans cette posture épistémologique. Si les relations portent plus de sens physique que les objets, il n'est pas interdit de penser que la réalité physique est plus proche des structures mathématiques utilisées pour la décrire que des images mentales classiques (ondes, corpuscules, ...). La "réalité" du monde microscopique serait donc constituée d'entités dont la meilleure description que nous puissions faire est "d'être" des espaces de Hilbert (ou des variétés projectives, des C^* -algèbres ou des catégories associées à ceux-ci), sachant que c'est la structure qui est le support des relations sur lesquelles l'accent est mis. L'impossibilité de décrire un système quantique indépendamment de l'observation (du fait des relations d'incertitude de Heisenberg, de la règle de projection de Born, de la superposition d'états) laisse supposer que la réalité a plus à voir avec la catégorie \mathcal{H} ($\text{Obj}(\mathcal{H}) = \{E \subset \mathcal{H}\}$ ensemble des sous-espaces de l'espace de Hilbert du système, $\text{Morph}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ensemble des observables du système, avec $\forall B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $s(B) = \ker B^\perp$ et $t(B) = \text{Ran}B$). Cette approche épistémologique qui consiste à considérer comme une réalité, comme les véritables substances, les structures mathématiques (et ne plus simplement les voir comme un simple langage descriptif) – approche à laquelle personnellement je souscris –, porte le nom *réalisme pythagoricien*¹⁵. Enfin, en allant encore plus loin, il est possible, poussé par les difficultés ontologiques de la mécanique quantique, d'abandonner une vision réaliste de la physique pour une vision *idéaliste* (au sens où l'on suppose la réalité indépendante être essentiellement inaccessible, et la science avoir seulement pour rôle de structurer les idées que l'on peut avoir sur cette réalité, idées qui seraient en elles-mêmes les seules choses certaines). Il est alors intéressant de noter que dans *critiques de la raison pure* d'Emmanuel Kant – ouvrage fondateur de l'idéalisme – on trouve une théorie des catégories. Ce n'est pas un hasard, les fondateurs de la théorie (mathématique) des catégories, Eilenberg et MacLane ont nommé leur théorie en référence à la théorie (philosophique) des catégories de Kant. Il faut noter que ce choix serait ironique, Eilenberg et MacLane répondaient par là de façon humoristique aux critiques de certains mathématiciens sur leur théorie qui rappellent les critiques sur la théorie de catégories de Kant, "abstrait, incompréhensible et totalement inutile"¹⁶ !

Plus prosaïquement que cette discussion épistémologique, rappelons que la dynamique quantique a cette particularité qu'elle est définie par deux lois. La première est l'équation de Schrödinger $i\hbar\dot{\psi} = H\psi$ qui gouverne l'évolution des états d'un système tant qu'il n'est pas observé. Il s'agit d'une évolution continue dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , ou plutôt dans l'espace projectif $P(\mathcal{H})$ (variété complexe des états normés sans phase globale) si l'on exclue les informations sans sens physique. En ce sens, la dynamique quantique ne diffère guère de la dynamique classique (évolution continue dans l'espace des phases). Mais il y a une seconde loi d'évolution en mécanique quantique, discrète et instantanée : la règle de projection de Born. Si à l'instant t on mesure l'observable B sur le système dans l'état $\psi(t^-)$, si le résultat de la mesure a donné pour résultat $\lambda \in \text{Sp}(B)$, alors après la mesure l'état du système est $\psi(t^+) = \frac{P_\lambda \psi(t^-)}{\|P_\lambda \psi(t^-)\|}$ où P_λ est le projecteur spectral associé à λ . La mesure provoque un saut instantané de $\psi(t^-)$ à $\psi(t^+)$. Cela rappelle les catégories introduites précédemment comme des entités géométriques où des sauts d'un point à l'autre sont définis de manière naturelle (ici le choix du saut dépend du processus aléatoire tel que $\|P_\lambda \psi(t^-)\|^2$ soit la probabilité que la mesure donne λ pour résultat). On peut donc penser que la structure véritable de la dynamique quantique est une catégorie \mathcal{B} telle que $\text{Obj}(\mathcal{B}) = P(\mathcal{H})$, et

15. en référence avec la définition qu'en donne B. d'Espagnat [d'E02]

16. Anecdote relatée dans [Béz02].

$\text{Morph}(\mathcal{B})$ est un ensemble d'applications de la forme $\Omega = P_n(P_{n-1}P_nP_{n-1})^{-1}\dots(P_0P_1P_0)^{-1}$ où $\{P_i\}_i$ sont des projecteurs orthogonaux de rang 1, $(P_iP_{i+1}P_i)^{-1}$ désigne le pseudoinverse de $P_iP_{i+1}P_i$ (inverse à l'intérieur de l'espace $\text{Ran}P_i$), avec $s(\Omega) = \text{Ran}P_0$ et $t(\Omega) = \text{Ran}P_n$; les projecteurs successifs étant tels que $P_{i+1}P_i \neq 0$ (les états associés à P_i et P_{i+1} ne sont pas orthogonaux). Les opérateurs du type Ω sont appelés opérateurs d'onde, mais d'autres représentations des flèches faisant passer d'un point à l'autre de $P(\mathcal{H})$ sont possibles. D'autres représentations de la mécanique quantique par la théorie des catégories ont été proposées [ACK16, IdG07]. Je reviendrai sur l'étude de la catégorie \mathcal{B} car elle intervient également dans la description géométrique des régimes "presque adiabatiques" qui interviennent dans la dynamique des systèmes dissipatifs (cf. chapitre 6). Nombre d'auteurs supposent que l'origine de la règle de Born serait un phénomène de décohérence très rapide. Même si cette idée n'est pas exploitée en tant que telle ici, il m'apparaît alors assez naturel de trouver des catégories dans la description de la dynamique des systèmes ouverts. La généralisation aux systèmes ouverts et à l'information quantique de cette structure catégorique serait \mathcal{D} , avec $\text{Obj}(\mathcal{D})$ l'ensemble des matrices densités du système et $\text{Morph}(\mathcal{D}) = SL(\mathcal{H}) \times \text{Obj}(\mathcal{D})$ ($s(g, \rho) = \rho$ et $t(g, \rho) = \frac{g\rho g^\dagger}{\text{tr}(g\rho g^\dagger)}$, $SL(\mathcal{H})$ est le groupe des transformations inversibles et de déterminant 1 de \mathcal{H}), où la généralisation la plus large des opérations de mesure sont les SLOCC (opérations locales et communication classique stochastique) représentées¹⁷ par le groupe $SL(\mathcal{H})$. Nous verrons que cette catégorie intervient en effet comme catégorie de base pour les descriptions géométriques du contrôle des systèmes ouverts (cf. chapitre 8).

Pour résumer, il apparaît très naturel que des catégories émergent en mécanique quantique. D'un certain point de vue, cela est dès l'origine sous-jacent dans son formalisme avec la dichotomie états du système (\mathcal{H}) et observables ($\mathcal{L}(\mathcal{H})$), prenant en compte le fait que l'action d'observer le système modifie l'état de celui-ci (intrinsèquement les états s'identifient à des objets et l'action d'observer à des flèches). Cela n'est pas le cas dans la structure de la mécanique classique où l'observable ne change pas l'état (les observables classiques sont réduites à être de simples fonctions de l'espace de phase – espace des états classiques – qui s'évaluent en fonction de l'état mais n'ont pas d'incidence sur celui-ci). Il est à noter qu'en théorie des catégories, objets et flèches sont concomitants dans la définition d'une catégorie. On ne peut pas considérer que les flèches sont construites sur l'espace des objets ou que les objets sont construits sur l'espace des flèches. Les deux données (avec les applications source, cible, identité et composition) sont ensemble nécessaires et au même niveau d'importance pour définir une catégorie. On pourrait se dire que ce n'est pas tout à fait le cas en mécanique quantique où l'espace des états \mathcal{H} semble avoir primauté en étant défini en premier, alors que l'espace des observables $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est construit à partir de lui. On peut noter que cette construction mathématique est quelque peu contraire à l'intuition physique. Les données premières dont dispose le physicien sont les résultats d'expérience c'est à dire les observables. Les états sont des constructions à posteriori qui rendent compte de l'idée que l'on se fait du système à travers des observations faites sur celui-ci. En réalité, on peut totalement renverser la construction de la mécanique quantique, on posant comme premier l'espace des observables identifié à une C^* -algèbre¹⁸ \mathfrak{a} (ou une algèbre de Lie) qui se définit par les produits entre ses éléments (ou par les commutateurs de ses éléments). L'espace des états apparaît alors comme l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur l'algèbre $\mathcal{L}(\mathfrak{a}, \mathbb{C})$ (dans le sens où $\omega \in \mathcal{L}(\mathfrak{a}, \mathbb{C})$, $A \in \mathfrak{a}$, $\omega(A) = \text{tr}(\rho_\omega A)$ – en dimension finie –). Les deux constructions prisent ensemble, $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{a}, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{a} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, mettent sur un pied d'égalité espace des états et espace des observables, comme le fait naturellement la théorie des catégories.

Au final, il m'apparaît donc naturel de voir émerger une géométrie catégorique dans la description du contrôle des systèmes ouverts, ce qui est en accord avec le fait que les réalisations des classes de Deligne de degré 3 sont des fibrés catégoriques.

17. en fait $SL(\mathcal{H})$ contient les SLOCC et les transformations isospectrales

18. une algèbre est un espace vectoriel muni d'un produit, une C^* -algèbre est une algèbre munie d'une norme "compatible" avec celui-ci ($\|A^\dagger A\| = \|A\|^2$), et complète pour la topologie de la norme.

2.3 Théories de jauge en contrôle quantique

Nous revenons maintenant au problème du contrôle quantique et nous détaillons un peu plus l'hypothèse concernant le lien entre complexité du contrôle et degré des classes de Deligne.

2.3.1 Degré 0 : Contrôle statique de systèmes fermés

Soit $M \ni x \mapsto H(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une famille d'Hamiltoniens auto-adjoints continus et dérivables (en norme) où x représente un ensemble de paramètres de contrôle dont l'ensemble des valeurs possibles forme une variété M . Pour simplifier on supposera que $\dim \mathcal{H} = n < +\infty$. Le contrôle statique consiste à ajuster les paramètres x afin que l'évolution induite par $H(x)$ amène à proximité de la cible. On cherche donc x de sorte à minimiser $\|e^{-i\hbar^{-1}H(x)T}\psi_0 - \psi_{target}\|$ où T est la durée du contrôle. L'évolution peut être représentée sur la base des vecteurs propres instantanés :

$$H(x)\phi_a(x) = \lambda_a(x)\phi_a(x) \quad (2.3)$$

où $x \mapsto \lambda_a(x)$ sont des fonctions continues et $x \mapsto \phi_a(x)$ sont de classe fortement \mathcal{C}^1 . On a alors

$$e^{-i\hbar^{-1}H(x)T}\psi_0 = \sum_{a=1}^n c_a(x)e^{-i\hbar^{-1}\lambda_a(x)T}\phi_a(x) \quad (2.4)$$

avec $c_a(x) = \langle \phi_a(x) | \psi_0 \rangle$. Le résultat du contrôle est essentiellement encodé dans les phases $(e^{-i\hbar^{-1}\lambda_a(x)T})_a$ qui constituent une application de M vers $G = U(1)^n$ et qui prend place dans la variété $M \times \mathbb{T}^n$ ($\mathbb{T}^n \simeq U(1)^n$ est le n -tore). La variété $M \times \mathbb{T}^n$ est la réalisation géométrique d'une classe de Deligne de degré 1 de potentiel $V = i\text{Sp}(H) = (i\lambda_a)_{a=1,\dots,n} \in \Omega^0(M, i\mathbb{R}^n)$ formellement soumis aux changements de jauge $(i\tilde{\lambda}_a)_a = (i\lambda_a)_a + \frac{2\pi i\hbar}{T}k$ avec $k \in \mathbb{Z}^n$. On remarquera que le problème ne présente qu'une seule échelle de temps (celle de la période des oscillations de Rabi $\tau_q = \max_{a,b} \frac{\hbar}{|\lambda_a(x) - \lambda_b(x)|}$). Nous avons omis d'indiquer des indices de cartes car la théorie de jauge est dans la plupart des cas triviale (classe de Deligne de degré 1 trivial que je considère comme le degré 0). Pour avoir une vraie classe de degré 1 non-triviale, il faut ajouter de la complexité.

2.3.2 Degré 1 : Contrôle quasistatique de systèmes fermés dans des champs cw

On considère un système quantique (atome, molécule, spin) d'Hamiltonien libre auto-adjoint $H_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($\dim \mathcal{H} = n < +\infty$), soumis à un champ électrique d'onde entretenue. L'Hamiltonien total du système est alors $H(x, t) = H_0 + \vec{\mu} \cdot \vec{n}E \cos(\omega t + \phi)$ où $\vec{\mu} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est le moment dipolaire électrique du système et $x = (E, \vec{n}, \omega, \phi) \in M$ sont les paramètres de contrôle (amplitude, direction de polarisation, fréquence, phase du champ). On peut aussi considérer un système frappé périodiquement $H(x, t) = H_0 + \hbar\lambda W \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT)$ avec $x = (\lambda, \frac{2\pi}{T}, W) \in M$ intensité, fréquence et opérateur de frappe ($W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$). On cherche à ajuster x de sorte à minimiser $\|\mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1} \int_0^T H(x,t) dt} \psi_0 - \psi_{target}\|$ ¹⁹. On supposera ici que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période du champ. L'Hamiltonien semi-classique $H(x, t)$ est exprimé en jauge de Lorentz, et n'est pas invariant de jauge électromagnétique. Ainsi ses valeurs propres ne le sont également pas. Pour traiter du problème de contrôle et remédier à cette difficulté, il est possible de considérer la théorie de Floquet. On considère l'Hamiltonien de Floquet $H_F(x) = -i\hbar\omega \frac{\partial}{\partial \theta} + H_0 + \vec{\mu} \cdot \vec{n}E \cos(\theta + \phi) \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ dans l'espace de Hilbert étendu $\mathcal{F} = \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi})$ où $L^2(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi})$ est l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur le cercle de phase \mathbb{S}^1 . H_F est invariant de jauge et ses valeurs propres sont appelées quasi-énergies.

$$\forall x \in U^\alpha, \quad H_F(x)|a(\theta), x\rangle^\alpha = \chi_a^\alpha(x)|a(\theta), x\rangle^\alpha \quad (2.5)$$

19. $\mathbb{T}_{\leftarrow} e$ désigne l'exponentielle ordonnée en temps, i.e. une série de Dyson.

où $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle$ désigne le double produit scalaire dans \mathcal{F} ($\langle\langle \Psi | \Phi \rangle\rangle = \int_0^{2\pi} \langle \Psi(\theta) | \Phi(\theta) \rangle_{\mathcal{H}} \frac{d\theta}{2\pi}$), U^α est un ouvert de M . Le spectre de quasi-énergie est $\hbar\omega$ -périodique. Avec le changement variable $\theta = \omega t$, $U(t, 0) = \mathbb{T} \overleftarrow{e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t H(x, t') dt'}}$ devient $U_x(\theta) = \mathbb{T} \overleftarrow{e^{-i\hbar^{-1} \int_0^\theta H(x, \theta'/\omega) d\theta'}}$. Le théorème de Floquet [Flo83, MS90b] fournit la décomposition suivante :

$$U_x(\theta) = Z_x(\theta) e^{iM_x\theta} \quad Z_x(\theta + 2\pi) = Z_x(\theta) \quad (2.6)$$

La transformation induite par l'opérateur de monodromie $U_x(2\pi) = e^{iM_x 2\pi}$ (qui donne le résultat du contrôle) est alors déterminée par les valeurs propres de M :

$$M_x |\mu_j, x\rangle^\alpha = -\frac{\tilde{\chi}_j^\alpha(x)}{\hbar\omega} |\mu_j, x\rangle^\alpha \quad (2.7)$$

or $\{\tilde{\chi}_j^\alpha(x)\}$ sont des quasi-énergies génératrices de tout le spectre de H_F , plus précisément

$$\forall a, \exists j, \exists n \in \mathbb{Z}, \quad \chi_a^\alpha = \tilde{\chi}_j^\alpha + n\hbar\omega \quad (2.8)$$

$$|a(\theta), x\rangle^\alpha = e^{in\theta} Z_x(\theta) |\mu_j, x\rangle^\alpha \quad (2.9)$$

Il vient que

$$U_x(2\pi)\psi_0 = \sum_j c_j^\alpha(x) e^{-i\tilde{\chi}_j^\alpha(x) \frac{2\pi}{\hbar\omega}} |\mu_j, x\rangle^\alpha \quad (2.10)$$

avec $c_j^\alpha(x) = \langle \mu_j(x) | \psi_0 \rangle$. Comme dans l'exemple précédent, chaque phase $e^{-i\tilde{\chi}_j^\alpha(x) \frac{2\pi}{\hbar\omega}}$ prend place dans la variété $M \times \mathbb{S}^1$ avec pour groupe de jauge $U(1)$, et de potentiel la quasi-énergie $\tilde{\chi}_j^\alpha(x)$ définie au changement de jauge près $\chi_a^\alpha(x) = \tilde{\chi}_j^\alpha(x) + n\hbar\omega$, $n \in \mathbb{Z}$. Mais le changement de jauge est ici moins formel que dans l'exemple précédent (puisque le spectre de quasi-énergie est naturellement $\hbar\omega$ -périodique), et l'on peut avoir

$$\forall x \in U^\alpha \cap U^\beta, \quad \chi^\beta(x) = \chi^\alpha(x) + n^{\alpha\beta} \hbar\omega \quad (2.11)$$

avec la condition de cocycle $n^{\alpha\beta} + n^{\beta\gamma} + n^{\gamma\alpha} = 0$ si $U^\alpha \cap U^\beta \cap U^\gamma \neq \emptyset$, sans que l'ensemble des constantes de transition ne puissent être réduites à zéro par changement de jauge $\tilde{n}^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta} + p^\beta - p^\alpha$, $p^\alpha \in \mathbb{Z}$. Pour le voir considérons un exemple très simple d'un spin dans un champ Zeeman frappé périodiquement : $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $H_0 = \frac{\hbar\omega_1}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$, $W = |w\rangle\langle w|$ avec $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$ direction de frappe que l'on maintient ici constante. Le seul paramètre de contrôle est ici l'intensité de la frappe λ . Après quelques calculs, on montre que l'opérateur de monodromie est ici

$$U_\lambda(2\pi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\lambda} + 1 & i(e^{-i\lambda} - 1)e^{-i\pi\frac{\omega}{\omega_1}} \\ -i(e^{-i\lambda} - 1) & (e^{-i\lambda} + 1)e^{-i\pi\frac{\omega}{\omega_1}} \end{pmatrix}_{(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)} \quad (2.12)$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la fréquence de frappe (maintenue également constante). On remarquera la périodicité de U_λ par rapport à λ (une frappe de $\lambda = 2\pi$ est équivalente à pas de frappe du tout). Mais les quasi-énergies sont (pour $\omega = \omega_1$) :

$$\chi_1(\lambda) = \lambda \frac{\hbar\omega}{4\pi} \quad (2.13)$$

$$\chi_2(\lambda) = \lambda \frac{\hbar\omega}{4\pi} + \frac{\hbar\omega}{2} \quad (2.14)$$

Il s'en suit que $\chi_1(2\pi) = \frac{\hbar\omega}{2} = \chi_2(0)$ et $\chi_2(2\pi) = \hbar\omega = \chi_1(0) + \hbar\omega$. On ne retrouve les mêmes quasi-énergies (à un changement de jauge près) qu'après deux tours : $\chi_1(4\pi) = \chi_1(0) + \hbar\omega$ et $\chi_2(4\pi) = \chi_2(0) + \hbar\omega$, voir figure 2.1 Ce phénomène d'échange de quasi-énergies (aux changements de jauge près) après un tour porte le nom d'*anholonomie de Cheon* [MT07]. Géométriquement, puisque l'on revient

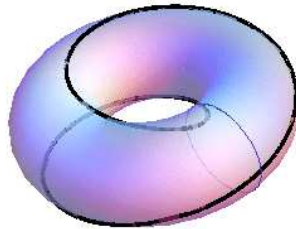


FIGURE 2.1 – Représentation des quasi-énergies du spin frappé ($\omega = \omega_1$) en fonction de l'amplitude de frappe $\lambda \pmod{2\pi}$ (cercle d'âme), l'espace des quasi-énergies étant représenté $\pmod{\hbar\omega_0}$ (cercle section). Le chemin représente les fonctions $\lambda \mapsto \chi_1(\lambda)$ et $\lambda \mapsto \chi_2(\lambda)$. Tiré de [1].

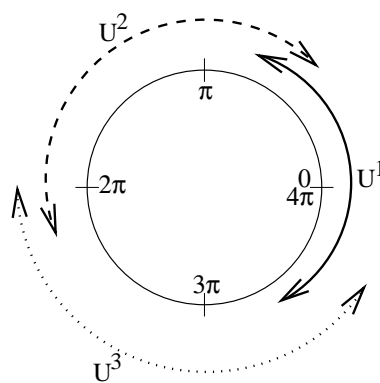


FIGURE 2.2 – $M = \mathbb{S}^1$ et son recouvrement en trois ouverts.

à la situation de départ après deux tours, l'espace des paramètres de contrôle est le cercle $M = \mathbb{S}^1$ correspondant à $\lambda \bmod{4\pi}$. Néanmoins, sous cette forme les quasi-énergies restent multi-valuées, $\lambda = 0$ et $\lambda = 4\pi$ ne forme qu'un seul point physique de M , et après un tour les quasi-énergies gagnent $\hbar\omega$. Pour remédier à cela, on donne trois ouverts recouvrant M comme sur la figure 2.2. On définit alors $\forall \lambda \in U^\alpha$

$$\chi_1^\alpha(\lambda) = \ell^\alpha(\lambda) \frac{\hbar\omega}{4\pi} \quad (2.15)$$

$$\chi_2^\alpha(\lambda) = \ell^\alpha(\lambda) \frac{\hbar\omega}{4\pi} + \frac{\hbar\omega}{2} \quad (2.16)$$

où ℓ^α est le système de coordonnées sur U^α , i.e.

$$\forall \lambda \in U^1, \quad \ell^1(\lambda) \in]-\pi, \pi[\quad (2.17)$$

$$\forall \lambda \in U^2, \quad \ell^2(\lambda) \in]0, 3\pi[\quad (2.18)$$

$$\forall \lambda \in U^3, \quad \ell^3(\lambda) \in]2\pi, 4\pi[\quad (2.19)$$

Les quasi-énergies χ_a^α sont alors des fonctions locales monovaluées. On a de plus

$$\forall \lambda \in U^1 \cap U^2, \quad \ell^2(\lambda) - \ell^1(\lambda) = 0 \Rightarrow \chi_a^2(\lambda) = \chi_a^1(\lambda) \quad (2.20)$$

$$\forall \lambda \in U^2 \cap U^3, \quad \ell^3(\lambda) - \ell^2(\lambda) = 0 \Rightarrow \chi_a^3(\lambda) = \chi_a^2(\lambda) \quad (2.21)$$

$$\forall \lambda \in U^1 \cap U^3, \quad \ell^3(\lambda) - \ell^1(\lambda) = 4\pi \Rightarrow \chi_a^3(\lambda) = \chi_a^1(\lambda) + \hbar\omega \quad (2.22)$$

Il s'en suit que les constantes de transition sont $n^{12} = 0$, $n^{23} = 0$ et $n^{13} = 1$, qui ne peuvent pas être ramenées toutes ensemble à zéro par changement de jauge $\tilde{n}^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta} + p^\beta - p^\alpha$ ($p^\alpha \in \mathbb{Z}$). Les quasi-énergies définissent donc une classe de Deligne de degré 1 non-triviale.

2.3.3 Degré 1 : Contrôle statique d'un système dissipatif et reservoir engineering

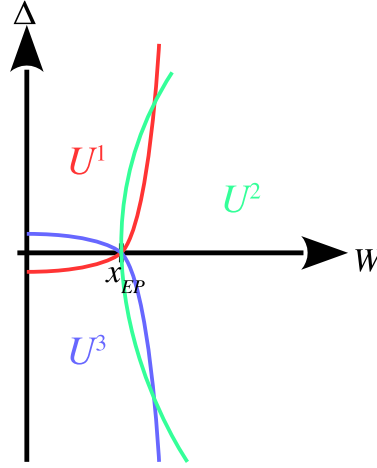
Considérons maintenant le contrôle statique associé à une famille d'Hamiltoniens non-autoadjoints $M \ni x \mapsto H(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($H(x)^\dagger \neq H(x)$). Le degré de complexité supplémentaire par rapport au contrôle statique usuel réside dans le fait que le système est ouvert dans le sens où l'environnement provoque un phénomène de dissipation. La particularité de tels systèmes réside dans la présence de points exceptionnels (EP) c'est à dire de points où deux valeurs propres se croisent sans induire une augmentation de la multiplicité géométrique : il y a coalescence des deux vecteurs propres en même temps que croisement des valeurs propres. Considérons un exemple simple :

$$H(x) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & W \\ W & 2\Delta - i\frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

avec $x = (W, \Delta) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, qui correspond à un modèle simple d'Hamiltonien effectif (dans l'approximation d'onde tournante à un photon) où un état lié est couplé avec un continuum via une résonance de largeur Γ (supposée constante) par un champ laser d'amplitude E proportionnelle à $W = |\langle 0 | \vec{\mu} \cdot \vec{E} | 1 \rangle|$ ($\vec{\mu}$ moment dipolaire électrique) et de detuning $\Delta = \omega_{01} - \omega_l$ (ω_{01} fréquence de Rabi de la transition entre les deux niveaux, ω_l fréquence du laser). Les valeurs propres de $H(x)$ sont

$$\lambda_0(x) = \frac{\hbar}{2} (z - \sqrt{W^2 + z^2}) \quad (2.24)$$

$$\lambda_1(x) = \frac{\hbar}{2} (z + \sqrt{W^2 + z^2}) \quad (2.25)$$


 FIGURE 2.3 – $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et son recouvrement en trois ouverts.

avec $z = \Delta - i\frac{\Gamma}{4}$. On a un point exceptionnel $x_{EP} = (\frac{\Gamma}{4}, 0)$. On pose $w = \sqrt{W^2 + z^2}$. Les vecteurs propres droits associés sont

$$\phi_0^+(x) = \begin{pmatrix} z + w \\ -W \end{pmatrix} \quad \phi_1^+(x) = \begin{pmatrix} W \\ z + W \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

pour le feuillet de Riemann tel que $\sqrt{z^2} = z$, ou

$$\phi_0^-(x) = \begin{pmatrix} W \\ z - w \end{pmatrix} \quad \phi_1^-(x) = \begin{pmatrix} z - W \\ -W \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

pour le second feuillet de Riemann où $\sqrt{z^2} = -z$. Les vecteurs propres héritent donc de la multivaluation de la surface de Riemann associée à la racine carrée complexe, le point de branchement correspondant à x_{EP} , et $[0, \frac{\Gamma}{4}[\times\{0\}$ (ligne de croisement des parties réelles des valeurs propres) étant l'image de la coupure de la surface de Riemann. Ainsi si l'on suit continûment les paramètres x autour de x_{EP} on passera d'un feuillet de Riemann à l'autre et par exemple de ϕ_0^+ à ϕ_1^- . Pour lever la difficulté de la multivaluation on considère trois cartes $\{U^1, U^2, U^3\}$ comme sur la figure 2.3. L'évolution est alors donnée par

$$\psi_x^\alpha(t) = \begin{pmatrix} c_0(x) & c_1(x) \end{pmatrix} V_x^\alpha(t) \begin{pmatrix} \phi_0^+(x) \\ \phi_1^+(x) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

avec $c_a(x) = \langle \phi_a^{*+}(x) | \psi_0 \rangle$ ($\{\phi_a^{*+}(x)\}_a$ étant les vecteurs propres gauches tels que $\langle \phi_a^{*+}(x) | \phi_b^+(x) \rangle = \delta_{ab}$), et $V_x^\alpha(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\hbar^{-1}\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & e^{-i\hbar^{-1}\lambda_1 t} \end{pmatrix}$ avec des constantes de transition $g^{12}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\forall x \in U^1 \cap U^2$; $g^{23}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall x \in U^2 \cap U^3$; mais $g^{13}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\forall x \in U^1 \cap U^3$ pour

prendre en compte l'inversion d'états issue du changement du feuillet de Riemann lorsque l'on suit continûment les paramètres x à travers la coupure. V_x^α prend place dans $\begin{matrix} P & \leftarrow G \\ \downarrow & \\ (M \setminus \{x_{EP}\}) & \end{matrix}$ (x_{EP} est un

défaut topologique ponctuel) avec pour groupe de jauge $G = (\mathbb{C}^*)^2 \times S_2$ (où S_2 est le groupe des permutations à deux éléments)²⁰. Les constantes de transition n'étant pas réductibles à la matrice identité

20. On peut être étonné que cette classe de Deligne de degré 1 soit réalisée par un espace fibré principal et non par un produit cartésien, mais il s'agit d'un cas un peu particulier où le fibré est dit de pure torsion – ce qui le distingue d'un produit cartésien sont des fonctions de transition dans un groupe discret et pas dans un groupe de Lie –.

par changement de jauge, la classe de Deligne de degré 1 est non-triviale.

Le *reservoir engineering* [PCZ96] consiste à considérer un système ouvert dont la dynamique est induite par une équation de Lindblad $i\hbar\dot{\rho} = \mathcal{L}_x(\rho)$ dont le Lindbladien \mathcal{L}_x (ou ce qui revient au même les opérateurs de jumps $\Gamma_{k,x}$ qui le définissent) dépend de paramètres x . Il s'agit alors d'ajuster x afin que l'évolution induite par l'équation de Lindblad soit telle que $\|\rho(T) - \rho_{target}\|$ soit minimal. Par exemple, on peut considérer le contrôle d'un atome dans une cavité à la température T_1 , en présence d'un objet de température T_2 dans la cavité. L'atome est en contact avec les champs thermiques émis par les parois de la cavité et par l'objet, induisant l'équation de Lindblad. Les paramètres de contrôle x sont alors les températures T_1, T_2 , la distance de l'atome à l'objet, voire la forme de l'objet si celle-ci est modifiable, etc. Dans la représentation de Liouville, l'équation de Lindblad prend la forme d'une équation de Schrödinger $i\hbar|\dot{\rho}\rangle\rangle = L_x|\rho\rangle\rangle$, avec $L_x^\dagger \neq L_x$ (la transconjugué étant définie pour le produit scalaire de Hilbert-Schmidt $\langle\langle\sigma|\tau\rangle\rangle = \text{tr}(\sigma^\dagger\tau)$). Il vient que le reservoir engineering est équivalent au contrôle statique d'un système dissipatif, où les points exceptionnels jouent le même rôle (on notera néanmoins que la structure de L_x est assez différente de l'exemple $H(x)$ donné en début de ce paragraphe, il y a donc des spécificités au reservoir engineering que l'on ne discutera pas ici, mais on notera néanmoins la présence d'une valeur propre nulle systématique pour L_x associée à l'état stationnaire – *steady state* – et qui n'est jamais impliquée dans un EP).

2.3.4 Degré 2 : Contrôle adiabatique d'un système fermé

On considère à nouveau une famille d'Hamiltoniens auto-adjoints $M \ni x \mapsto H(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($\dim \mathcal{H} < +\infty$). On cherche cette fois à réaliser un contrôle dynamique, à savoir trouver un trajectoire $[0, T] \ni t \mapsto x(t) \in M$ (décrivant un chemin \mathcal{C} dans M), telle que $\|\mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1} \int_0^T H(x(t)) dt} \psi_0 - \psi_{target}\|$ soit minimal. On considère à nouveau les vecteurs propres instantanés (normalisés) : $\forall x \in U^\alpha$

$$H(x)\phi_a^\alpha(x) = \lambda_a(x)\phi_a^\alpha(x) \quad (2.29)$$

avec λ_a de classe \mathcal{C}^1 et ϕ^α fortement de classe \mathcal{C}^2 . On suppose les valeurs propres non-dégénérées (sauf éventuellement en des points de croisement isolés). Supposons que la condition initiale puisse être décomposée sur un petit nombre de ces vecteurs propres : $\psi_0 = \sum_{a \in I} c_a \phi_a^\alpha(x(0))$. Si le chemin \mathcal{C} reste dans U^α et ne conduit à aucun point de croisement entre $\{\lambda_a(x)\}_{a \in I}$ ni avec $\{\lambda_a(x)\}_{a \notin I}$, alors l'application d'un théorème adiabatique [Kat50] conduit à

$$\psi(t) = \mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t H(x(t')) dt'} \psi_0 \quad (2.30)$$

$$= \sum_{a \in I} c_a e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \lambda_a(x(t')) dt'} e^{\int_{\mathcal{C}: x(0) \rightarrow x(t)} A_a^\alpha} \phi_a^\alpha(x(t)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (2.31)$$

$e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \lambda_a(x(t')) dt'}$ est appelée phase dynamique; et $e^{\int_{\mathcal{C}: x(0) \rightarrow x(t)} A_a^\alpha}$ est appelée phase géométrique (ou phase de Berry) [Ber84] et est générée par

$$A_a^\alpha = \langle \phi_a^\alpha | d\phi_a^\alpha \rangle \in \Omega^1(M, i\mathbb{R}) \quad (2.32)$$

d étant la différentielle extérieure de M . Les vecteurs propres sont soumis aux changements de phases locales : $\tilde{\phi}_a^\alpha(x) = e^{i\zeta^\alpha(x)} \phi_a^\alpha(x)$, qui induit un changement de jauge pour le potentiel de Berry : $\tilde{A}_a^\alpha =$

$A_a^\alpha + i d\zeta^\alpha$. Les phases géométriques prennent place dans le fibré principal $\begin{array}{c} P_a \leftarrow G \\ \downarrow \\ M \end{array}$ de groupe de jauge

$G = U(1)$ (changements de phase) équipé de la connexion définie par le potentiel A^α [Sim83]. P_a est en général non-trivial, les points de croisement de λ_a constituant ses défauts topologiques. Même en

leur absence, si par exemple $M \simeq \mathbb{S}^2$ est une sphère, P_a peut être non-trivial (voir l'exemple initial de Berry [Ber84] avec $H(x) = x^i S_i$ où $S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$ sont les opérateurs de spins). Les fonctions de transitions $g_a^{\alpha\beta}(x) \in U(1)$ correspondent à des changements de phase à l'intersection de deux cartes, qui sont nécessaires pour assurer l'existence de fonctions propres ϕ_a^α normées de classe \mathcal{C}^1 (le problème venant du fait que l'on ne peut pas normaliser globalement les vecteurs propres tout en respectant la condition que ceux-ci soient continus et dérivables). On a alors $A_a^\beta(x) = A_a^\alpha(x) + d \ln g_a^{\alpha\beta}(x)$ (pour $x \in U^\alpha \cap U^\beta$). Considérons un exemple simple :

$$H(x) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega e^{i\varphi} \\ \Omega e^{-i\varphi} & 2\Delta \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

qui correspond à un atome à deux niveaux contrôlé par un champ laser dans l'approximation d'onde tournante à un photon, avec $x = (\Omega, \Delta, \varphi) \in M = \mathbb{R}^3$, $\Omega = |\langle 1 | \vec{\mu} \cdot \vec{E} | 2 \rangle|$, $\Delta = \omega_{12} - \omega_l$ (le detuning) et φ la phase du laser. Les valeurs propres sont $\lambda_\pm(x) = \frac{\hbar}{2}(\Delta \pm \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2})$. On a croisement (et donc défaut topologique en $\Omega = \Delta = 0$). On pose $r = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$ et $\theta = \arctan \frac{\Omega}{\Delta}$, (r, θ, φ) constitue un système de coordonnées sphériques pour M . On introduit deux cartes, $U^N = \{(r, \theta, \varphi) | r \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, \frac{\pi}{2} + \epsilon[, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ et $U^S = \{(r, \theta, \varphi) | r \in \mathbb{R}^+, \theta \in]\frac{\pi}{2} - \epsilon, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ (ϵ étant une constante de petite valeur). Pour $x \in U^N$ on définit les vecteurs propres normalisés par

$$\phi_+^N(x) = \frac{1}{\sqrt{2r(r+\Delta)}} \begin{pmatrix} \Omega e^{i\varphi} \\ \Delta + r \end{pmatrix} \quad \phi_-^N(x) = \frac{1}{\sqrt{2r(r+\Delta)}} \begin{pmatrix} -\Delta - r \\ \Omega e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

On remarque que l'on ne peut pas prolonger sur tout M ces vecteurs propres car les normalisations divergent pour $\Delta = -r$. Pour $x \in U^S$ on a

$$\phi_+^S(x) = \frac{1}{\sqrt{2r(r-\Delta)}} \begin{pmatrix} -\Delta + r \\ \Omega e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad \phi_-^S(x) = \frac{1}{\sqrt{2r(r-\Delta)}} \begin{pmatrix} \Omega e^{i\varphi} \\ \Delta - r \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

qui ne peuvent pas non plus être prolongés sur tout M car les normalisations divergent pour $\Delta = r$. Sur l'intersection des cartes on a les fonctions de transition des fibrés P_+ et P_- , $\forall x \in U^N \cap U^S$

$$g_\pm^{NS}(x) = \langle \phi_\pm^N(x) | \phi_\pm^S(x) \rangle = \pm e^{-i\varphi} \quad (2.36)$$

En revenant au cas général, le transport adiabatique de tous les états est décrit par le fibré $\bigoplus_{a \in I} P_a \leftarrow G^{\#I}$ \downarrow M .

Cette approche peut être généralisée aux cas où une valeur propre est dégénérée (phases géométriques non-abéliennes) [WZ84], où l'évolution n'est pas adiabatique dans I mais seulement vis à vis de l'extérieur de I (phases géométriques ne commutant pas avec les phases dynamiques) [Vie05], ou à des phases géométriques non-adiabatiques [AA87].

On remarquera que l'hypothèse adiabatique stipule que le temps du contrôle T doit être grand (pour que l'erreur soit petite) c'est à dire que la variation des paramètres de contrôle soit lente. On a donc ici deux échelles de temps caractéristiques, celle des oscillations de Rabi $\tau_q = \max_{a,b \in I} \sup_{x \in M_0} \frac{\hbar}{|\lambda_a(x) - \lambda_b(x)|}$ (M_0 étant M privée du voisinage des croisements) et celle du contrôle T , avec la condition $\tau_q \ll T$. $[\ln g, A]_{\mathcal{D}} \in H_{\mathcal{D}}^2(M_0)$ constitue une classe de Deligne de degré 2 non-triviale.

2.4 Sur le contrôle adiabatique

Avant de poursuivre et bien que cela ne soit pas le cœur de la discussion de ce manuscrit, il me semble nécessaire de faire une petite digression sur les techniques de contrôle adiabatique. Pour des raisons de simplification et de clarification de l'exposé, je ne présente souvent le contrôle adiabatique que comme le transport d'un unique état propre instantané ou comme le transport parallèle d'états propres instantanés sans modification des poids de la superposition de ceux-ci. Si le contrôle adiabatique se résumait à cela,

la contrôlabilité serait relativement faible. Comme évoqué dans la section précédente, les croisements d'états jouent un rôle important dans la contrôlabilité. En passant rapidement à travers un croisement (avec un chemin C^1 dans M), les populations des deux états impliqués s'échangent. Le prix à payer est une dégradation de l'approximation adiabatique (qui passe d'une erreur en $\mathcal{O}(1/T)$ à une erreur en $\mathcal{O}(1/\sqrt{T})$) [Teu03], sauf à suivre précisément certaines courbes intégrales le long desquelles s'annulent les couplages non-adiabatiques [CM15]. Mieux encore, avec un chemin faisant un coude au niveau du croisement, on peut mélanger les deux populations suivant une matrice de mélange $\begin{pmatrix} \sin \xi & \cos \xi \\ -\cos \xi & \sin \xi \end{pmatrix}$ où ξ est le demi-angle du coude [BCCS12]. Du fait que cet effet s'appuie sur des effets non-adiabatiques au niveau du croisement, on parlera d'un régime adiabatique plus faible que si l'on évitait les croisements de niveaux. Il faut remarquer que dans cette approche, si l'on peut espérer contrôler les populations des états, ce n'est pas le cas des phases relatives entre ceux-ci.

Dans le cas où l'on considérerait une valeur propre dégénérée sur toute la variété de contrôle, le générateur de la phase géométrique devient matriciel, $A \in \Omega^1(M, \mathfrak{u}(n))$, avec $[A_a]_{ij} = \langle a, i, x | d | a, j, x \rangle$ (n est le degré de dégénérescence de λ_a et $\{|a, i, x\rangle\}_{i=1, \dots, n}$ est un choix de vecteurs orthonormés formant une base du sous-espace propre associé à λ_a). La phase géométrique devient alors matricielle (on parle de phase non-abélienne). Il est alors possible de manipuler la superposition des états $\{|a, i, x\rangle\}_{i=1, \dots, n}$ en

étudiant les holonomies $\mathbb{P}_{\leftarrow} \mathcal{E}_C^A$ du fibré $\begin{array}{ccc} P \leftarrow U(n) & & \\ \downarrow & & \\ M & & \end{array}$. C'est le principe du calcul quantique holonomique

(HQC) [Luc05].

Enfin, on pourrait simplement considérer le transport d'un groupe d'états propres instantanés $\{|a, x\rangle\}_{a \in I}$ (généralisant ce que l'on appelle un espace actif), en permettant tout échange non-adiabatique à l'intérieur du groupe, mais pas avec l'extérieur. On a alors à nouveau une phase géométrique non-abélienne $[A_I]_{ab} = \langle a, x | d | b, x \rangle$ (dont les termes non-diagonaux correspondent aux effets non-adiabatiques), mais aussi une phase dynamique matricielle $E_I = \text{diag}(\lambda_a; a \in I)$, non-séparée de la phase géométrique et qui ne commute pas avec elle. On a alors un régime adiabatique encore plus faible que le précédent. C'est ce sujet que j'ai principalement étudié au cours de ma thèse.

Enfin on pourrait vouloir s'affranchir de l'approximation adiabatique. Cela est possible tout en conservant l'approche géométrique. Pour cela il faut étudier la dynamique quantique comme un relèvement horizontal sur un espace fibré dont la variété de base B représente l'espace des états quantiques "dépouillés" (états normés sans phase (sous-espace unidimensionnel) ou sous-espace actif de petite dimension, par exemple). La difficulté est alors que le contrôle n'entre pas directement dans la modélisation géométrique. En fait dans le cas du contrôle adiabatique, on a une application $f : M \rightarrow B$ qui permet de définir le fibré adia-

batique à partir de celui de la dynamique $\begin{array}{ccc} P \xleftarrow{f^*} U & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & B \end{array}$ ²¹. Dans l'approche adiabatique f est obtenue

par la diagonalisation de l'Hamiltonien (ou d'un Hamiltonien effectif, d'un Hamiltonien de quasi-énergies, etc.) , au sens où $f(x) = |a, x\rangle\langle a, x| \in B$. En dehors de l'approximation adiabatique, il est difficile d'exhiber une application qui de façon univoque associe à un point de la variété de contrôle un unique état (ou sous-espace actif). Cela suppose d'avoir un formalisme où tous les effets souvenirs du chemin parcouru au cours du contrôle puissent être totalement reportés dans l'holonomie du relèvement horizontal. Or il n'y a pas à ma connaissance d'autres situations qu'une approximation adiabatique (fut-elle très faible et portant sur les états propres d'un Hamiltonien effectif) pour laquelle c'est le cas. Nous allons rencontrer cette difficulté dans la suite; en effet avec les systèmes ouverts, il arrive que des "défauts" à l'adiabaticité forte induits par l'action de l'environnement obéissent à des équations non-linéaires. Or l'approche adiabatique est inefficace dans ce cas où l'on ne peut pas étudier la dynamique à partir d'équations aux valeurs propres.

21. f^* est l'induction de fibré consistant à prendre $f^*U = U|_{f(M)}$ avec une projection sur M définie afin que le diagramme commute [RF77].

D'une manière générale, on peut considérer que la structure géométrique du contrôle est définie par le diagramme commutatif ci-dessus des fibrés adiabatique et de la dynamique. Ainsi un problème de contrôle consiste à trouver un chemin \mathcal{C} dans M , tel que $\text{Hol}(f(\mathcal{C})) \simeq U_{target}$ dans U (le relèvement horizontal de l'image de \mathcal{C} dans le fibré de la dynamique doit arriver sur la cible du contrôle - au moins de manière

$$\begin{array}{ccc}
 f_*(U_{target}) & \xleftarrow{f^*} & U_{target} \\
 \pi_P \downarrow & & \uparrow \text{Hol} \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & f(\mathcal{C})
 \end{array}$$

approchée -). Il vient que la solution du contrôle est $\mathcal{C} = \pi_P(f^*(U_{target}))$:

Tout le problème de mes recherches et de généraliser cela à des états mixtes soumis à des effets environnementaux.

En résumé

Les classes de cohomologie de Deligne mesurent la "forme" des théories de champs ou plutôt des théories de jauge. Elles se réalisent géométriquement comme des fibrations, celles-ci définissant les variétés ou les catégories sur lesquelles les champs sont définis. Il est clair que pour l'électromagnétisme, le degré de Deligne correspond à une augmentation de la complexité : le degré 1 trivial correspond à l'électrostatique (champ électrique), le degré 1 non-trivial correspond à la magnétostatique (excitation magnétique), le degré 2 à l'électrodynamique des particules élémentaires, le degré 3 à l'électrodynamique 2-forme de la théorie des cordes. On trouve une progression similaire pour le contrôle quantique. Le contrôle statique de systèmes fermés est associé à une classe de degré 1 triviale, le contrôle quasi-statique de systèmes fermés à une classe de degré 1 non-triviale, le contrôle adiabatique de systèmes fermés à une classe de degré 2. On peut donc s'attendre à ce que le contrôle adiabatique de systèmes ouverts, du fait de la complexité supplémentaire, soit associé à une classe de degré 3. D'autant que dans ces cas, nous aurons à comparer 3 échelles de temps : le temps propre quantique des oscillations de Rabi τ_q , le temps du contrôle T et le temps caractéristique d'échange/d'interaction entre le système et l'environnement τ_{int} .

Publications

Mes travaux concernant les structures fibrées de hautes théories de jauge peuvent être trouvés ci-dessous :

- [24] [D. Viennot](#), *Holonomy of a principal composite bundle connection, non-abelian geometric phases and gauge theory of gravity*, J. Math. Phys. **51**, 103501 (2010) [arXiv :1003.4591].
- [25] [D. Viennot](#), *Non-abelian higher gauge theory and categorical bundle*, J. Geom. Phys. **110**, 407 (2016) [arXiv :1202.2280].

Première partie

Distorsions du contrôle d'un ensemble de systèmes quantiques

Chapitre 3

Dynamique d'un système de spins asservi à un système dynamique classique

Dans cette partie nous allons nous intéresser au contrôle de la dynamique de systèmes quantiques pour lesquels le seul effet de l'environnement est le processus de distorsion qui ajoute du bruit au signal de contrôle. Nous allons donc considérer des systèmes dynamiques gouvernés par des familles d'Hamiltoniens autoadjoints de la forme $H(x, \delta y) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ où $x \in M$ sont les paramètres de contrôle, et $\delta y \in \Gamma$ est un point de l'espace de phase Γ décrivant les processus de bruit induits par l'environnement. On a alors une équation de Schrödinger de la forme :

$$i\hbar\dot{\psi} = H(x(t), \delta y(t))\psi(t) \quad \psi \in \mathcal{H} \quad (3.1)$$

où $t \mapsto x(t)$ est le signal de contrôle (supposé imposé par l'opérateur du contrôle) et $t \mapsto \delta y(t)$ est une trajectoire de phase du système dynamique décrivant le bruit. $\delta y(t)$ peut être un système dynamique déterministe mais dont la condition initiale est aléatoire ou être un processus stochastique. Souvent le bruit se superpose au signal de contrôle $H(x(t) + \delta x(t))$ mais il n'y a pas de raison de supposer qu'il ne peut pas aussi agir indépendamment $H_{ctrl}(x(t)) + H_{noise}(\delta y(t))$ (par des champs de réponse de l'environnement au contrôle par exemple). Du fait du bruit, on peut modéliser le système par l'état mixte issu de la dynamique du système et de la méconnaissance statistique induite par le processus aléatoire :

$$\rho(t) = \mathbb{E} (|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|) \quad (3.2)$$

où \mathbb{E} est l'espérance mathématique sur la distribution aléatoire des conditions initiales du système dynamique et/ou sur le processus stochastique. La signification de la matrice densité ρ peut être simplement la modélisation de notre méconnaissance sur l'état réel du système du fait des processus aléatoires, l'entropie de von Neumann $S_{vN}(\rho) = -\text{tr}(\rho \ln \rho)$ est alors la mesure du manque d'information sur le système. On peut aussi considérer que l'on ne contrôle pas un système quantique unique, mais tout un ensemble de copies identiques à un système modèle. Chacune des copies voyant son propre bruit, différent des autres du fait des processus aléatoires. Si l'ensemble de ces copies n'interagissent pas entre elles, alors ρ correspond à la moyenne des états de toutes les copies et est associé aux mesures sur la collectivité des copies. Les phénomènes de décohérence que l'on pourrait alors observer (décohérence falsifiée au sens de Joos [Joo07]) correspondraient à des "déphasages" entre les copies. L'entropie de von Neumann serait alors la mesure du désordre dans la collectivité (au sens où un ensemble où toutes les copies sont dans le même état est parfaitement ordonné, et où un ensemble où l'on trouve "tous" les états possibles est très désordonné). L'entropie de von Neumann est alors totalement équivalente à sa version classique, l'entropie de Shannon (ou de Boltzmann). Dans le cas où les différentes copies interagissent entre elles, la dynamique prend la forme :

$$i\hbar\dot{\Psi} = \left(\sum_{i=1}^N 1_{\mathcal{H}^{\otimes(i-1)}} \otimes H(x(t), \delta y_i(t)) \otimes 1_{\mathcal{H}^{\otimes(N-i)}} + H_{int} \right) \Psi(t) \quad \Psi \in \mathcal{H}^{\otimes N} \quad (3.3)$$

$H_{int} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\otimes N})$ étant l'Hamiltonien d'interaction entre les N copies, et δy_i le bruit vu par la i -ème copie. Du fait de l'interaction, Ψ n'est certainement pas un état séparable, et on doit attribuer à chaque copie un état mixte $\rho_i = \text{tr}_i |\Psi\rangle\rangle\rangle\langle\langle\Psi|$ (où ici tr_i désigne la trace partielle sur $\mathcal{H}^{\otimes N}$ privé de la i -ème occurrence de \mathcal{H}). On peut alors définir la matrice densité moyenne :

$$\rho(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i(t) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\rho_{\bullet}(t)) \quad (3.4)$$

où ρ_{\bullet} serait l'état moyen d'une copie soumise aux interactions avec toutes les autres et fonction des processus aléatoires. Dans ce cas l'entropie de von Neumann $S_{vN}(\rho) \simeq S_{vN}(\mathbb{E}(\rho_{\bullet}))$ mesure non seulement le désordre dans l'ensemble mais aussi l'intrication moyenne des copies entre elles. Les phénomènes de décohérence (vraie décohérence au sens de Joos [Joo07]) traduisent alors une véritable corrélation quantique non-locale. L'intrication d'une copie étant mesurée par $S_{vN}(\rho_i)$, l'intrication moyenne est obtenue comme $S_{ent} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{vN}(\rho_i) \simeq \mathbb{E}(S_{vN}(\rho_{\bullet}))$. On peut alors poser comme mesure du désordre $S_{dis} = S_{vN}(\rho) - S_{ent} \simeq S_{vN}(\mathbb{E}(\rho_{\bullet})) - \mathbb{E}(S_{vN}(\rho_{\bullet}))$.

Les questions qui peuvent se poser sont les suivantes :

- Quelle est l'amplitude de la gêne du contrôle par le bruit ? Peut-on utiliser le bruit à notre profit dans le contrôle plutôt que de le subir ?
- Le désordre dans l'ensemble des systèmes dynamiques modélisant le bruit (induit par les processus aléatoires), se transmet-il sous forme de désordre ou d'intrication aux systèmes quantiques ? Quels sont les caractéristiques dynamiques de cette transmission (efficacité, temps caractéristique, régimes transitoire et permanent,...) ?
- Y a-t-il des signatures dans la dynamique quantique des propriétés classiques du système dynamique modélisant le bruit ? Pourrait-on alors utiliser les mesures sur l'état mixte du système quantique pour diagnostiquer les propriétés du bruit induites par l'environnement ?

Ce chapitre résume mes travaux concernant les réponses à ces questions. La section suivante présente les modèles que j'ai choisis d'étudier (des ensembles de spins contrôlés par des frappes ultra-courtes) et les différents modèles de bruit qui peuvent être étudiés. Les sections suivantes résument les comportements observés pour les deux cas fondamentaux, celui d'un bruit aléatoire et celui d'un bruit chaotique. Dans ces études qui se focalisent sur l'effet du bruit, le signal de contrôle sera fixe, c'est à dire que le bruit sera la seule source de variation temporelle. La dernière section s'intéresse à la superposition du bruit à un signal de contrôle non-trivial ayant un objectif déterminé.

La totalité des travaux résumés dans ce chapitre ont été réalisés dans le cadre de la thèse de Lucile Aubourg [Aub17], dont la contribution a été essentielle. Ils reposent sur l'étude d'une série "d'expérimentations numériques" qui ont été entièrement réalisées par Lucile (de la programmation des simulations au travail de variations des paramètres pour mettre en évidence les différents comportements). Toutes les publications relevant de ce chapitre ont été cosignées avec elle.

3.1 Le modèle de système quantique asservi

3.1.1 Le modèle des systèmes de spins contrôlés par des frappes ultra-courtes

Pour étudier les systèmes quantiques asservis à des systèmes classiques, nous avons considéré comme système modèle un ensemble de spins $\frac{1}{2}$ soumis à des frappes ultra-courtes, où le système dynamique est porté par les variations de l'amplitude, du retard et de l'orientation des frappes. Pour être plus précis, nous

considérons qu'un spin (numéroté i) est soumis (hors couplage avec les autres spins) à un Hamiltonien de la forme :

$$H^i(t) = \frac{\hbar\omega_1}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow| + \hbar \sum_{n \in \mathbb{N}} W_n^i \lambda_n^i \delta(t - nT + \tau_n^i) \quad (3.5)$$

τ_n^i est le retard de la n -ième frappe, λ_n^i est son intensité, et $W_n^i = |w_n^i\rangle\langle w_n^i|$ est le n -ième opérateur de frappe (supposé être un projecteur de rang 1), $|w_n^i\rangle \in \mathbb{C}^2$ est la direction (dans l'espace de Hilbert du spin) de la n -ième frappe, $\frac{\hbar\omega_1}{2}$ est l'énergie de levée de dégénérescence Zeeman induite par un champ magnétique extérieur constant dans la direction z , et T est la période des frappes. L'intérêt de ce modèle est qu'il est relativement simple (et donc facile à étudier) et qu'en l'absence de couplages entre les spins, l'intégration de la dynamique stroboscopique (tous les nT) est complètement analytique. Néanmoins les différentes possibilités de couplage entre les spins (plus proches voisins le long d'une chaîne ou sur une matrice, couplages anisotropes type Heisenberg, isotropes type Ising-Z (le long du champ Zeeman) ou Ising-X (orthogonal au champ Zeeman), ou autre type XXZ, etc) permettent une grande diversité de sujets d'étude. Le choix de frappes ultra-courtes permet de considérer des systèmes dynamiques discrets souvent plus faciles à étudier et à simuler que leurs homologues en temps continu. Cela ne restreint pas la généralité puisque tout système dynamique en temps continu est approchable (par discrétisation) par un système dynamique discret¹. Ce choix de modèle ne concerne que les expérimentations numériques qui nécessitent de fixer quelque peu le sujet d'étude, mais la réflexion concernant la théorie de l'asservissement d'un système quantique à un système dynamique classique se veut être dans la mesure du possible plus générale. On notera Γ l'espace de phase du système dynamique classique, dans le modèle $\Gamma = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{T}^2$, \mathbb{S}^2 est la sphère de Bloch de la direction de frappe $|w\rangle = \cos \alpha |\uparrow\rangle + e^{i\beta} \sin \alpha |\downarrow\rangle$ ((α, β) étant la colatitute et la longitude de \mathbb{S}^2); \mathbb{T}^2 est le tore généré par $\lambda \in [0, 2\pi]$ et $\vartheta = 2\pi \frac{\tau}{T}$ (retard "angulaire" de frappe). La raison pour laquelle nous considérons l'intensité des frappes comme formant un cercle vient de la périodicité en λ de l'opérateur d'évolution sur une période temporelle : $U_n^i = e^{-i \frac{H_0}{\hbar\omega_0} (2\pi - \vartheta_n^i)} (1_{\mathbb{C}^2} + (e^{-i\lambda_n^i} - 1)W_n^i) e^{-i \frac{H_0}{\hbar\omega_0} \vartheta_n^i}$ ($\vartheta_n^i = \frac{2\pi\tau_n^i}{T}$ et $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$).

Dans la plupart des cas, nous fixons la direction de frappe ce qui restreint l'espace de phase à $\Gamma = \mathbb{T}^2$ (la direction de frappe n'étant plus utilisée que comme un paramètre extérieur que l'on modifie d'une simulation à l'autre, comme d'ailleurs $\frac{\omega_1}{\omega_0}$). Nous considérons de plus le tore comme équipé de la mesure de probabilité de Haar μ , mesure microcanique : $d\mu(\lambda, \vartheta) = \frac{d\lambda d\vartheta}{4\pi^2}$, qui sera notre mesure de référence sur Γ (étant donné que l'on s'intéresse au désordre et au manque d'information induit par celui-ci dans les systèmes dynamiques classiques, ce choix paraît des plus naturels). $(\Gamma, \mathcal{T}, \mu)$ sera donc l'espace de probabilité sur lequel sont définis nos systèmes dynamiques (\mathcal{T} est la tribu borélienne de Γ). Pour simplifier, on notera $\theta \equiv (\lambda, \vartheta) \in \Gamma$.

3.1.2 Sur les différents types de bruit : la hiérarchie ergodique

Nous considérons ici un contrôle stationnaire dont l'évolution est entièrement caractérisée par du bruit modélisé dans Γ . On doit distinguer ici la distribution des conditions initiales $\rho_0 \in L^1(\Gamma, d\mu)$ ($\rho_0 \geq 0$, $\|\rho_0\|_1 = 1$) qui représente les petites variations du contrôle d'un spin à l'autre, du bruit qui est le processus dynamique qui modifie au cours du temps la distribution des paramètres de contrôle des spins. En choisit $\rho_0(\theta) = \frac{\mathbb{1}_{D_0}(\theta)}{\mu(D_0)}$ où $D_0 \in \mathcal{T}$ est une petite région de conditions initiales ($\mu(D_0) \ll 1$), $\mathbb{1}_{D_0}$ étant la fonction indicatrice sur D_0 . Une condition initiale θ_0^i sera tirée au sort suivant la loi ρ_0 . Le bruit sera un système dynamique.

Un système dynamique (en temps discret) est une application² $\varphi \in \text{Aut}(\Gamma)$ qui décrit l'évolution des paramètres classiques : $\theta_{n+1}^i = \varphi(\theta_n^i)$. On supposera ici que φ préserve la mesure, c'est à dire que $\forall A \in \mathcal{T}$, $\mu(\varphi(A)) = \mu(A)$ (cette restriction pourra par la suite être relâchée, il s'agit pour l'instant de comparer

1. l'inverse n'étant pas vrai, tout système à temps discret n'est pas interpolable en un système en temps continu
2. $\text{Aut}(\Gamma)$ est l'ensemble des automorphismes de Γ (applications bijectives de Γ dans Γ).

des systèmes entre eux du point de vue de leur comportement en tant que “bruit” indépendamment des effets de changement du “volume du bruit” (au sens de μ) au cours du temps). La définition minimale de ce que l’on peut appeler “bruit”, consiste à supposer qu’au cours du temps toutes les possibilités de θ peuvent survenir, c’est à dire que la dynamique $\{\varphi^n(\theta_0)\}_n$ parcourt tout Γ pour toute condition initiale θ_0 qui ne soit pas trop particulière (proprement dit $\{\varphi^n(\theta_0)\}_{n \in \mathbb{N}} = \Gamma$ pour μ -presque tout³ $\theta_0 - \overline{A}$ désignant la fermeture topologique de A –). Cette propriété de densité des orbites recouvre des situations bien différentes. Prenons deux exemples extrêmes. Soit X une partition finie de Γ en micro-états ($\bigcup_{\sigma \in X} \sigma = \Gamma$; $\forall \sigma, \tau \in X, \sigma \neq \tau, \mu(\sigma \cap \tau) = 0$). $\varphi(\theta)$ consiste en un point choisi au hasard suivant la distribution $\frac{\mathbb{1}_D(\theta)}{\mu(D_0)}$ pour $D = \bigcup_{\sigma \in Y} \sigma$ où Y est un ensemble de micro-états choisis au hasard dans X suivant une distribution uniforme et tels que $\mu(D) = \mu(D_0)$. Le processus défini par φ est une sorte de bruit blanc de résolution X , qui représente le bruit le moins prédictible possible. À l’inverse, un simple processus de dérive linéaire, $\varphi(\theta) = (\theta^1 + \frac{2\pi}{a}, \theta^2 + \frac{2\pi}{b}) \bmod (2\pi, 2\pi)$ avec $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$, est parfaitement prédictible. Les deux processus satisfont pourtant le principe de densité des orbites. Il vient qu’il est nécessaire de classifier les différents types de bruit en fonction du degré d’imprédictibilité de ceux-ci, la dérive linéaire ne pouvant pas être considérée véritablement comme du bruit. Cela est donné par la hiérarchie ergodique [LM94, BFK06]. Il existe plusieurs manières de définir les différents degrés de la hiérarchie, par souci de simplification nous donnerons seulement ici les définitions relatives au comportement de la corrélation à la n -ième itération :

$$\forall A, B \in \mathcal{T}, \quad C_n(A, B) = \mu(A \cap \varphi^n(B)) - \mu(A)\mu(B) \quad (3.6)$$

(on rappelle que $\mu(\varphi^n(B)) = \mu(B)$). Lorsque la corrélation devient nulle, l’image de B a une intersection avec celle de A en proportion du poids de chacune. La hiérarchie ergodique est la suivante :

Définition 1. *Un système dynamique est dit :*

- *ergodique* si $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} C_n(A, B) = 0, \forall A, B \in \mathcal{T}$;
- *mélangeant*⁴ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n(A, B) = 0, \forall A, B \in \mathcal{T}$;
- *Kolmogorov* si $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon > 0$ tel que $\forall n > n_\epsilon$ et $\forall B \in \sigma_n(A_1, \dots, A_r), |C(B, A_0)| < \epsilon$, pour certains $A_0, A_1, \dots, A_r \in \mathcal{T}$ ($\sigma_n(A_1, \dots, A_r)$ étant la plus petite sous-tribu de \mathcal{T} engendrée par $\{\varphi^k(A_i)\}_{k \geq n, i \in \{1, \dots, r\}}$) ;
- *Bernoulli* si $C_n(A, B) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall A, B \in X$ pour une certaine partition X de Γ d’éléments dans \mathcal{T} .

La hiérarchie est ici donnée de la propriété la plus faible à la plus forte, c’est à dire que : *Bernoulli* \Rightarrow *Kolmogorov* \Rightarrow *mélangeant* \Rightarrow *ergodique*.

La dérive linéaire est seulement ergodique, alors que le bruit blanc de résolution X est Bernoulli. Il existe des systèmes dynamiques qui ne sont pas aléatoires (Bernoulli), c’est à dire ne présentant pas une décorrélation immédiate, mais qui sont moins prédictibles que les processus du type dérive linéaire (ergodique) dont la décorrélation n’est qu’en moyenne sur le long terme. Ces systèmes présentent une décorrélation asymptotique (les systèmes Kolmogorov ayant une corrélation tendant vers 0 pour une topologie plus forte que les systèmes mélangeants). Considérons quatre exemples : une dérive linéaire $\varphi(\theta) = (\theta^1 + \frac{2\pi}{2}, \theta^2 + \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}) \bmod (2\pi, 2\pi)$ qui est ergodique, l’application du chat d’Arnold $\varphi(\theta) = (\theta^1 + \theta^2, \theta^1 + 2\theta^2) \bmod (2\pi, 2\pi)$ qui est mélangeante, l’application du boulanger $\varphi(\theta) = \begin{cases} (2\theta^1, \frac{\theta^2}{2}) & \text{si } \theta^1 \leq \pi \\ (2\theta^1 - 2\pi, \frac{\theta^2}{2} + \pi) & \text{sinon} \end{cases}$ qui est Kolmogorov, et le bruit blanc pour une partition du tore en 12566×12566 cellules carrées qui est Bernoulli. Les différentes dynamiques sont représentées figure

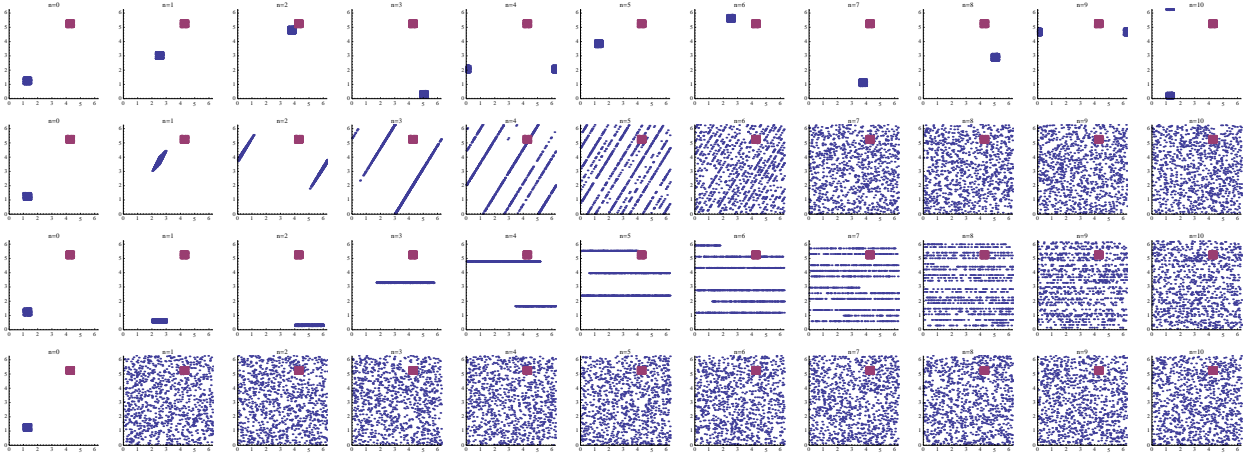


FIGURE 3.1 – Les itérations de $n = 0$ à $n = 10$ (de gauche à droite) pour (de haut en bas) un processus de dérive linéaire (système ergodique), l’application du chat d’Arnold (système mélangeant), l’application du boulanger (système de type Kolmogorov) et le bruit blanc de résolution 12566×12566 (système de type Bernoulli). En bleu les ensembles $\varphi^n(B)$ et en magenta un ensemble fixe A représentés par 1000 points. Le tore $\Gamma = \mathbb{T}^2$ est représenté “déplié” comme un carré dont on identifie deux à deux les côtés ($\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$).

3.1. Les applications du chat d’Arnold et du boulanger, bien que parfaitement déterministes semblent indistingues sur le long terme d’un processus aléatoire. En fait il s’agit de systèmes dynamiques chaotiques [LM94].

Définition 2 (Systèmes chaotiques). *Un système dynamique est chaotique sur Γ (au sens de Wiggins) si*

- φ est mélangeante ;
- φ présente une sensibilité aux conditions initiales (S.C.I.), i.e. $\exists \delta > 0$ tel que $\forall \theta \in \Gamma, \forall \epsilon > 0, \exists \theta' \in \Gamma, \|\theta - \theta'\| < \epsilon$ et $\exists n \in \mathbb{N}^*$ avec $\|\varphi^n(\theta) - \varphi^n(\theta')\| > \delta$.

La S.C.I. est la propriété d’amplification des erreurs initiales au cours du temps. La vitesse de l’amplification des erreurs est donné par l’exposant de Lyapunov, que l’on peut définir comme ⁵

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{\|\varphi^n(\theta + \delta\theta) - \varphi^n(\theta)\|}{\|\delta\theta\|} \quad (3.7)$$

c’est à dire $\|\varphi^n(\theta + \delta\theta) - \varphi^n(\theta)\| \sim e^{n\lambda} \|\delta\theta\|$. Autrement dit, le système dynamique est prédictible sur un nombre d’itérations de l’ordre $\frac{1}{\lambda}$ (appelé horizon de prédictibilité du système). Lorsque l’on considère de multiples copies du système dynamique avec des conditions initiales légèrement différentes (comme sur la figure 3.1), l’horizon de prédictibilité est l’ordre de grandeur sur lequel la dispersion des copies est encore distinguable d’un processus aléatoire. Le bruit peut être défini par un accroissement du désordre dans la répartition des copies sur Γ . Le désordre dans Γ peut être mesuré par l’entropie de Shannon. Soit X une partition de Γ (supposée suffisamment fine par rapport aux phénomènes étudiés). L’entropie de Shannon de l’ensemble des copies du système dynamique est donnée par

$$S_{Sh,n} = - \sum_{\sigma \in X} p_n(\sigma) \ln p_n(\sigma) \quad (3.8)$$

3. $\forall \theta_0 \in \Gamma \setminus F$, où F est le domaine où la propriété est fautive et qui est tel que $\mu(F) = 0$.

4. fortement mélangeant, nous n’aborderons pas le cas du faiblement mélangeant.

5. on assume ici pour la simplicité de la discussion que le système est ergodique sur tout Γ , le cas de la présence de plusieurs composantes ergodiques indépendantes ou d’îlots de stabilité n’est pas discuté.

où $p_n(\sigma)$ est la fraction de copies du système se trouvant dans le micro-état $\sigma \in X$ à la n -ième itération. Pour les systèmes aléatoires (de type Bernoulli), l'entropie peut croître très rapidement, voir instantanément comme avec le bruit blanc. Mais pour les systèmes chaotiques (au moins mélangeant), le désordre croît en moyenne linéairement $S_{Sh,n} \sim nh_{KS}$. La constante h_{KS} (taux de croissance moyen du désordre à chaque itération) est appelée entropie métrique du système (ou entropie de Kolmogorov-Sinai) [BP03]. Formellement, elle est définie comme suit. Soit X une partition de Γ et $X_n = \bigvee_{p=0}^{n-1} \varphi^{-p}(X)$ la partition affinée par φ ($\varphi^{-1}(X) = \{\varphi^{-1}(\sigma)\}_{\sigma \in X}$ et $X \vee Y = \{\sigma \cap \varsigma\}_{\sigma \in X, \varsigma \in Y}$). L'entropie métrique est

$$h_{KS} = \sup_X \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} \sum_{\sigma \in X_n} \mu(\sigma) \ln \mu(\sigma) \quad (3.9)$$

Mais de manière plus simple, le théorème de Pesin nous assure⁶ que $h_{KS} = \lambda$. L'exposant de Lyapunov est donc aussi la mesure de la croissance du désordre à chaque itération.

Pour la suite on distinguera donc les processus de dérive (seulement ergodique), du bruit chaotique (systèmes mélangeant ou de type Kolmogorov, que l'on ne distinguera pas l'un de l'autre) et du bruit aléatoire (systèmes de type Bernoulli). Si la discussion est donnée dans le cadre le plus simple, les situations plus complexes (îlots de stabilité dans une mer chaotique, plusieurs composantes connexes ergodiques indépendantes, système dynamique ne préservant pas la mesure avec attracteurs étranges, processus stochastiques avec effets de mémoire, etc) ne sont pas exclues à priori.

3.2 Décohérence, relaxation et chaos induits par du bruit

Nous revenons maintenant à une chaîne de spins frappés dont les trains de frappes sont déformés (frappes retardées, force atténuée, etc) par du bruit.

3.2.1 Bruit aléatoire

Comme on peut s'y attendre le bruit aléatoire (que ce soit du bruit blanc ou un bruit obéissant à un processus Markovien) engendre une forte décohérence (chute des cohérences vers 0), une augmentation de l'entropie et une relaxation de l'état mixte vers la distribution microcanonique [3,4] [Aub17]. Le processus démarre sans délai et est plus ou moins rapide (en fonction du paramètre de dispersion pour un processus Markovien type mouvement Brownien par exemple); et il est le plus rapide avec le bruit blanc. Ce qui est plus intéressant est le comportement différencié dans ce processus en fonction des types de couplages entre les spins [4] [Aub17]. Le tableau 3.1 résume les comportements que nous avons observés à travers de nombreuses expérimentations numériques. La chose la plus remarquable est qu'une chaîne de spins avec des couplages d'Heisenberg se comporte de façon similaire à un ensemble de spins non-couplés, mais alors que pour l'ensemble on ne fait référence qu'à la moyenne sur tous les spins, dans le cas d'une chaîne d'Heisenberg, chaque spin suit individuellement la même dynamique que la moyenne. Ce qui était un comportement uniquement moyen sur la collectivité, devient en couplant les spins de façon anisotrope, un comportement collectif suivi par tous les spins. L'entropie du spin moyen d'un ensemble de spins non-couplés, à frappes et bruits égaux, évolue de la même manière que celle de chaque spin d'une chaîne d'Heisenberg, alors même que dans le premier cas elle ne mesure que du désordre (disparité des états quantiques d'un spin à l'autre), et que dans le second cas elle ne mesure que de l'intrication. De manière générale sur une chaîne de spins, les simulations montrent que le bruit ne génère pas du désordre (il n'y a presque aucune disparité d'états entre un spin et un autre) mais seulement de l'intrication. Il

6. toute la discussion présentée ici est pour le cas particulier où $\Gamma = \mathbb{T}^2$ (il n'y a qu'un unique exposant de Lyapunov positif) et où φ est ergodique sur tout Γ .

TABLE 3.1 – Comportement de la dynamique d’un ensemble de spins en présence d’un fort bruit aléatoire [3,4] [Aub17]. d_0 est l’amplitude de la dispersion des conditions initiales sur le tore des systèmes dynamiques, ω_R est la fréquence de Rabi d’un spin sous champ Zeeman levant la dégénérescence, ω_0 est la fréquence des frappes modulées par le bruit, J est le paramètre d’amplitude des couplages entre les spins, Θ est l’angle définissant la direction de frappe (colatitude sur la sphère de Bloch).

	spins non couplés	chaîne Heisenberg	chaîne Ising-Z	chaîne Ising-X
$d_0 \nearrow$	Décohérence \nearrow Relaxation \nearrow	Intrication \nearrow Relaxation \nearrow	Intrication \nearrow Relaxation \nearrow	Intrication \nearrow Relaxation \nearrow
$\frac{\omega_R}{\omega_0} \nearrow$	Décohérence \nearrow Relaxation \nearrow	Décohérence \nearrow Relaxation \nearrow	pas d’effet	pas d’effet
$\frac{J}{\omega_0} \nearrow$	<i>sans objet</i>	Intrication \nearrow	Intrication \nearrow	Intrication \nearrow
$\Theta \rightarrow 0$ or $\frac{\pi}{2}$	Décohérence \nearrow Relaxation \searrow	Décohérence \nearrow Relaxation \searrow	Décohérence \searrow Relaxation \searrow	pas d’effet

est intéressant donc de noter que les couplages quantiques transforment instantanément⁷ le désordre classique en intrication quantique.

3.2.2 Bruit chaotique

Dans le cas où le bruit obéit à un processus chaotique, les commentaires précédents s’appliquent pour ce qui est du moment où le processus a commencé à disperser les frappes au point que l’on ne puisse plus le distinguer d’un bruit aléatoire. Mais au départ, avant que la S.C.I. ne se fasse ressentir, les frappes n’affectent pas la cohérence (l’entropie de von Neumann reste nulle). Il y a donc une durée, que nous avons appelé *horizon de cohérence* [3,6] [Aub17], pour laquelle l’on peut espérer contrôler le système sans que les effets du bruit chaotique ne viennent gêner celui-ci. La figure 3.2 illustre ce phénomène. Cet horizon de cohérence a été observé aussi bien pour des ensembles de spins découplés [3], des chaînes de spins avec couplages Heisenberg [6], ou des structures plus complexes comme des glaces de spins [Aub17]. Il a également été observé pour divers processus chaotiques : automorphismes continus du tore (type application du chat d’Arnold) [3,6], standard map (application de Chirikov) [Aub17], système dynamique de Lorenz [Aub17]. Pour les systèmes dynamiques classiques, il est possible d’introduire la notion d’*horizon de prédictibilité* comme la durée sur laquelle deux conditions initiales proches n’ont pas eu le temps d’être séparées à l’incertitude admissible près. Mais cet horizon est arbitraire du fait du choix de la notion de proximité et d’incertitude (ou en d’autres termes, du choix de la partition en microétats de l’espace de phase classique). À l’inverse, l’horizon de cohérence semble ne souffrir d’aucun choix arbitraire. Or celui-ci semble être beaucoup plus long que l’horizon de prédictibilité du processus chaotique pour tout choix raisonnable de partition (c’est à dire une partition suffisamment fine pour détecter une dispersion significative). Une analyse empirique semble montrer que la fin de l’horizon de cohérence (le début de la montée de l’entropie de von Neumann), correspond au moment où l’entropie de Shannon cumulée des frappes atteint un certain seuil. Le désordre ou l’intrication au niveau quantique, pour un système de spins asservis à un processus chaotique, ne serait donc pas sensible au “désordre instantané” mais à un effet cumulatif du chaos classique. Par ailleurs, comme l’on pouvait s’y attendre, l’horizon de cohérence est anticorrélé à l’exposant de Lyapunov du processus chaotique (plus l’exposant de Lyapunov est grand,

7. On ne constate aucun régime transitoire où apparaîtrait d’abord du désordre quantique qui se changerait en intrication, du moins dans les échelles de temps de l’ordre des oscillations de Rabi.

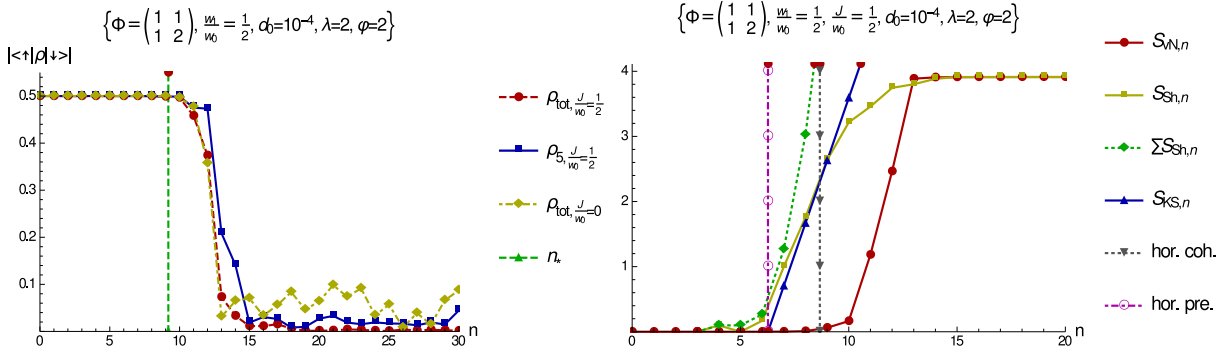


FIGURE 3.2 – À gauche : Cohérence au cours des frappes (n) du spin moyen d’une chaîne de spins d’Heisenberg ($\rho_{tot, \frac{J}{w_0} = \frac{1}{2}}$), l’un des spins de la chaîne ($\rho_5, \frac{J}{w_0} = \frac{1}{2}$), et le spin moyen d’un grand ensemble de spins découplé ($\rho_{tot, \frac{J}{w_0} = 0}$); pour des spins frappés suivant une dynamique chaotique (application du chat d’Arnold) modulant l’amplitude et le retard de frappe. (λ, φ) est la moyenne des conditions initiales des frappes sur le tore \mathbb{T}^2 (espace de phase) et d_0 est la dispersion de ces conditions initiales autour de la moyenne. n_* est l’horizon de cohérence calculé à partir d’une formule empirique qui est satisfaite par l’ensemble des systèmes dynamiques testés. À droite : mêmes conditions, mais sont représentées l’entropie de von Neumann de la chaîne de spins ($S_{vN, n}$), l’entropie de Shannon du bruit des frappes $S_{Sh, n}$, l’entropie de Shannon cumulée ($\Sigma S_{Sh, n} = \sum_{p=0}^n S_{Sh, p}$), l’entropie théorique du système dynamique ($S_{KS, n} = h_{KS} n + n_0$) calculée à partir de l’entropie métrique de l’application du chat d’Arnold (h_{KS} , production moyenne théorique de désordre par unité de temps) et de l’horizon de prédictibilité du système dynamique (n_0). Tiré de [6] & [Aub17].

plus le chaos est fort, et plus court est l’horizon de cohérence). Ceci est très important, car cela montre que l’on peut trouver une signature de l’exposant de Lyapunov classique dans un système dynamique quantique. La notion d’exposant de Lyapunov ne peut pas en mécanique quantique être associée à la S.C.I. qui du fait de la non localité et de la superposition d’états ne peut être définie, mais il semble que l’exposant de Lyapunov puisse être attaché à la notion de cohérence. Nous avons essayé de comparer nos simulations numériques avec différentes propositions de définitions d’exposants de Lyapunov quantiques que l’on trouve dans la littérature (en général inspirées par la géométrie non-commutative et par le théorème de Gelfand qui permet de reformuler la topologie d’une variété – l’espace de phase – en terme de la C^* -algèbre de ses observables). Une première analyse ne s’est pas montrée concluante, mais une conclusion définitive demanderait d’approfondir ce travail. Une compréhension plus fine du phénomène d’horizon de cohérence nécessite une approche plus formelle des systèmes quantiques asservis, cela est l’objet du chapitre suivant. Avant cela, il me semble pertinent à ce stade de discuter des notions de chaos et de désordre dans le cadre de la mécanique quantique au vu de ce que nous ont appris nos expériences numériques.

3.2.3 Chaos, désordre et intrication : quantique vs classique

Nous avons vu que le désordre des systèmes dynamiques (qu’il soit d’origine aléatoire ou chaotique) pouvait se transmettre aux systèmes quantiques mais en se traduisant par de l’intrication (comme c’est le cas pour les chaînes de spins). Nous avons vu également que l’horizon de prédictibilité des systèmes classiques (manifestation de l’exposant de Lyapunov) avait pour “descendant” dans les systèmes quantiques asservis, l’horizon de cohérence. Il peut être étonnant que les notions classiques d’ordre/désordre se traduisent en physique quantique par cohérence/intrication. Ce qui est une propriété purement statistique dans le cas des systèmes classiques, devient une propriété non-locale lorsqu’elle est transmise au système quantique. Cet état de fait n’est pas contingent au cas des systèmes quantiques asservis, on le retrouve

dans les systèmes présentant du chaos quantique, c'est à dire des systèmes libres (pas d'asservissement) mais dont les états sont censés manifester un équivalent quantique du chaos [Haa91]. Les travaux sur le chaos quantique se heurtent à la difficulté majeure qu'il n'y a pas de définition universellement reconnue et évidente du chaos quantique. La définition la plus courante est qu'un système quantique est chaotique si sa limite semi-classique l'est. Il convient alors de reconnaître les portraits de phase chaotiques dans la distribution Wigner ou celle d'Husimi du système (distributions de quasiprobabilité sur l'espace de phase classique) [Haa91]. Certains préfèrent une définition dynamique du chaos quantique fondée sur des comportements similaires à ceux des systèmes classiques [MS90a]. Ainsi un état ψ_0 est un état (dynamiquement) chaotique si sa probabilité de survie $p(t) = |\langle \psi_0 | e^{-i\hbar^{-1}Ht} \psi_0 \rangle|^2$ présente des oscillations erratiques tout en décroissant globalement vers 0 mais avec des résurgences de probabilités non-nulles (qui se distingue d'un état dynamiquement lié où $p(t)$ est périodique ou quasipériodique, et d'un état de diffusion où $p(t)$ décroît de façon quasi-monotone vers 0)⁸. La notion d'états dynamiquement liés ou de diffusion étant reliée aux propriétés spectrales de l'Hamiltonien par le théorème RAGE (un état lié est associé au spectre purement ponctuel de H , un état de diffusion à son spectre absolument continu), une autre proposition pour définir le chaos est de définir un état chaotique comme associé au spectre singulièrement continu⁹ de l'Hamiltonien (un système quantique est alors chaotique s'il présente ce type de spectre) [McC04] (l'Hamiltonien en question étant en général celui de Floquet, c'est à dire relatif au spectre de quasiénergie). Comme ce dernier critère est assez difficile à mettre en évidence, on lui en préfère un autre qui repose sur la distribution des espacements de niveaux [Haa91]. Un système quantique est alors dit chaotique si sa distribution des espacements de niveaux suit une loi de Wigner pour un ensemble gaussien (orthogonal, unitaire ou symplectique) traduisant une corrélation entre les niveaux (à contrario d'un spectre d'une matrice aléatoire où la distribution des espacements suit une loi de Poisson, ou d'un spectre non-chaotique où la distribution des espacements est discrète – ensemble de pics de Dirac –).

Tous ces critères ne sont pas rigoureusement équivalents, mais pour les systèmes de spins la littérature privilégie le critère des espacements de niveaux. Ainsi il est connu plusieurs exemples de systèmes chaotiques définis par ce critère : une chaîne XXZ avec un défaut énergétique en son centre [GS12], une chaîne Ising-Z avec un défaut d'inclinaison du champ Zeeman [KSL07], un verre de spin Ising-X avec une distribution des couplages aléatoires convenablement choisie [LDK⁺05]. Lorsque l'on étudie les états propres de ces systèmes chaotiques, ils se caractérisent par une forte intrication entre les spins, aboutissant pour du chaos d'origine purement quantique à la même conclusion que pour notre transmission du chaos classique à un système quantique. Il m'a semblé néanmoins nécessaire d'approfondir cette question en étudiant un phénomène très intéressant, les états de chimère [PA15]. Dans les systèmes dynamiques classiques, un état de chimère est un état d'une chaîne d'oscillateurs couplés, telle qu'une partie de la chaîne oscille en phase alors qu'une autre oscille de façon totalement désordonnée, sans qu'il y ait dans le court terme auto-organisation ou contamination du désordre à toute la chaîne ; l'état de chimère étant un état métastable (de durée vie très supérieure à la durée des régimes transitoires)¹⁰. Le modèle de Kuramoto [Kur75] est le système modèle présentant des états de chimère (les autres modèles dérivant plus ou moins directement de celui-ci). Pour une chaîne finie, il a été montré que la partie désordonnée de la chaîne présentaient des oscillations chaotiques. La partie de la chaîne qui présente ces oscillations chaotiques a donc une entropie locale très élevée, alors que la partie qui oscille en phase présente une entropie locale nulle. Du fait de la présence à la fois d'ordre et de chaos dans les états de chimère, il m'a semblé intéressant de confronter ces états classiques à des équivalents quantiques. J'ai donc proposé un *toy model* [5] de chaîne de spins qui est un équivalent quantique au modèle de Kuramoto, dans le

8. pour être plus précis la probabilité de survie cumulée $\int_0^t p(t') dt'$ croît linéairement vers l'infini pour un état lié, tend vers une valeur asymptotique pour un état de diffusion, et croît vers l'infini non-linéairement avec une probabilité de survie qui tend vers 0 pour un état chaotique.

9. défini "simplement" un spectre singulièrement continu est un spectre où tout point est point d'accumulation mais qui est de mesure de Lebesgues nulle, c'est à dire qui présente une structure fractale.

10. il devient même un état stable (durée de vie infinie) pour une chaîne infinie d'oscillateurs

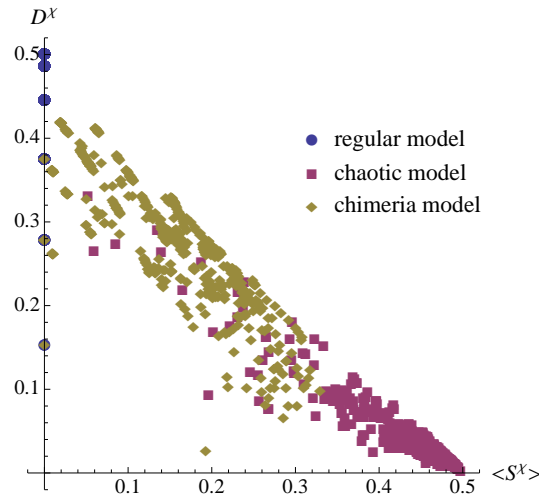


FIGURE 3.3 – Distribution dans le plan (intrication $\langle S^x \rangle \simeq \mathbb{E}(S_{vN}(\rho_\bullet))$ - désordre $D^x \simeq S_{vN}(\mathbb{E}(\rho_\bullet)) - \mathbb{E}(S_{vN}(\rho_\bullet))$) d'un échantillon représentatif des états propres pour le modèle de chaîne de spins chimérique, pour un modèle de chaîne de spins régulière (chaîne avec couplages Ising-Z sans défaut) et un modèle de verre de spins chaotique. Les trois modèles étant simulés numériquement avec le même nombre de spins (12). Tiré de [5].

sens où la structure mathématique de ses observables quantiques est similaire à celle des observables classiques de la chaîne d'oscillateurs. Le modèle est peu réaliste car il est gouverné par un Hamiltonien non-autoadjoint avec une structure assez peu naturelle¹¹. Le modèle présente des états propres où sur une partie de la chaîne les spins ne sont pas ou peu intriqués (spins avec une entropie de von Neumann nulle ou très faible) et une partie où les spins sont très fortement intriqués (spins avec une entropie de von Neumann très élevée). De plus, avec un choix adapté de la distribution des énergies de levée de dégénérescence Zeeman des spins, le spectre du modèle présente une distribution des espacements de niveaux caractéristique du chaos quantique. On peut alors comparer l'entropie d'intrication et l'entropie de désordre de ce modèle à des modèles purement chaotiques et à des modèles réguliers, comme sur la figure 3.3. Comme dit précédemment, les chaînes de spins chaotiques ont des états propres avec beaucoup d'intrication et peu de désordre (car en étant fortement intriqués, les matrices densités de chaque spin de la chaîne sont très similaires). À l'inverse c'est dans le modèle régulier que l'on trouve des états avec le plus grand désordre, mais aussi d'autres de désordre nul, mais toujours sans la moindre intrication (on trouve toutes les distributions possibles de \uparrow/\downarrow , des états désordonnés comme $|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \dots\rangle\rangle\rangle$ ou très ordonnés comme $|\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \dots\rangle\rangle\rangle$). Ces remarques s'appliquent à tous les modèles chaotiques et réguliers testés. Tant qu'à notre *toy model* de chaînes de spins chimérique, on remarque sa position intermédiaire, avec des états présentant en moyenne de l'intrication et du désordre relativement importants. Pour aller plus loin, il serait intéressant de développer un modèle plus réaliste de chaîne de spins chimérique, en remplaçant l'Hamiltonien non-autoadjoint par un Lindbladien modélisant le contact avec un réservoir, mais cela nécessite de s'écarter de la structure du modèle de Kuramoto et donc d'essayer de mettre en évidence ce que sont les ingrédients essentiels au comportement chimérique. Pour résumer, il semble donc que pour les systèmes quantiques multipartites, le chaos est intimement lié à l'intrication entre les parties, que ce chaos soit natif du comportement quantique, issu d'un comportement chimérique ou transmis par un système classique par asservissement.

11. le fait qu'il soit non-autoadjoint est sans doute nécessaire pour introduire une flèche du temps afin de faire apparaître des états métastables, comme pour les modèles de résonances quantiques, voir partie II.

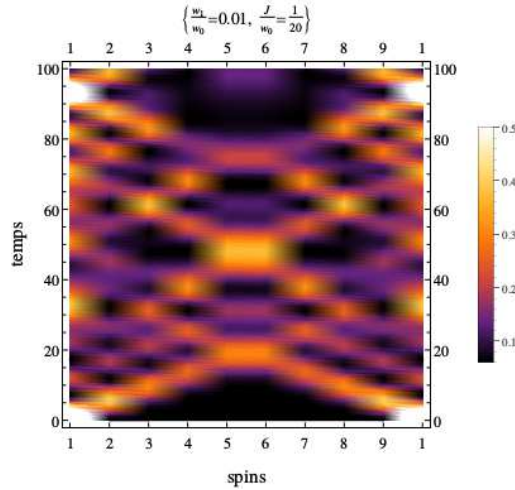


FIGURE 3.4 – Densité des populations $\langle \uparrow | \rho_i | \uparrow \rangle$ pour les neuf spins de la chaîne sans frappe (le temps en ordonnée est donné en nombre de périodes de frappe pour comparaison avec les cas où il y a le contrôle). Tiré de [6] & [Aub17].

3.3 Contrôle d'une chaîne frappée avec du bruit chaotique

L'horizon de cohérence dans le cas du bruit chaotique semble donner une plage de temps sur laquelle il est possible de réaliser un contrôle cohérent. Il s'agit donc d'étudier un système où le bruit chaotique se superpose à un signal de contrôle, en espérant que durant l'horizon de cohérence le contrôle réussisse. L'exemple que nous avons traité [6] [Aub17] est celui d'une chaîne fermée de 9 spins (en couplage plus proches voisins par interaction de type Heisenberg (couplages XXX)) dans un état initial où tous les spins sont dans le même état (proche de $|\downarrow\rangle$) à l'exception du spin numéroté 1 qui se trouve dans l'état $|\uparrow\rangle$. Il y a un champ Zeeman non-nul qui lève la dégénérescence entre les deux états de spin, et qui permet d'identifier l'état inversé du spin 1 comme une excitation sur la chaîne. Cette excitation peut être également assimilée à une information classique élémentaire qui peut se propager le long de la chaîne. En l'absence de contrôle et de bruit, l'excitation se propage dans les deux directions en deux ondes de spin qui finissent par se rencontrer et interférer l'une avec l'autre, comme on le peut voir sur la figure 3.4. L'objectif du contrôle que l'on se fixe ici, est d'obliger l'excitation à ne se propager que dans une direction (afin de maintenir son intensité et éviter les interférences) et l'immobiliser sur un site particulier, disons le spin 5. La première étape consiste à trouver un signal de contrôle qui "pousse" l'excitation dans une seule direction. Pour ce faire, il faut frapper le spin derrière l'excitation suivant la direction $|\downarrow\rangle$ à haute fréquence sur une durée correspondante au temps nécessaire du passage de l'excitation à un site voisin. Le spin derrière l'excitation est empêché d'évoluer du fait des frappes, et l'excitation ne se propage qu'au spin suivant. On frappe alors l'ancien site qui se trouve maintenant juste derrière l'excitation et ainsi de suite. La résolution du problème de contrôle consiste alors essentiellement dans le calcul du temps du passage de site en site. Pour figer l'excitation, il faut frapper tous les spins en direction $|\downarrow\rangle$ à l'exception du 5, ce qui gèle la propagation de l'excitation¹², voir figure 3.5. On peut alors ajuster les paramètres (soit ceux de la chaîne pour modifier la vitesse de propagation de l'excitation, soit ceux du bruit pour modifier l'exposant de Lyapunov) pour que l'horizon de cohérence soit atteint après que l'excitation ait été figée sur le spin 5. À court terme, les frappes désordonnées du bruit chaotique ne vont pas trop affecter l'excitation mais à moyen terme elles rendent instables sa position, comme le montre la figure 3.6. Si le bruit chaotique ne déstabilise pas immédiatement l'excitation, c'est parce que les frappes désordonnées ont déjà tendance à gélifier l'excitation par leur seul effet sans contrôle spécifique, comme

12. il faut néanmoins démarrer les frappes de contrôle avec un timing précis pour bien figer l'excitation

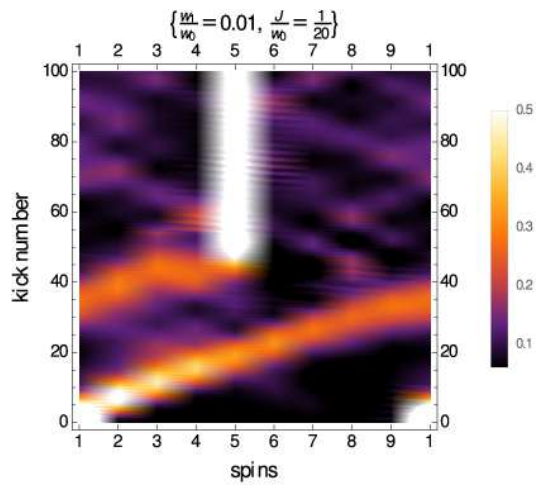


FIGURE 3.5 – Densité des populations $\langle \uparrow | \rho_i | \uparrow \rangle$ pour les neuf spins de la chaîne avec le signal de contrôle par des frappes obligeant l’excitation à se propager vers la droite et figeant celle-ci au spin 5 après 50 frappes. Tiré de [6] & [Aub17].

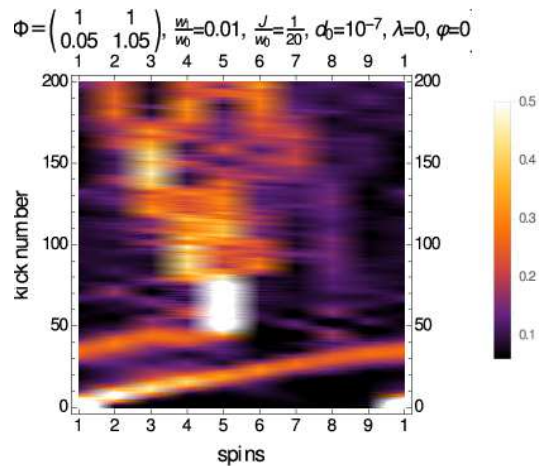


FIGURE 3.6 – Même figure que 3.5, mais du bruit chaotique est ajouté au signal de contrôle (le bruit est modélisé par une application du type chat d’Arnold). L’horizon de cohérence est aux alentours de 60 frappes. L’excitation est clairement déstabilisée après 80 frappes (soit 20 frappes après le passage de l’horizon de cohérence). Tiré de [6] & [Aub17].

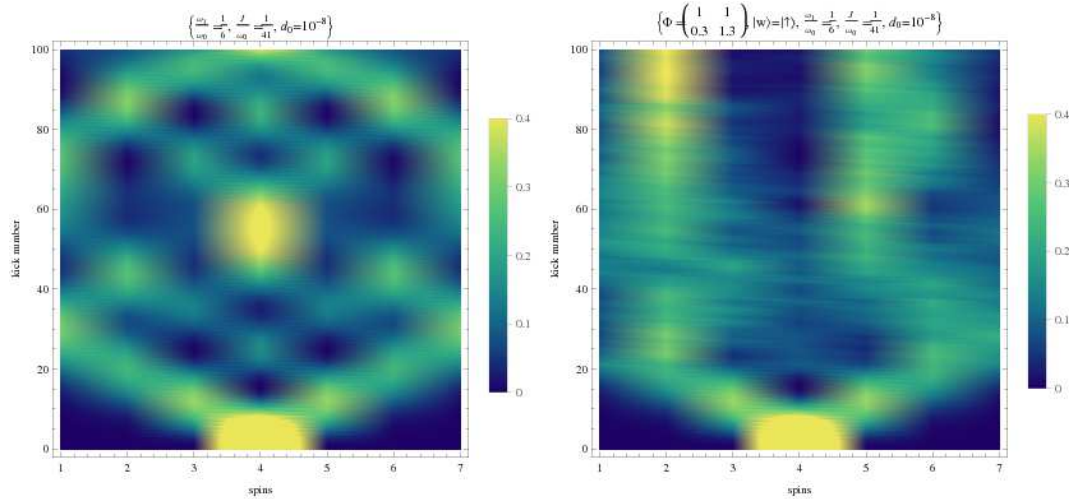


FIGURE 3.7 – Chaîne ouverte de 7 spins (couplages plus proches voisins de type Heisenberg) avec une excitation sur le site 4 à $t = 0$, à gauche sans aucune frappe et à droite soumise à du bruit chaotique (de type application du chat d’Arnold) sans aucun signal de contrôle. L’horizon de cohérence se trouve aux alentours de 20 frappes. Tiré de [6] & [Aub17].

le montre cet autre exemple figure 3.7. Suivant les mêmes principes, il est possible d’étudier d’autres objectifs de contrôle comme inverser un spin particulier de la chaîne sans changer les autres (réalisant une sorte d’opération NOT adressée à un qubit particulier – représenté par un spin – à l’intérieur d’un registre – représenté par la chaîne –) [6] [Aub17].

En résumé

Le bruit que l’on ajoute au contrôle d’un système quantique induit une décohérence et une relaxation (vers la distribution microcanonique quantique dans les exemples traités). La nature du bruit, aléatoire ou chaotique, induit des différences dans la dynamique de décohérence, en particulier du fait de l’horizon de cohérence qui est anticorrélé à l’exposant de Lyapunov du bruit chaotique. Lorsque les éléments qui composent le système multipartite sont couplés, la décohérence est supportée par de l’intrication entre les éléments. On peut considérer celle-ci comme résultant de la transmission du chaos classique au système quantique (ce qui est en accord avec les modèles de chaos quantique et le modèle chimérique quantique). Il est intéressant de noter que le comportement moyen ($\mathbb{E}(\rho_*)$) diffère peu entre un ensemble d’éléments découplés et un ensemble d’éléments couplés (la différence étant plutôt au niveau individuel où dans le cas couplé chaque individu suit peu ou prou l’évolution moyenne). On peut donc s’interroger sur le distingo pratique entre vraie décohérence (cas avec couplages) et décohérence falsifiée (cas sans couplage) si les observables ne permettent pas une distinction franche entre les deux. Je reviendrai sur cette question dans le chapitre suivant qui s’intéresse à la formalisation mathématique de la dynamique quantique asservie.

Publications

Le détail des travaux effectués au cours de l’encadrement de la thèse de Lucile Aubourg concernant la dynamique chaotique des chaînes de spins peut être trouvé ci-dessous :

- [3] [D. Viennot](#) & L. Aubourg, *Decoherence, relaxation and chaos in a kicked-spin ensemble*, Phys. Rev. E **87**, 062903 (2013) [arXiv :1303.3412].

- [4] L. Aubourg & D. Viennot, *Analyses of the transmission of the disorder from a disturbed environment to a spin chain*, Quantum Information Processing **14**, 1117 (2015) [arXiv :1408.4570].
- [5] D. Viennot & L. Aubourg, *Quantum chimera states*, Phys. Lett. A **380**, 678 (2016) [arXiv :1408.4585].
- [6] L. Aubourg & D. Viennot, *Information transmission and control in a chaotically kicked spin chain*, J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys. **49**, 115501 (2016) [arXiv :1402.2411].

Chapitre 4

Géométrie des systèmes dynamiques quantiques asservis

Dans ce chapitre, il s'agit de modéliser géométriquement la situation de contrôle distordu par du bruit, et de mettre en évidence que la dynamique est bien modélisée par une classe de Deligne de degré 3. Comme on l'a vu au chapitre précédent, la distorsion est avant tout assimilable à l'asservissement à un système dynamique classique. Afin d'étudier ce problème, il convient de commencer par un cas très simple en considérant un système quantique asservi à un système dynamique élémentaire, comme le cas de la dérive linéaire évoqué au chapitre précédent. Et pour rendre encore plus simple ce modèle, on peut ne considérer qu'un espace de phase à une dimension. Un modèle de ce type, mais physiquement pertinent, va nous être donné par l'interaction d'un système atomique avec un champ électromagnétique modulé lentement, et traité par la théorie adiabatique de Floquet [GJ03]. C'est l'objet de la première section de ce chapitre. Dans un second temps, on verra sur un autre modèle simple d'atome contrôlé par un champ laser "distordu" par du bruit de phase, comment le bruit peut être traité dans le cadre géométrique. Enfin on terminera par quelques idées pour traiter le cas général, l'établissement d'une théorie géométrique complète pour les systèmes asservis étant toujours en cours.

4.1 Modèle d'asservissement simple : atome contrôlé par un champ laser modulé lentement

4.1.1 La théorie adiabatique de Floquet

On considère à nouveau le modèle étudié à la section 2.3.2 d'un atome d'espace de Hilbert \mathcal{H} dans un champ laser gouverné par l'Hamiltonien :

$$H(x, t) = H_0 + \mu E \cos(\omega t + \phi) \quad (4.1)$$

où $H_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est l'Hamiltonien de l'atome isolé, $\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est l'opérateur moment dipolaire électrique de l'atome, $x = (E, \omega, \phi)$ (amplitude, fréquence et phase du laser) est l'ensemble des paramètres de contrôle formant la variété $M = (\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{S}^1$. De manière alternative, on peut également considérer un ensemble de frappes laser ultra-courtes :

$$H(x, t) = H_0 + \hbar \lambda W \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\phi}{\omega}) \quad (4.2)$$

où $x = (\lambda, \omega, \phi)$ (amplitude, fréquence et retard de frappe) est l'ensemble des paramètres de contrôle formant la variété $M = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^+$ (on supposera comme dans le chapitre précédent que $W^2 = W$). Contrairement au chapitre 2.3.2 où l'on s'intéressait au contrôle quasistatique, on ne cherche pas ici une

configuration de x mais une évolution (lente) $t \mapsto x(t) \in M$ qui résout le problème de contrôle. On a donc à traiter avec l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d\tilde{\psi}(t)}{dt} = H(x(t), t)\tilde{\psi}(t) \quad \tilde{\psi} \in \mathcal{H} \quad (4.3)$$

On remarque la double dépendance de H avec le temps, une dépendance implicite à travers x pour les paramètres qui sont modulés lentement et une dépendance explicite pour les oscillations rapides de la porteuse du champ ou l'alternance des frappes ultra-courtes. Le choix de faire apparaître ainsi cette double dépendance a pour but de séparer formellement les deux échelles de temps présentes dans le contrôle. La séparation entre ces deux échelles de temps est le fondement de la théorie adiabatique de Floquet [GJ03]. À ces deux échelles s'ajoute l'échelle du temps propre quantique (temps caractéristique des oscillations de Rabi induites par H_0). La présence de trois échelles de temps est déjà un indice du fait que la structure géométrique du contrôle est de degré de Deligne 3.

Pour séparer les deux échelles de temps du contrôle, on se place dans l'espace de Hilbert étendu $\mathcal{F} = \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi})$. On considère alors l'Hamiltonien de Floquet

$$H_F(x) = -i\hbar\omega \frac{\partial}{\partial\theta} + H_0 + \mu E \cos(\theta + \phi) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) \quad (4.4)$$

ou

$$H_F(x) = -i\hbar\omega \frac{\partial}{\partial\theta} + H_0 + \hbar\omega\lambda W \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\theta - 2n\pi + \phi) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) \quad (4.5)$$

Soit ψ la solution de l'équation de Schrödinger-Floquet¹ :

$$i\hbar \frac{d\psi(t; \theta)}{dt} = H_F(x(t))\psi(t; \theta) \quad \psi \in \mathcal{F} = \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{S}^1, \frac{d\theta}{2\pi}) \quad (4.6)$$

Dans cette représentation, la fonction d'onde dépend des deux temps, le temps des variables lentes t et le temps de l'évolution rapide θ (après changement de variable vers \mathbb{S}^1 du fait de la périodicité de l'évolution rapide). On montre [GJ03] que $\tilde{\psi}(t) = \psi(t; \omega t)$ est solution de l'équation de Schrödinger. La condition $\theta(t) = \omega t$ assure le passage de la fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger-Floquet à celle de l'équation de Schrödinger (dans ce passage θ passe du statut de variable quantique – interne à \mathcal{F} – à celui de variable externe). Cette condition est celle qui définit le système dynamique auquel est asservi l'atome, $\Gamma = \mathbb{S}^1$ est son espace de phase, sa dynamique est décrite par l'équation² $\dot{\theta} = \omega$ et son flot est tel que $\varphi^t(\theta_0) = \theta_0 + \omega t \pmod{2\pi}$ ($\forall \theta_0 \in \mathbb{S}^1$). Il s'agit d'une simple dérive linéaire le long du cercle. On définit toujours les états de quasiénergie instantanés comme les solutions des équations aux valeurs propres de $H_F(x)$:

$$\forall x \in U^\alpha, \quad H_F(x)|a(\theta), x\rangle^\alpha = \chi_a^\alpha(x)|a(\theta), x\rangle^\alpha \quad (4.7)$$

pour $\{U^\alpha\}_\alpha$ un bon recouvrement d'ouverts de M . En appliquant un théorème adiabatique [Kat50] dans \mathcal{F} pour H_F , on trouve pour solution de l'équation de Schrödinger-Floquet si $\psi(0; \theta) = |a(\theta), x(0)\rangle^\alpha$ ($\iff \tilde{\psi}(0) = |a(0), x(0)\rangle^\alpha$) :

$$\psi(T; \theta) = e^{-i\hbar^{-1} \int_0^T \chi_a^\alpha(x(t)) dt} e^{-\int_{\mathcal{C}} A_a^\alpha} |a(\theta), x(T)\rangle^\alpha + \mathcal{O}(\frac{1}{T}) \quad (4.8)$$

pour un chemin \mathcal{C} décrit par $t \mapsto x(t)$ totalement inclus dans U^α . Le générateur de la phase géométrique est

$$A_a^\alpha = \int_{\mathbb{S}^1} \langle a(\theta), x | d_M | a(\theta), x \rangle^\alpha \frac{d\theta}{2\pi} \in \Omega^1(U^\alpha, i\mathbb{R}) \quad (4.9)$$

1. En toute rigueur, il faut prendre $\omega^{eff}(t) = \omega(t) + \dot{\omega}(t)t$ et non pas $\omega(t)$ pour être cohérent avec le changement de variable $\theta = \omega(t)t$.

2. par rapport au chapitre précédent où l'on n'a considéré que des systèmes dynamiques à temps discret, celui-ci est à temps continu

d_M désignant la différentielle extérieure de M (la différentielle par rapport à x). Or on a la décomposition suivante pour la quasiénergie [MS90b] :

$$\chi_a^\alpha(x) = {}^\alpha\langle\langle a, x | H_F(x) | a, x \rangle\rangle^\alpha \quad (4.10)$$

$$= \oint_{\mathbb{S}^1} {}^\alpha\langle a(\theta), x | H(x, \theta) | a(\theta), x \rangle^\alpha \frac{d\theta}{2\pi} - i\hbar\omega \oint_{\mathbb{S}^1} {}^\alpha\langle a(\theta), x | \partial_\theta | a(\theta), x \rangle^\alpha \frac{d\theta}{2\pi} \quad (4.11)$$

La quasiénergie inclut donc une seconde phase géométrique associée aux variations rapides (c'est à dire au système dynamique classique). Si la première phase géométrique est d'origine adiabatique (phase de Berry-Simon [Ber84, Sim83]), celle-ci est due seulement à la périodicité du système dynamique (phase de Aharonov-Anandan [AA87]).

4.1.2 Théorie de jauge et fibration associées aux phases géométriques

Par construction de la théorie adiabatique de Floquet, elle hérite de la structure de jauge associée aux quasiénergies étudiée au chapitre 2.3.2 à celle associée aux phases géométriques adiabatiques du contrôle des systèmes fermés (le système fermé étant décrit dans l'espace étendu \mathcal{F}) du chapitre 2.3.4. On a donc la "composition" d'une théorie de jauge de degré de Deligne 1 non-triviale liée à l'anholonomie de Cheon avec une théorie de jauge de degré de Deligne 2 non-triviale liée aux croisements de quasiénergies dans M . La composition des deux donne une classe de Deligne de degré 3 [1], l'opération de composition au niveau topologique porte le nom de cup-produit³ : $[\chi_a]_{\mathcal{D}} \cup [\ln g, A_a]_{\mathcal{D}} \in H_{\mathcal{D}}^3 M_+$ (où $g^{\alpha\beta}(x) \in U(1)$ sont les fonctions de transition associées aux changements de phase des états de quasiénergie au passage d'une carte à l'autre). Je ne vais pas détailler la méthode d'assemblage à partir du cup-produit ici, l'important est que l'on peut réécrire la fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger-Floquet sous la forme suivante [1] :

$$\psi(T; \theta) = e^{-i\hbar^{-1} \int_0^T \epsilon_a(x(t)) dt} e^{-\iint_{\mathcal{S}} B_a^\alpha | a(\theta), x(T) \rangle\rangle^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (4.12)$$

où $\epsilon_a(x) = \oint_{\mathbb{S}^1} {}^\alpha\langle a(\theta), x | H(x, \theta) | a(\theta), x \rangle^\alpha \frac{d\theta}{2\pi}$ est la phase dynamique du système ouvert décrit dans \mathcal{H} , et $\mathcal{S} \simeq \mathcal{C} \times \mathbb{S}^1$ est la surface dans $M_+ = M \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en forme de "serpent" cylindrique engendré par l'évolution lente (décrite par \mathcal{C}) et l'évolution rapide périodique (décrite par \mathbb{S}^1). Le générateur de la phase géométrique totale est alors la cambrure

$$B_a^\alpha|_{\mathcal{S}} = {}^\alpha\langle a(\theta), x | d_{\mathcal{S}} | a(\theta), x \rangle^\alpha \wedge \frac{d\theta}{2\pi} - \omega^\alpha \langle a(\theta), x | \partial_\theta | a(\theta), x \rangle^\alpha \frac{d\theta}{2\pi} \wedge dt \in \Omega^2(U^\alpha \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, i\mathbb{R}) \quad (4.13)$$

J'ai montré [1] que (la forme complète de) B_a^α satisfaisait bien aux relations de la symétrie jauge attendues, et que par conséquent $[\ln h, \hat{A}, B]_{\mathcal{D}} \in H_{\mathcal{D}}^3 M_+$ ($M_+ = M \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$) définit bien une classe de Deligne de degré 3, où $\hat{A}^{\alpha\beta}(x, \theta, t) = \frac{i}{2\beta} (\ln g^{\alpha\beta}(x) + n^{\alpha\beta} \omega t) (d\theta + \frac{2\pi}{\hbar\omega} d_M \chi_a^\alpha(x)) \in \Omega^1(U^\alpha \cap U^\beta \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, i\mathbb{R})$ est le potentiel-transformation ($n^{\alpha\beta}$ sont les constantes de transition associées à l'anholonomie de Cheon, cf. chapitre 2.3.2); et $h^{\alpha\beta\gamma}(x, \theta) = e^{-i\frac{2\pi}{\hbar\omega} \chi_a^\alpha(x) z^{\alpha\beta\gamma}} e^{-iz^{\alpha\beta\gamma} \theta} \in \Omega^0(U^\alpha \cap U^\beta \cap U^\gamma \times \mathbb{S}^1)$ sont les 2-fonctions de transition ($z^{\alpha\beta\gamma}$ sont les constantes de transition du contrôle adiabatique dans \mathcal{F}). J'ai également montré [1] que les autres classes caractéristiques de la topologie de la théorie de jauge et de la fibration étaient obtenues de manière cohérente par le cup-produit⁴.

La structure géométrique définie est une gerbe abélienne construite par le cup-produit, c'est à dire définie par recollement avec les fonctions de 2-transition $h^{\alpha\beta\gamma}$ et de 1-transition $g^{\alpha\beta}$ à partir d'un bon

3. $H_{\mathcal{D}}^* M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_{\mathcal{D}}^n M$ équipé de la loi d'addition des champs $+$ et du cup produit $\cup : H_{\mathcal{D}}^n M \times H_{\mathcal{D}}^p M = H_{\mathcal{D}}^{n+p} M$ forme l'anneau de cohomologie de Deligne.

4. La classe de Dixmier-Douady (classe de cohomologie de Čech) de la gerbe construite par cup-produit est le cup-produit de la classe de Chern du fibré adiabatique et d'une classe de cohomologie de Čech de degré 1 caractéristique de l'anholonomie de Cheon, il en va de même avec les classes de cohomologie de groupe $U(1)$ associées.

recouvrement d'ouverts de M_+ et du groupe de jauge $U(1)$. On notera que la construction est équivalente à un fibré composite

$$\begin{array}{ccc} P_+ & \leftarrow & U(1) \\ \downarrow & & \\ M_+ & \leftarrow & U(1) \\ \downarrow & & \\ M \times \mathbb{R} & & \end{array}$$

où le groupe de jauge $U(1)$ du second étage représente

les changements de phase et celui du premier étage représente les rotations sur le cercle \mathbb{S}^1 . B_a définit la 2-connexion sur la gerbe, et $e^{-\iint_{\mathcal{S}} B_a}$ définit le relèvement horizontal de la surface \mathcal{S} dans la gerbe.

J'avais fait remarquer au chapitre 2.1.5 qu'un exemple physique de classe de Deligne de degré 3 était donné par la théorie des cordes. Il est intéressant de noter que la théorie adiabatique de Floquet reproduit une partie de la version classique de cette théorie. Le passage de l'espace de Hilbert \mathcal{H} à l'espace de Hilbert étendu \mathcal{F} se traduit géométriquement par l'extension de l'espace-temps du contrôle $M \times \mathbb{R}$ en un espace-temps avec une dimension supplémentaire compacte $M \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ comme c'est le cas en théorie des cordes⁵. B_a a la forme et le comportement du champ de Neveu-Schwarz⁶ et $\iint_{\mathcal{S}} B_a$ est similaire à l'action d'une corde fermée chargée enroulée dans la dimension d'espace supplémentaire, \mathcal{S} étant son feuillet d'Univers⁷ dans l'espace-temps étendu M_+ .

4.2 Modèle d'un bruit simple : atome contrôlé par un champ laser avec bruit de phase

Le modèle simple de système dynamique de la section précédente, s'il est instructif sur la façon dont la structure géométrique peut être construite pour un système quantique asservi, ne permet pas de traiter des effets d'un système dynamique modélisant du bruit. Pour pallier à cela, nous considérons un autre exemple simple, celui d'un atome à deux niveaux en interaction avec un champ laser avec du bruit de phase. L'Hamiltonien gouvernant la dynamique est dans l'approximation d'onde tournante à un photon :

$$H(x, \delta\theta) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega e^{i(\theta+\delta\theta)} \\ \Omega e^{-i(\theta+\delta\theta)} & 2\Delta \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

où $x = (\Omega, \Delta, \theta) \in M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ sont les paramètres de contrôle ($\Omega = |\langle 1 | \vec{\mu} \cdot \vec{E} | 2 \rangle|$ ($\vec{\mu}$ est le moment dipolaire électrique et \vec{E} est le champ électrique), $\Delta = \hbar\omega_{12} - \hbar\omega_l$ est le détuning, et θ est la phase du laser). $\delta\theta$ représente les fluctuations aléatoires de la phase supposée suivre un processus de Wiener décrit par l'équation différentielle stochastique :

$$\delta\dot{\theta} = k(\theta(t))\eta(t) \quad (4.15)$$

où η est un variable aléatoire stochastique et k est une fonction 2π -antipériodique $k(\theta + 2\pi) = -k(\theta)$. L'anti-périodicité de k induit que $\delta\theta \xrightarrow{\theta \rightarrow \theta + 2\pi} -\delta\theta$ et que l'ensemble des valeurs du couple $(\theta, \delta\theta)$ forme un ruban de Möbius \mathbb{M} ; $(x, \delta\theta) \in M_0 \times \mathbb{M}$ ($M_0 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$).

5. en théorie quantique des cordes il est nécessaire d'ajouter plus d'une dimension compacte pour résoudre des problèmes liés à la quantification de la théorie, mais en théorie classique des cordes et dans son précurseur la théorie de Kaluza-Klein, une seule dimension supplémentaire est nécessaire

6. dit aussi NS-NS (Neveu-Schwarz Neveu-Schwarz) ou Kalb-Ramond suivant la forme du Lagrangien dans lequel il intervient. Les modes de vibration des cordes bosoniques modélisant la gravité induisent 3 champs (en fonction du mode de polarisation) : un champ scalaire ϕ associé au dilaton (responsable – potentiel – de l'énergie noire et de l'inflation cosmique), un champ symétrique $g_{\mu\nu}$ associé aux ondes gravitationnelles et donc au graviton (effets usuels de la gravité), et un champ antisymétrique $B_{\mu\nu}$ (le champ NS-NS) responsable d'effets anormaux de gravitation associés à la torsion de l'espace-temps (dans la théorie d'Einstein, la torsion est nulle). Un champ de Neveu-Schwarz est également présent en électrodynamique 2-forme, il représente le 2-potentiel électromagnétique qui se couple avec le corps des supercordes fermioniques chargées, alors que le 1-potentiel usuel se couple avec les extrémités (ponctuelles) de ces cordes (paire particule-antiparticule astreinte à se déplacer sur une ou deux brane(s)).

7. équivalent pour une corde à la ligne d'Univers pour une particule ponctuelle

On décompose l'Hamiltonien sous la forme $H(x, \delta\theta) = W(\delta\theta)H_0(x)W(\delta\theta)^{-1}$ avec $H_0(x) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega e^{i\theta} \\ \Omega e^{-i\theta} & 2\Delta \end{pmatrix}$ et $W(\delta\theta) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\delta\theta} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}\delta\theta} \end{pmatrix}$. Si l'évolution induite par le contrôle $t \mapsto x(t)$ est adiabatique, la solution de l'équation de Schrödinger induite par H est [2] :

$$\psi(T) = e^{-i\hbar^{-1} \int_0^T \lambda_a(x(t))dt} e^{-\int_{\mathcal{C}} A_P^\alpha} e^{-\int_{\mathcal{S}} A_Q^\alpha} W(\delta(t))|a, x(t)\rangle^\alpha + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (4.16)$$

si $\psi(0) = |a, x(0)\rangle^\alpha$. λ_a est valeur propre instantanée de $H_0 : H_0(x)|a, x\rangle^\alpha = \lambda_a(x)|a, x\rangle^\alpha, \forall x \in U^\alpha$ ($\{U^\alpha\}_\alpha$ un bon recouvrement d'ouverts de M). La première phase géométrique (associée au contrôle) est générée par

$$A_P^\alpha(x) = \alpha \langle a, x | d_M | a, x \rangle^\alpha \in \Omega^1(M, i\mathbb{R}) \quad (4.17)$$

\mathcal{C} étant le chemin dans M tracé par $t \mapsto x(t)$; la seconde phase géométrique (associée au bruit) est générée par

$$A_Q^\alpha(\theta, \delta\theta) = \alpha \langle a, x | W(\delta\theta)^{-1} \partial_{\delta\theta} W(\delta\theta) | a, x \rangle^\alpha d\delta\theta \in \Omega^1(\mathbb{M}, i\mathbb{R}) \quad (4.18)$$

\mathcal{S} étant le chemin tracé dans \mathbb{M} par $t \mapsto (\theta(t), \delta\theta(t))$. Il s'en suit que [2]

$$\rho(T) = \mathbb{E}(|\psi(T)\rangle\langle\psi(T)|) \quad (4.19)$$

$$= \begin{pmatrix} | \langle 1 | a, x(T) \rangle^\alpha |^2 & e^{-\frac{D}{2} \int_0^T k(\theta(t))^2 dt} \langle 1 | a, x(T) \rangle^\alpha \langle a, x(T) | 2 \rangle \\ e^{-\frac{D}{2} \int_0^T k(\theta(t))^2 dt} \langle 2 | a, x(T) \rangle^\alpha \langle a, x(T) | 1 \rangle & | \langle 2 | a, x(T) \rangle^\alpha |^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (4.20)$$

où l'on a supposé que η était un bruit blanc gaussien ($\mathbb{E}(\eta(t)) = 0, \mathbb{E}(\eta(t_1)\eta(t_2)) = D\delta(t_1 - t_2)$). Le bruit de phase ne produit que de la décohérence sans relaxation des populations.

D'un point de vue géométrique, la double phase géométrique prend place dans un fibré composite

$$\begin{array}{ccc} P_+ & \leftarrow & U(1) \\ \downarrow & & \\ M_0 \times \mathbb{M} & \leftarrow & \mathbb{Z}_2 \end{array} \quad \text{où le groupe de jauge } U(1) \text{ du second étage représente les changements de phase, et le}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ M \end{array}$$

groupe \mathbb{Z}_2 du premier étage est l'antisymétrie sur le ruban de Möbius (le groupe associé à la torsion). J'ai montré [2] que ce fibré composite définissait un "fibré tordu" sur $M \times \mathbb{R}$ dont les fonctions de 2-transitions sont $h^{\alpha\beta\gamma}(x, \delta\theta) = g^{\beta\gamma}(x, \delta\theta)^{-1} g^{\alpha\beta}(x, \phi_\theta^{\alpha\beta}(\delta\theta))$ où la fonction de torsion est $\phi_\theta^{\alpha\beta}(\delta\theta) = \chi^{\alpha-1} \circ \chi^\beta(\theta, \delta\theta)$, $\chi^\alpha : U^\alpha \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}|_{U^\alpha}$ étant la trivialisatation locale du ruban de Möbius.

4.3 Idées concernant le cas général

Les deux exemples traités dans ce chapitre sont très simples. Si l'on veut traiter des systèmes comme décrits dans le chapitre précédent, on doit considérer la situation générale d'un système quantique asservi obéissant à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d\tilde{\psi}(t; \theta)}{dt} = H(x(t), \varphi^t(\theta))\tilde{\psi}(t; \theta) \quad \tilde{\psi} \in \mathcal{H} \quad (4.21)$$

où $x \in M$ sont toujours les paramètres de contrôle, $\theta \in \Gamma$ est un point de l'espace de phase (condition initiale) du système dynamique de flot φ^t (ici supposé continu en temps) régi par l'équation $\dot{\theta} = F(\theta(t))$. En prenant des copies du système avec une distribution $\rho_0 \in L^1(\Gamma, d\mu)$ ($\rho_0 \geq 0, \|\rho_0\|_1 = 1$) des conditions initiales, on a sous l'effet du bruit la matrice densité

$$\rho(t) = \mathbb{E}(|\tilde{\psi}(t)\rangle\langle\tilde{\psi}(t)|) = \int_\Gamma |\tilde{\psi}(t; \theta)\rangle\langle\tilde{\psi}(t; \theta)| \rho_0(\theta) d\mu(\theta) \quad (4.22)$$

μ étant une mesure de Γ invariante par le flot (dans le chapitre précédent $\Gamma = \mathbb{T}^2$ et μ était la mesure microcanonique classique, on se place aussi dans ce cas ici). Il s'agirait alors de traiter le problème comme avec la théorie adiabatique de Floquet vue en début de ce chapitre. Sauf que le théorème de Floquet ne s'applique pas car l'évolution n'est pas périodique (avec un flot de dérive linéaire sur le tore de rapport de fréquences irrationnel l'évolution est seulement quasipériodique, et elle n'est plus régulière avec un flot chaotique). On considère donc l'espace de Hilbert étendu $\mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes L^2(\Gamma, d\mu)$ et l'équation de Schrödinger-Koopman :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\theta, t)}{\partial t} = H_K(x(t))\psi(\theta, t) \quad \psi \in \mathcal{K} \quad (4.23)$$

avec l'Hamiltonien de Koopman [SJW07] :

$$H_K(x) = -i\hbar F^\mu(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} + H(x, \theta) \quad (4.24)$$

$F^\mu \partial_\mu \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma, d\mu))$ est le générateur de l'opérateur de Koopman $\mathcal{T}^t = e^{tF^\mu \partial_\mu}$ qui est tel que $\mathcal{T}^t f(\theta) = f(\varphi^t(\theta))$ [BMM12]. Dans le cas où l'équation du système dynamique classique est une équation de Hamilton, on a $H_K(x) = i\hbar \{\mathcal{H}, \cdot\} + H(x, \theta)$ où \mathcal{H} est l'Hamiltonien classique et $\{\cdot, \cdot\}$ est le crochet de Poisson. On peut montrer [Aub17] que $\tilde{\psi}(t; \theta) = \psi(\varphi^t(\theta), t)$ est solution de l'équation de Schrödinger. On peut aussi montrer [Aub17] que si l'on choisit pour condition initiale $\psi(\theta, t=0) = \sqrt{\rho_0(\theta)}\psi_0 \in \mathcal{K}$ (où $\psi_0 \in \mathcal{H}$ est une condition initiale commune pour toutes les copies du système quantique), alors

$$\rho(t) = \text{tr}_{L^2(\Gamma, d\mu)} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \quad (4.25)$$

Pour appliquer une approche adiabatique, on peut utiliser les états de quasiénergies définis par

$$H_K(x)|a(\theta), x\rangle^\alpha = \chi_a^\alpha(x)|a(\theta), x\rangle^\alpha \quad (4.26)$$

Mais par rapport à la théorie de Floquet, le traitement de cette équation est beaucoup plus difficile. Le générateur de Koopman en théorie de Floquet, $\omega \partial_\theta$ (dérive linéaire à une dimension), a un spectre très simple ($\text{Sp}(\omega \partial_\theta) = \omega \mathbb{Z}$ avec les états propres $\{e^{in\theta}\}_n$). Or le spectre de $F^\mu(\theta) \partial_\mu$ est très complexe (il a une grande composante singulièrement continue si la dynamique est chaotique). Cette complexité se retrouve dans le spectre de quasiénergies. On peut montrer par ailleurs [Aub17] que les points fixes et les points cycliques du flot jouent un rôle important dans la structure des états de quasiénergie.

Par application d'un théorème adiabatique dans \mathcal{K} , on a

$$\tilde{\psi}(T) = e^{-i\hbar^{-1} \int_0^T \chi_a^\alpha(x(t)) dt} e^{-\int_0^T A_a^\alpha} |a, \varphi^t(\theta)\rangle^\alpha + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (4.27)$$

avec $A_a^\alpha = \alpha \langle \langle a, x | d | a, x \rangle \rangle^\alpha \in \Omega^1(M, i\mathbb{R})$ le générateur de la phase géométrique adiabatique (associée au contrôle). Comme dans le cas de la théorie de Floquet, la quasiénergie comporte une phase géométrique non-adiabatique (associée au bruit) [Aub17] :

$$\chi_a^\alpha(x) = \int_\Gamma \alpha \langle a(\theta), x | H(x, \theta) | a(\theta), x \rangle^\alpha d\mu(\theta) - i\hbar \int_\Gamma F^\mu(\theta)^\alpha \langle a(\theta), x | \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} | a(\theta), x \rangle^\alpha d\mu(\theta) \quad (4.28)$$

La phase géométrique non-adiabatique n'est pas une intégrale sur un chemin mais sur tout l'espace de phase du bruit, mais si le système dynamique est ergodique sur tout Γ alors [Aub17]

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t i_X(t)^\alpha \langle a(\theta), x | d_\Gamma | a(\theta), x \rangle^\alpha dt = \int_\Gamma F^\mu(\theta)^\alpha \langle a(\theta), x | \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} | a(\theta), x \rangle^\alpha d\mu(\theta) \quad (4.29)$$

où $X(t) = \dot{\theta}^\mu(t) \frac{\partial}{\partial \theta^\mu}$ est le champ de vecteurs tangents à la trajectoire de phase (i_X est le produit intérieur de Γ , i.e. $i_X(\omega_\mu d\theta^\mu) = X^\mu \omega_\mu$ ($\forall X = X^\mu \partial_\mu \in T\Gamma$ and $\forall \omega \in \Omega^1\Gamma$)).

L'étude concernant cette problématique est en cours avec mon ancienne étudiante en thèse Lucile Aubourg. Outre la difficulté concernant le spectre de quasiénergies, d'autres difficultés sont à prévoir :

- Comment définir proprement les champs avec un processus stochastique (utiliser des dérivées et des intégrations au sens d'Itô) ?
- Que devient le problème avec un système dissipatif qui sur le long terme évolue sur un attracteur étrange ?
- Que se passe-t-il si l'équation du système dynamique est dépendante des paramètres de contrôle $\dot{\theta} = F_x(\theta(t))$ (la topologie risque d'être non-seulement liée à des phénomènes d'anholonomie de Cheon mais aussi à des bifurcations du système dynamique) ?

En résumé

La structure géométrique dans laquelle le contrôle d'un système asservi prend place est un fibré composite associé à l'extension de l'espace de Hilbert $\mathcal{H} \otimes L^2(\Gamma, d\mu)$. La topologie étant le cup-produit entre la classe de Deligne de degré 1 associée aux quasiénergies et celle de degré 2 du transport adiabatique dans l'espace étendu. L'approche se trouve être très similaire à celle suivie en théorie classique des cordes. Il est intéressant de noter que $\mathcal{H} \otimes L^2(\Gamma, d\mu)$ se présente comme un système bipartite où le bruit est modélisé par l'espace de Hilbert des observables classiques de carré sommable de l'espace de phase, ce qui le rapproche d'un environnement "quantique" (similaire à un réservoir ou à un bain). La matrice densité issue de la moyenne sur le bruit s'écrit naturellement comme une trace partielle sur l'environnement $\rho(t) = \text{tr}_{L^2(\Gamma, d\mu)} |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$. Ainsi, formellement, la décohérence que l'on peut observer dans $\rho(t)$ est induite par l'intrication entre le système quantique (\mathcal{H}) et son environnement ($L^2(\Gamma, d\mu)$). On avait déjà souligné au chapitre précédent que l'on ne pouvait pas distinguer la vraie décohérence (intrication entre les éléments du système quantique multipartite due au bruit) de la décohérence falsifiée (effet de moyenne sur le bruit pour des éléments découplés) en étudiant l'évolution des observables du système (cohérences moyennes, populations moyennes, entropie). Or même pour des éléments découplés, l'effet du bruit se traduit par une intrication entre le système et l'environnement quantique effectif représenté par $L^2(\Gamma, d\mu)$. Autrement dit, par un simple changement de représentation de l'environnement, on passe d'une décohérence falsifiée à une vraie décohérence. Il me semble donc que la distinction de Joos [Joo07] entre vraie et décohérence falsifiée est totalement artificielle, d'autant que compte-tenu des difficultés ontologiques en mécanique quantique, et dans l'interprétation réaliste pythagoricienne de celle-ci à laquelle je souscris, \mathcal{H} n'est pas plus privilégié comme description de la réalité du système que \mathcal{K} , bien au contraire puisque dans le cas de l'interaction matière-rayonnement l'équation de Schrödinger (semi-classique) n'est pas invariante de jauge électromagnétique alors que celle de Schrödinger-Floquet l'est. \mathcal{K} (ou \mathcal{F} pour l'interaction matière-rayonnement) me paraît donc être un bien meilleur candidat à l'essence physique du système que \mathcal{H} .

Publications

Le détail de mes travaux concernant la théorie adiabatique de Floquet et les modèles simples de distorsion stochastique peut être trouvé ci-dessous :

- [1] [D. Viennot](#), *Geometric phases in adiabatic Floquet theory, abelian gerbes and Cheon's anholonomy*, J. Phys. A : Math. Theor. **42**, 395302 (2009) [arXiv :0905.4584].
- [2] [D. Viennot](#), *Geometric phases in quantum control disturbed by classical sochastic processes*, J. Math. Phys. **53**, 082106 (2012) [arXiv :1208.0143].

Conclusion et perspectives de la partie I

La distorsion du contrôle par du bruit est possiblement une source de décohérence et de relaxation dans la dynamique contrôlée. Le cas d'un bruit chaotique est particulièrement intéressant car il présente une certaine richesse et est plus facile à manipuler formellement du fait de son déterminisme. Il reste beaucoup à faire pour passer des conclusions empiriques des expériences numériques à un formalisme complet décrivant la transmission des propriétés classiques au système quantique, et fournissant l'ensemble de la structure topologique et géométrique dans laquelle le contrôle prend place. L'approche à partir des états des quasiénergies dérivant du formalisme de Koopman semble prometteuse, et devrait permettre de mieux appréhender le rapport classique/quantique dans les systèmes asservis, grâce à son formalisme qui unifie les deux éléments de réalité. Le cas le plus général d'un système distordu par du bruit et avec des paramètres de contrôle externes modifiant également les paramètres du système dynamique modélisant ce bruit, i.e. $H_K(x) = -i\hbar F_x^\mu(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} + H(x, \theta)$, pourrait présenter une richesse de comportements intéressants à explorer du point de vue des relations classique-quantique. L'approche de Schrödinger-Koopman pourrait être utile pour étudier la transmission de propriétés chaotiques d'un système classique vers un système quantique, mais aussi pour la dynamique d'un système mixte classique-quantique. Outre le formalisme dont le développement doit être poursuivi, ce cas nécessite également la prise en compte des bifurcations classiques et la démonstration d'un théorème adiabatique adapté. D'autres difficultés sont à anticiper dans la poursuite de cette approche, comme la question de la description de processus stochastiques et de processus dissipatifs conduisant à un attracteur étrange. Dans les deux cas, la modélisation géométrique peut devenir plus difficile du fait de la non-dérivabilité (du moins au sens usuel) des variétés (fractales) qui pourraient être mises en jeu. Même dans les cas les plus simples, des difficultés pourraient survenir non dans les aspects formels mais pour les simulations numériques. En effet, le calcul du spectre et des fonctions de Koopman est un problème numérique réputé difficile, et nécessite la mise en œuvre de méthodes spécifiques qui peuvent parfois être assez lourdes. Or dans notre approche, c'est le spectre de quasiénergie qu'il sera nécessaire de calculer (qui est encore plus difficile car résultant d'une "intrication" entre le système quantique et le système classique). Peut-être sera-t-il nécessaire de développer des algorithmes spécifiques pour obtenir les états de quasiénergie (ou du moins une partie pertinente de ceux-ci), comme avec les méthodes d'Hamiltoniens effectifs que nous allons explorer dans la partie suivante. Celle-ci a pour but l'étude du contrôle adiabatique des systèmes pour lesquels le principal processus à l'œuvre sous l'effet de l'environnement est une forme de dissipation.

Deuxième partie

Contrôle adiabatique des systèmes
dissipatifs

Chapitre 5

Dynamique des systèmes dissipatifs

Dans cette partie nous allons étudier le processus de dissipation qui peut survenir au cours du contrôle. D'un point de vue corpusculaire, il s'agit d'une perte d'énergie au profit de l'environnement et d'un point de vue ondulatoire de la dissipation de l'onde quantique. Du fait de cette dissipation, la probabilité totale (la norme de la fonction d'onde) décroît et ne reste donc pas égale à 1. Les modèles dissipatifs sont toujours des modèles partiels qui, soit ignorent un processus inverse restaurant la probabilité totale, soit ne décrivent pas explicitement ce que devient le système "après" dissipation. Les systèmes dissipatifs sont donc gouvernés par des "Hamiltoniens effectifs" décrivant la partie d'intérêt du système et ignorant l'autre. Ces opérateurs sont non-autoadjoints, avec une partie anti-autoadjointe modélisant le processus de perte. Dans un premier temps, je vais donner quelques exemples de construction d'Hamiltoniens effectifs associés à des systèmes dissipatifs. La seconde section traitera ensuite de l'approximation adiabatique et de ses difficultés à être appliquées aux Hamiltoniens non-autoadjoints. Il y a en effet compétition entre le processus adiabatique qui tend à maintenir le système sur un état propre instantané et la dissipation qui tend à faire disparaître rapidement la population de cet état (sauf si celui-ci est le moins dissipatif de tous). Enfin dans la dernière section de ce chapitre, seront présentées des applications du principe adiabatique au contrôle de systèmes dissipatifs.

La majorité de ces travaux ont fait l'objet de collaborations avec Georges Jolicard de l'Institut UTINAM, avec Arnaud Leclerc (lorsqu'il était doctorant à l'Institut et depuis qu'il est en poste à l'Université de Metz) et avec John P. Killingbeck de l'Université de Hull (UK). Certains de ces travaux ont été également réalisés en collaboration avec Stéphane Guérin, Hans-Rudolf Jauslin et Ghassen Dridi de l'Université de Bourgogne et avec Osman Atabek et Roland Lefebvre de l'Université Paris-Sud.

5.1 Hamiltoniens effectifs

Dans cette partie nous allons présenter des modèles d'Hamiltoniens effectifs définissant des systèmes dissipatifs.

5.1.1 Hamiltonien effectif de l'équation de Lindblad

Les systèmes ouverts sur un grand environnement sont régis par l'équation de Lindblad :

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho] - \frac{\gamma}{2}\sum_k \{\Gamma_k^\dagger \Gamma_k, \rho\} + \sum_k \gamma \Gamma_k \rho \Gamma_k^\dagger \quad (5.1)$$

Le dissipateur de l'équation est le terme $-\frac{\gamma}{2}\sum_k \{\Gamma_k^\dagger \Gamma_k, \cdot\}$, alors que l'intricateur $\sum_k \gamma \Gamma_k \cdot \Gamma_k^\dagger$ a pour rôle de restaurer la probabilité totale ($\text{tr}\rho = 1$). De ce fait, il modélise les "sauts quantiques", c'est à dire des sauts dans les populations d'états induits par l'environnement. Dans les représentations stochastiques de l'équation de Lindblad (voir chapitre d'introduction) ce terme est représenté par des sauts aléatoires.

Mais sur une très courte durée, entre deux sauts quantiques, le système est régi par l'Hamiltonien effectif $H^{eff} = H - \frac{\imath}{2}\gamma^k \Gamma_k^\dagger \Gamma_k$. On a alors

$$\imath \hbar \dot{\psi} = H^{eff} \psi \iff \imath \hbar \dot{P}_\psi = H^{eff} P_\psi - P_\psi H^{eff \dagger} = [H, P_\psi] - \frac{\imath}{2}\gamma^k \{\Gamma_k^\dagger \Gamma_k, P_\psi\} \quad (5.2)$$

avec $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ (en l'absence de l'intricateur, la dynamique n'induit pas de changement de structure d'un état pur vers une matrice densité, néanmoins du fait de la non-normalisation, la pureté – au sens formel – décroît avec la norme carrée $\text{tr} P_\psi^2 = \|\psi\|^2$). Si en général la description par l'Hamiltonien effectif n'est valide que sur des périodes courtes, dans certains cas, lorsque les processus liés à l'environnement sont particulièrement lents (les taux par unité de temps γ^k particulièrement faibles) l'Hamiltonien effectif peut être une bonne description des processus. C'est particulièrement le cas dans l'émission spontanée à $T = 0K$. Considérons l'exemple d'un atome à trois niveaux $\{|d\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ avec une émission spontanée de l'état $|2\rangle$ vers un état "sombre" $|d\rangle$ avec un taux γ_- . L'équation de Lindblad est alors de la forme

$$\imath \hbar \dot{\rho} = [H, \rho] - \frac{\imath}{2}\gamma_- \{\sigma_{d2}^+ \sigma_{d2}^-, \rho\} + \nu \gamma_- \sigma_{d2}^- \rho \sigma_{d2}^+ \quad (5.3)$$

avec $H = \lambda_1 |1\rangle\langle 1| + \lambda_2 |2\rangle\langle 2| + \lambda_d |d\rangle\langle d|$, $\sigma_{d2}^- = |d\rangle\langle 2|$, et $\sigma_{d2}^+ = |2\rangle\langle d|$. L'équation peut être réécrite sous la forme

$$\imath \hbar \dot{\rho} = H^{eff} \rho - \rho H^{eff \dagger} + \nu \gamma_- \rho_{22} |d\rangle\langle d| \quad (5.4)$$

avec $H^{eff} = \lambda_1 |1\rangle\langle 1| + (\lambda_2 - \imath \frac{\gamma_-}{2}) |2\rangle\langle 2| + \lambda_d |d\rangle\langle d|$. En ignorant l'état sombre (en projetant sur le sous-espace engendré par $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, du fait que sa population restera très faible au cours de la dynamique, on peut modéliser le problème par le système à deux niveaux d'Hamiltonien effectif : $P_{12} H^{eff} P_{12} = \lambda_1 |1\rangle\langle 1| + (\lambda_2 - \imath \frac{\gamma_-}{2}) |2\rangle\langle 2|$. La dissipation induite par $-\imath \frac{\gamma_-}{2}$ représente la lente perte de population vers l'état sombre.

Des modèles construits sur le même principe se sont montrés pertinents du point vue expérimental [LC14, LRM14].

5.1.2 Hamiltonien effectif des opérateurs d'onde

Soit un système quantique décrit par un espace de Hilbert \mathcal{H} (de dimension infinie ou de très grande dimension) et par un Hamiltonien $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On suppose qu'il existe un sous-espace de Hilbert S_0 de petite dimension dans lequel l'essentiel de la dynamique et des processus physiques prend place¹. S_0 porte le nom d'espace actif, et l'on voudrait pouvoir décrire le système uniquement dans ce petit espace. Néanmoins une simple projection $P_0 H P_0$ étant trop brutale, il serait bon de pouvoir décrire les processus qui font quitter la fonction d'onde de S_0 vers S_0^\perp . D'autre part, il est évident que le spectre de $P_0 H P_0$ ne sera pas une partie du spectre de H . On cherche donc une description du système en terme de système dissipatif, où la dissipation modélise les sorties en dehors de l'espace actif. Soit P_0 le projecteur orthogonal sur S_0 supposé de dimension n . Soit P le projecteur orthogonal sur les n vecteurs propres de H qui sont essentiellement projetés dans S_0 . On cherche H^{eff} tel que ses n valeurs propres soient précisément les n valeurs propres de H associées aux états de P (en comptant plusieurs fois les éventuelles valeurs propres dégénérées). On peut montrer [KJ03] que $H^{eff} = P_0 H \Omega$ où $\Omega = P(P_0 P P_0)^{-1}$ est appelé opérateur d'onde de Bloch ($(P_0 P P_0)^{-1}$ étant le pseudoinverse² de $P_0 P P_0$). Cette définition de Ω est purement formelle (car elle suppose la connaissance de P), mais on montre [KJ03] que l'opérateur d'onde de Bloch satisfait à l'équation :

$$[H, \Omega] \Omega = 0, \quad \Omega^2 = \Omega, \quad \Omega P_0 = \Omega \quad (5.5)$$

que l'on peut interpréter comme une sorte de généralisation non-linéaire de l'équation des projecteurs propres : $[H, P] = 0$ et $P^2 = P$. La méthode peut être généralisée à d'autres situations où P ne représente pas un projecteur propre. Par exemple, pour décrire la dynamique d'un système dont les conditions

1. On ne discute pas ici de comment construire S_0 , on le suppose connu.

2. Le pseudoinverse d'un opérateur A est $A^{-1} = (1 - P_{\ker A})(A|_{\ker A^\perp})^{-1}(1 - P_{\ker A})$ où $P_{\ker A}$ est le projecteur orthogonal sur $\ker A$.

initiales sont dans S_0 , on choisit $P(t)$ dépendant du temps solution de l'équation de Schrödinger-von Neumann $i\hbar\dot{P} = [H, P]$. L'opérateur d'onde temporel $\Omega(t) = P(t)(P_0P(t)P_0)^{-1} = U(t, 0)(P_0U(t, 0)P_0)^{-1}$ ($U(t, 0)$ est l'opérateur d'évolution) définit un Hamiltonien effectif H^{eff} qui représente la dynamique dans S_0 ainsi que les pertes au cours du temps vers S_0^\perp (à condition que $\forall t, P(t)P_0 \neq 0$, la dynamique doit se dérouler essentiellement à l'intérieur de S_0) [JK03]. Dans ce cas l'opérateur d'onde est solution de l'équation [JK03]

$$i\hbar\dot{\Omega} = [H(t), \Omega(t)]\Omega(t), \quad \Omega(t)^2 = \Omega(t), \quad \Omega(0) = P_0 \quad (5.6)$$

Dans cette approche, l'espace de Hilbert est scindé $\mathcal{H} = S_0 \oplus S_0^\perp$, l'espace actif S_0 avec H^{eff} décrit le système dissipatif, alors que S_0^\perp décrit une sorte d'environnement dans lequel "tombe" une partie de la fonction d'onde (d'où le processus de dissipation). Il ne s'agit pas d'un environnement qui va s'intriquer avec le système, mais d'un environnement "boîte noire" dans lequel une partie du système va "disparaître" (car non décrit dans la modélisation).

5.1.3 Hamiltonien avec frontière absorbante

Considérons un système quantique décrit par l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+, dr)$ et par un Hamiltonien de la forme $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r)$ où le potentiel V est idéalement à support borné et à défaut décroît "rapidement" vers 0 lorsque $r \rightarrow +\infty$ (la situation peut être généralisée à un axe complet et à plusieurs dimensions). On supposera de plus $\lim_{r \rightarrow 0} V(r) = +\infty$ pour imposer une condition au bord stricte. La description sur la demi-droite \mathbb{R}^+ pose problème du fait de sa longueur infinie, en particulier pour les simulations numériques. On pourrait vouloir décrire le système uniquement sur un intervalle $[0, r_{max}]$ en considérant que la fonction d'onde est "perdue" (ou est trop loin) lorsqu'elle dépasse r_{max} . Cela suppose que le support de V soit dans $[0, r_{max}]$ ou à défaut que $V(r)$ soit négligeable pour $r \geq r_{max}$. Comme dans l'exemple précédent, l'espace de Hilbert est scindé $L^2(\mathbb{R}^+, dr) = L^2([0, r_{max}], dr) \oplus L^2([r_{max}, +\infty[, dr)$ où $L^2([r_{max}, +\infty[, dr)$ est un environnement "boîte noire" dans lequel "tombe" tout ou partie de la fonction d'onde. Le problème est que l'on ne peut pas brutalement projeter H sur $L^2([0, r_{max}], dr)$, car la frontière r_{max} va refléter les ondes quantiques comme un mur de potentiel infini. Ainsi on aura des ondes rétrogrades artificielles, qui du fait des interférences qu'elles génèrent modifient la structure du spectre (le continuum sera artificiellement changé en un spectre purement ponctuel sans signification, associé à des ondes stationnaires semblables à des états liés dont le comportement n'a rien à voir avec la réalité). Il est donc nécessaire de détruire les ondes qui arrivent sur r_{max} pour éliminer ces réflexions artificielles et modéliser la perte des ondes vers $[r_{max}, +\infty[$. Pour cela on introduit une frontière absorbante $[r_{opt}, r_{max}]$:

$$H^{eff} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) - \imath V_{opt}(r) \quad (5.7)$$

$H^{eff} \in \mathcal{L}(L^2([0, r_{max}], dr))$, avec $V_{opt}(r) \geq 0$ ($\forall r$) de support $[r_{opt}, r_{max}]$ et tel que $\lim_{r \rightarrow r_{max}} V_{opt}(r) = +\infty$. V_{opt} est dit potentiel optique, son rôle est de dissiper les ondes lorsqu'elles pénètrent dans la frontière absorbante avant qu'elles ne soient reflétées par le mur artificiel en r_{max} . On montre [Moi11] que $\text{Sp}_{cont}(H^{eff}) \simeq \{\lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)e^{-\imath\alpha}, \lambda \in \text{Sp}_{cont}(H)\}$ (avec $\lambda_0 = \inf \text{Sp}_{cont}(H)$), c'est à dire que le spectre continu de H essentiellement tourne dans le plan complexe inférieur d'un certain angle α lié à la fonction V_{opt} . "Essentiellement" car c'est le comportement des valeurs spectrales de basse énergie, à haute énergie le spectre continu "retombe" vers l'axe réel. La partie imaginaire des valeurs spectrales sont inversement proportionnelles aux durées de vie des états associés. Les états du spectre continu, qui sont des états de diffusion, ont une durée de vie finie car l'onde finit par s'échapper de $[0, r_{max}]$, c'est à dire finit par être absorbée par la frontière. Pour les états de basse énergie, l'onde met plus de temps pour arriver à la frontière et a donc une durée de vie supérieure que celle d'un état de plus haute énergie (on est ici dans une interprétation semi-classique, il n'y pas de processus temporel au sens strict du terme). Ce qui explique la rotation dans le plan complexe. Mais pour les états de très hautes énergies, les ondes sont trop rapides; elles entrent dans la frontière absorbante, rebondissent sur r_{max} et ressortent

de la frontière avant que celle-ci n'ait le temps de les absorber. D'où la chute vers l'axe réel des valeurs spectrales de très hautes énergies (mais ce n'est en général pas un problème, car on peut supposer que ces états sont très peu peuplés). On peut néanmoins corriger cette difficulté en considérant un potentiel optique non-local $V_{opt}(r, \frac{d}{dr})$ qui absorbe différemment les ondes en fonction de leurs impulsions. Avec un choix adapté, l'usage d'un potentiel optique non-local est équivalent à une autre méthode dite de rotation analytique du spectre [Moi11]. $\text{Sp}_{pp}(H^{eff}) = \text{Sp}_{pp}(H) \cup \text{Sp}_{res}(H^{eff})$, le spectre purement ponctuel de H n'est pas affecté par la frontière absorbante car les états propres liés sont essentiellement localisés sur le support³ de V (et décroissent exponentiellement en dehors). Les états liés ne sont donc pas absorbés par la frontière et restent donc liés et de durée de vie infinie. Au spectre purement ponctuel initial, s'ajoutent de nouvelles valeurs propres $\text{Sp}_{res}(H^{eff})$ dites résonances, qui présentent des parties imaginaires négatives et se trouvent entre l'axe réelle et le continuum tourné (certaines peuvent se trouver sur l'axe réel). La partie imaginaire d'une résonance, qui est appelée largeur de résonance, est aussi l'inverse de sa durée de vie. Mais contrairement au spectre continu où les parties imaginaires dépendent de la position de la frontière, les largeurs de résonance sont fixes et non arbitraires. Les résonances sont associées à des états métastables qui se comportent comme des états liés sur une durée donnée avant de "diffuser". Souvent ces états sont associés à un phénomène d'effet tunnel, l'onde est bloquée derrière une colline de potentiel de V avant de pouvoir diffuser par effet tunnel en un temps caractéristique proportionnel à l'inverse de la largeur de résonance [Moi11].

Dans nos travaux sur les systèmes moléculaires non-autoadjoints, nous avons étudié [7] les différents régimes dynamiques associés à la dissipation en fonction du type d'états impliqués (états de résonance ou états du continuum), dissipation induite par un champ laser ayant pour but de faire transiter le système d'un état lié vers un état dissipatif (H^{eff} modélisant la vibration d'une molécule diatomique, la dissipation modélisant le phénomène de photodissociation de la molécule). Nous avons montré [7,8] que les états de résonance définissent un régime permanent de dissipation alors que les états du continuum ne participent qu'à un régime transitoire (cf. figure 5.1). Par conséquent, si seul le régime permanent nous intéresse, on peut se débarrasser du continuum dans la description du système et ne considérer que le spectre purement ponctuel de H^{eff} .

Dans les problèmes de dynamiques quantiques, il peut être utile de supposer que la dynamique est cyclique $\frac{\psi(0)}{\|\psi(0)\|} = e^{i\varphi} \frac{\psi(T)}{\|\psi(T)\|}$ (égalité des états initiaux et finaux – éventuellement renormés – à une phase près). Dans ce cas, on peut en effet utiliser la théorie de Floquet pour remplacer l'intégration de l'équation de Schrödinger par la résolution d'une équation aux valeurs propres. La dynamique peut alors être considérée comme adiabatique vis à vis de l'état de quasiénergie généralisé (vecteur propre de l'Hamiltonien de Floquet $H_F = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + H(t)$). Le problème est que dans la plupart des situations intéressantes, cette périodicité n'est pas assurée. De plus c'est l'équation aux valeurs propres qui fixe la condition initiale des vecteurs propres (au sens où $(-i\hbar \partial_t + H)|a, t\rangle = \chi_a |a, t\rangle$ dans⁴ $\mathcal{H} \otimes L_0^2([0, T], dt)$ impose $|a, t=0\rangle \in \mathcal{H}$). Pour résoudre cette difficulté, on prolonge l'intervalle de temps $[0, T + \tau]$ et on considère l'Hamiltonien [11] :

$$H^{eff}(t) = H(t) - iV_{opt}(t)(\text{id}_{\mathcal{H}} - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|) \quad (5.8)$$

où V_{opt} est un potentiel optique de support $[T, T + \tau]$ (frontière temporelle absorbante). Après la date T , le potentiel optique dissipe tous les états à l'exception de celui de la condition initiale $\psi_0 \in \mathcal{H}$. De ce fait, une dynamique commençant sur ψ_0 gouvernée par H^{eff} se terminera sur ψ_0 . La dynamique (dissipative) est cyclique et l'Hamiltonien de Floquet $H_F^{eff} = -i\hbar \partial_t + H^{eff}(t)$ aura un vecteur propre dont les conditions aux limites sont ψ_0 . Ce principe de frontière absorbante temporelle, appelé CATM (méthode de la trajectoire adiabatique contrainte), proposé par Georges Jolicard, a été développé au

3. ou le quasi-support où V n'est pas négligeable

4. $L_0^2([0, T], dt)$: espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur $[0, T]$ avec conditions aux limites périodiques

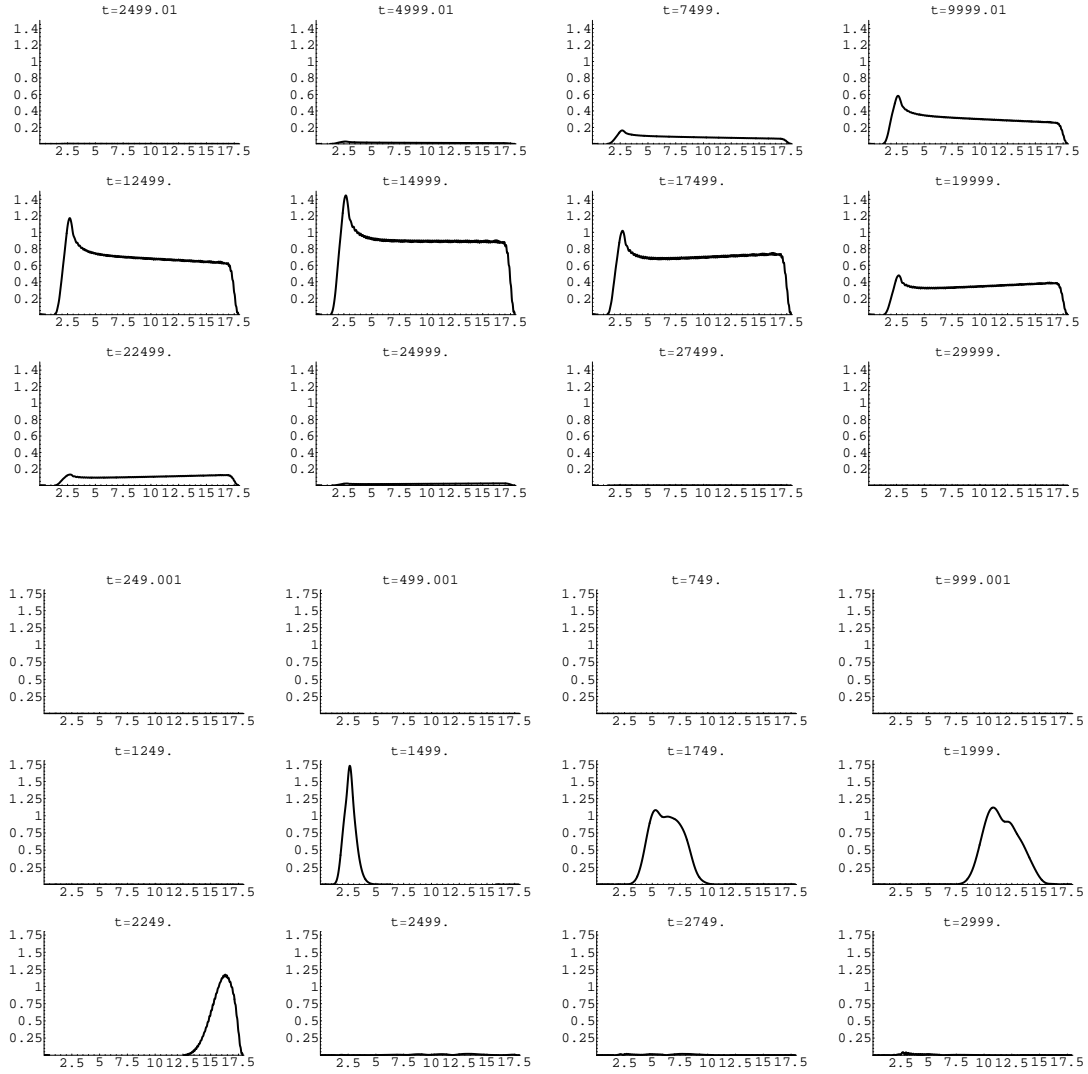


FIGURE 5.1 – Paquet d’ondes de dissociation de H_2^+ pour 12 instants pour un processus induit par une impulsion laser gaussienne impliquant un état de résonance (en haut) ou des états du continuum (en bas). L’axe horizontal est la distance internucléaire en unités atomiques, la frontière absorbante débutant à $r_{opt} = 17$ u.a.. Le paquet d’ondes de dissociation est totalement délocalisé dans le cas de la résonance (et est associé au régime permanent d’un flux constant) alors qu’il ressemble à un paquet d’ondes d’un “fragment localisé” dans le cas du continuum (et est associé au régime transitoire qui ne perdure que le temps que ce paquet d’ondes localisé disparaisse dans la frontière absorbante). Tiré de [8].

cours de ma thèse et celle d'Arnaud Leclerc (encadrées par G. Jolicard). Comme nous l'avons montré [11,15], elle fournit une méthode numérique d'intégration "globale" de l'équation de Schrödinger (avec un Hamiltonien explicitement dépendant du temps) très compétitive.

5.1.4 Hamiltonien d'un spin localisé en espace-temps courbe

Nous présentons ici un modèle plus exotique de système dissipatif. Il s'agit d'un spin embarqué dans un vaisseau spatial dans un espace-temps courbe relativiste (sans interaction extérieure). Le vaisseau est en chute libre, c'est à dire évolue suivant une géodésique de l'espace-temps. Du point de vue de la théorie quantique des champs en espace-temps courbe, un champ de fermions libre de masse m obéit à l'équation de Dirac-Einstein (pour simplifier les notations on pose $\hbar = c = 1$ dans ce paragraphe) :

$$(\gamma^A e_A^\mu(x) \nabla_\mu - m) \Psi(x) = 0 \quad (5.9)$$

où $\{\gamma^A\}_{A=0,\dots,3}$ sont les matrices de Dirac, $\Psi(x) \in \mathbb{C}^4$. $\{e_A^\mu(x)\}$ sont les tétrades (vierbeins) de la géométrie de l'espace-temps, c'est à dire que la métrique d'espace-temps est $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{AB} e_\mu^A(x) e_\nu^B(x)$ où η_{AB} est la métrique de Minkowski (e_μ^A sont les composantes de la matrice inverse de e_μ^A , i.e. $e_\mu^A e_B^\mu = \delta_B^A$). Tout observateur Galiléen voit son voisinage d'espace-temps comme étant plat (comme un observateur à la surface de la Terre pourrait la considérer plate). Les vecteurs $\{e_A^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}_{A=0,\dots,4}$ constituent les quatre directions de l'espace-temps plat local (de métrique η_{AB}) vu par l'observateur Galiléen en x (en ce sens, ils définissent le référentiel localement Galiléen). Le principe de l'équation de Dirac-Einstein est qu'un observateur localement Galiléen voyant un espace-temps local plat, voit le champ de fermions obéir à l'équation de Dirac usuelle dans celui-ci $(\gamma^A \partial_A - m) \Psi = 0$. Les tétrades permettent de passer de la représentation dans l'espace-temps plat de l'observateur à l'espace-temps courbe réel. Il faut néanmoins modifier la dérivée covariante⁵ :

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \omega_\mu^{AB}(x) \frac{1}{4} [\gamma_A, \gamma_B] \quad (5.10)$$

où $\omega_\mu^{AB} = e_\nu^A \Gamma^\nu_{\mu\rho} e^{B\rho} + e_\nu^A \frac{\partial e^{B\nu}}{\partial x^\mu}$ est la connexion de Lorentz (dite aussi spin-connexion). Les symboles de Christoffel $\Gamma^\nu_{\mu\rho}$ mesurent la rotation d'espace-temps instantanée des vecteurs induite par la courbure. En effet, le transport parallèle d'un vecteur sur une variété courbe induit une rotation du dit vecteur (par rapport aux directions définies par le système coordonnées locales). En mécanique classique, la dérivation d'un vecteur dans un référentiel en rotation obéit à la règle $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$ (où \mathcal{R}_0 est un référentiel Galiléen, \mathcal{R} est le référentiel en rotation dans \mathcal{R}_0 définie par le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$). On peut réécrire cette relation de manière tensorielle : $\nabla_0 u^i = \partial_0 u^i + \Gamma^i_{0j} u^j$ (avec $\Gamma^i_{0j} = \epsilon^i_{kj} \Omega^k - \epsilon_{ijk}$ étant le symbole de Levi-Civita -). La relativité traitant à égalité temps et espace, les rotations de Lorentz induisent des dérivées covariantes dans toutes les directions de l'espace en plus de la dérivée dans la direction du temps, et qui agissent sur des quadrivecteurs. Ainsi la dérivée covariante $\tilde{\nabla}_\mu = \partial_\mu + \Gamma^\nu_{\mu\rho}$ n'est rien d'autre que la prise en compte de la rotation des vecteurs induite par la courbure de l'espace-temps. Mais on n'applique pas la dérivée sur un vecteur tangent de l'espace-temps mais sur les spineurs de Dirac qui sont définis dans l'espace-temps plat vu par l'observateur Galiléen. La conjugaison par les tétrades ($e_\nu^A \Gamma^\nu_{\mu\rho} e^{B\rho}$) permet de se placer dans la représentation de celui-ci. Mais les tétrades forment une base mobile, il faut donc corriger la dérivation des effets de variations de la base mobile en ajoutant le terme usuel $e_\nu^A \partial_\mu e^{B\nu}$.

La théorie quantique des champs en espace-temps courbe pose problème pour décrire notre système. En effet, à cause des principes de la seconde quantification, dans celle-ci le nombre de fermions n'est pas fixé (alors que l'on suppose savoir qu'il y a bien un et un seul spin dans notre vaisseau). De plus, les solutions de l'équation de Dirac-Einstein sont délocalisées dans tout l'espace-temps, ce qui gêne très fortement le traitement des solutions (et conduit à toutes les difficultés issues de l'incompatibilité entre relativité

5. on donne les formules dans la représentation de Weyl

générale et mécanique quantique). Or nous supposons savoir “exactement” où se trouve le spin (dans notre vaisseau qui n’est “qu’un point” à l’échelle caractéristique de la géométrie de l’espace-temps). On peut faire une série d’approximations semi-classiques⁶ pour arriver à notre système. On montre [PTW12] qu’avec ces approximations, le spin supporté par le fermion obéit à une équation de Schrödinger de la forme :

$$i\frac{d\psi}{d\tau} = \vec{B}^{eff}(\tau) \cdot \vec{S}\psi(\tau) \quad (5.11)$$

où $\psi \in \mathbb{C}^2$ est l’état du spin, et \vec{S} est le vecteur des opérateurs de spin. Par rapport à un spin dans un champ magnétique dans une approche non-relativiste, ici τ est le temps propre du fermion le long de la géodésique et le champ magnétique effectif est complexe $\vec{B}^{eff} = \vec{B}_{\sharp}^{eff} + i\vec{B}_0^{eff}$ où

$$\vec{B}_{\sharp}^{eff}(\tau) = \begin{pmatrix} \omega_{\mu}^{23}(x(\tau))\dot{x}^{\mu} \\ \omega_{\mu}^{31}(x(\tau))\dot{x}^{\mu} \\ \omega_{\mu}^{12}(x(\tau))\dot{x}^{\mu} \end{pmatrix}; \quad \vec{B}_0^{eff}(\tau) = \begin{pmatrix} \omega_{\mu}^{01}(x(\tau))\dot{x}^{\mu} \\ \omega_{\mu}^{02}(x(\tau))\dot{x}^{\mu} \\ \omega_{\mu}^{03}(x(\tau))\dot{x}^{\mu} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

La partie réelle \vec{B}_{\sharp}^{eff} est le vecteur responsable de la rotation du spin induite par la courbure, alors que la partie imaginaire \vec{B}_0^{eff} est responsable du processus dissipatif. On peut se poser la question de l’origine de ce processus. Il faut d’abord remarquer que l’Hamiltonien $H^{eff} = \vec{B}^{eff} \cdot \vec{S}$ induit une évolution non-unitaire par rapport au produit scalaire usuel de \mathbb{C}^2 : $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Mais elle est unitaire par rapport au produit scalaire $\langle \psi | \phi \rangle_{\star} = \langle \psi | \bar{\sigma}^A | \phi \rangle u_A$ (où $(\bar{\sigma}^A)_{A=0,1,2,3} = (\text{id}_{\mathbb{C}^2}, -\sigma_x, -\sigma_y, -\sigma_z) - \sigma_{x,y \text{ ou } z}$ sont les matrices de Pauli – et u_A est la quadrivitesse normalisée du spin ($u^A u_A = 1$) vue dans l’espace-temps plat d’un observateur localement Galiléen). Pour comprendre pourquoi il y a plusieurs produits scalaires, il faut se souvenir que leur rôle en mécanique quantique est avant tout de définir les fonctionnelles linéaires fortement continues (les bras), c’est à dire les applications linéaires qui à un état (un ket) va fournir l’amplitude de probabilité de survenue de l’événement associé à la fonctionnelle si l’on fait une mesure sur le système. Ainsi on peut interpréter [17] le sens de $\langle \bar{\sigma}^A | u_A \phi \rangle$ comme l’application qui fournit la probabilité de trouver le spin dans l’état ϕ pour un observateur (dans un référentiel) de quadrivitesse u_A . Le résultat des mesures (en particulier des moments magnétiques) sont différents d’un référentiel à un autre en relativité. L’évolution est donc unitaire pour $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\star}$ car pour un observateur comobile avec le spin (qui tombe en chute libre avec lui) la gravité est “effacée” et aucun effet dissipatif n’est visible pour cet observateur. Par contre un observateur de quadrivitesse $u = (1, 0, 0, 0)$ (produit scalaire usuel), c’est à dire comobile avec les sources du champ gravitationnel (et donc pas avec le spin qui est en chute libre sur ces sources), voit un effet dissipatif. Il n’est pas difficile de comprendre d’où vient cet effet. Si l’on était resté dans le cadre de la théorie quantique des champs (avec la seconde quantification) on verrait que l’état de vide quantique pour l’observateur en chute libre, est un état rempli de particules pour l’observateur comobile avec les sources. Dans le cas d’un trou noir, on montre [FSM05] que le champ de particules dans ce second référentiel est intriqué avec un champ d’antiparticules sous l’horizon des événements, le champ en question se comporte comme un rayonnement thermique que l’on appelle effet Hawking. Dans le cas plus simple où la gravitation n’est que la force d’inertie d’entraînement d’un référentiel uniformément accéléré (espace-temps de Rindler) on parle de l’effet Unruh. Peu importe la situation, mais l’observateur qui n’est pas comobile avec le fermion, voit un champ de particules “autour” de celui-ci qui se comporte comme un bain thermique. Du fait des approximations semi-classiques, ce bain thermique n’est pas modélisé explicitement dans le modèle du spin localisé, mais les “couplages” avec ce champ (les éléments de la dérivée covariante) s’y trouvent. On se retrouve donc dans une situation similaire à celle décrite avec l’Hamiltonien effectif de l’équation de Lindblad. Le terme d’intrication du fermion avec le champ de Hawking/Unruh est absent (car ce champ n’est pas modélisé), il n’y a donc pas restauration de la probabilité totale, mais le terme de dissipation est modélisé par la partie imaginaire de \vec{B}^{eff} .

6. pas de seconde quantification, approximation WKB fondée sur l’idée que la longueur d’onde de Compton du fermion est négligeable devant le rayon de courbure de l’espace-temps

5.2 Transport adiabatique des systèmes dissipatifs

5.2.1 L'approximation adiabatique avec Hamiltoniens non-autoadjoints

Soit $M \ni x \mapsto H(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une famille d'Hamiltoniens non-autoadjoints (on suppose ici pour simplifier que $\dim \mathcal{H} < +\infty$). On considère les vecteurs propres droits et gauches :

$$H(x)|a, x\rangle = \lambda_a(x)|a, x\rangle \quad (5.13)$$

$$H(x)^\dagger|a^*, x\rangle = \overline{\lambda_a(x)}|a^*, x\rangle \quad (5.14)$$

avec la condition de biorthonormalisation $\langle a^*, x|b, x\rangle = \delta_{ab}$. On suppose ici que les valeurs propres ne sont pas globalement dégénérées (et donc pas de bloc de Jordan). Soit $t \mapsto x(t) \in M$ décrivant un chemin de contrôle \mathcal{C} suivi lentement et ne rencontrant pas de croisement de valeur propre, et soit la condition initiale $\psi(0) = |a, x(0)\rangle$. De manière grossière, on peut dire [Joy07] que

$$\psi(T) = e^{-i\hbar^{-1} \int_0^T \lambda_a(x(t)) dt} e^{-\int_{\mathcal{C}} A_a} |a, x(T)\rangle + \mathcal{O}\left(\frac{e^{\int_0^T \max_{b \neq a} \Im(\lambda_b(x(t)) - \lambda_a(x(t))) dt}}{T}\right) \quad (5.15)$$

avec le générateur de la phase géométrique $A_a(x) = \langle a^*, x|d|a, x\rangle \in \Omega^1(M, \mathbb{C})$. Il vient que si λ_a n'est pas la valeur propre la moins dissipative (celle qui a la plus grande partie imaginaire, i.e. celle qui est la plus proche de l'axe réel pour un système strictement dissipatif où $\text{Sp}(H(x))$ est dans le plan complexe inférieur), rien n'assure que l'erreur non-adiabatique ne soit pas grande. Il y a en effet dans le cas contraire une compétition entre le processus de contrôle adiabatique qui tend à maintenir la population du système majoritairement sur $|a, x\rangle$ et le processus dissipatif qui tend à dissiper la population de $|a, x\rangle$ plus vite que celles des états moins dissipatifs. Ce problème constitue la principale difficulté à appliquer un schéma de contrôle adiabatique avec les systèmes dissipatifs. Une possibilité pour améliorer la situation est, comme nous l'avons montré [10], d'utiliser des états "superadiabatiques". Il s'agit de travailler non pas avec les vecteurs propres de l'Hamiltonien du système mais avec un des Hamiltoniens renormalisés $(H_{sup-ad}^n)_n$ définis par :

$$H_{sup-ad}^{n+1}(s) = R_n(s)^{-1} H_{sup-ad}^n(s) R_n(s) - \frac{i\hbar}{T} R_n(s)^{-1} \dot{R}_n(s) \quad (5.16)$$

où $s = t/T$ est le temps réduit, R_n est la matrice des vecteurs propres de H_{sup-ad}^n , et $H_{sup-ad}^0(s) = H(x(sT))$.

5.2.2 Les phases géométriques non-unitaires

La notion de population qui est au centre de l'approximation adiabatique pose des problèmes dans le cas dissipatif [12]. Considérons la fonction d'onde suivante :

$$\psi(t) = c_1(t) e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \lambda_1(x(t')) dt'} e^{-\int_{\mathcal{C}:x(0) \rightarrow x(t)} A_1} |1, x(t)\rangle + c_2(t) e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \lambda_2(x(t')) dt'} e^{-\int_{\mathcal{C}:x(0) \rightarrow x(t)} A_2} |2, x(t)\rangle \quad (5.17)$$

Si $\psi(0) = |1, x(0)\rangle$, on dira que l'approximation adiabatique est valide si la population de $|2, x(t)\rangle$ reste négligeable devant celle de $|1, x(t)\rangle$. Mais puisque $\lambda_a, A_a \in \mathbb{C}$, contrairement au cas conservatif, les phases participent à la probabilité d'occupation des états. De plus, les états propres droits ne sont pas nécessairement normalisés mais biorthonormalisés aux états gauches, ce qui complique encore la définition de la notion de population. Il faut noter que le changement de norme des états propres droits constituent un changement de jauge de groupe \mathbb{C}^* :

$$|a, x\rangle \rightarrow \mu_a(x)|a, x\rangle \quad \mu_a(x) \in \mathbb{C}^* \quad (5.18)$$

$$|a^*, x\rangle \rightarrow \frac{1}{\mu_a(x)} |a^*, x\rangle \quad (5.19)$$

$$A_a(x) \rightarrow A_a(x) + d \ln \mu_a(x) \quad (5.20)$$

Il vient que l'état invariant par changement de normalisation est $e^{-\int_{c:x(0) \rightarrow x(t)} A_a} |a, x(t)\rangle$ et qu'il apparaît donc logique de définir la population de l'état a par $p_a(t) = |c_a(t) e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \lambda_a(x(t')) dt'}|^2$ (plutôt que $|c_a(t)|^2$ ou $|c_a(t) e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \lambda_a(x(t')) dt'} e^{-\int_{c:x(0) \rightarrow x(t)} A_a}|^2$). Nous avons montré [12] en quoi cette question de bien définir la notion de population pouvait être importante, car avec une mauvaise définition, l'on peut aboutir à une conclusion erronée en identifiant comme adiabatique un régime qui ne l'est pas (et inversement). Mais notre définition des populations n'est pas sans poser problème ($\sum_a p_a(t) \neq \|\psi(t)\|^2$, la somme des probabilités d'occupation des états propres n'est pas égale à la probabilité de survie du système, sauf à remplacer le produit scalaire canonique par un produit scalaire adéquat dépendant du temps [12]).

Nous avons de plus montré [13] que les phases géométriques adiabatiques générées par $A_a(s) = \langle a^*, x(s) | \frac{d}{ds} |a, x(s)\rangle$ ($s = t/T$ le temps réduit), ne correspondaient pas aux phases géométriques non-adiabatiques impliquées par la cyclicité $x(1) = x(0)$, qui sont générées par $A_{aT}^{eff}(s) = \frac{\langle \phi_T^a(s) | \frac{d}{ds} | \phi_T^a(s) \rangle}{\langle \phi_T^a(s) | \phi_T^a(s) \rangle}$ où $\phi_T^a(s)$ est l'état tel que $\frac{\psi(sT)}{\|\psi(sT)\|} = e^{i\varphi} \frac{\phi_T^a(s)}{\|\phi_T^a(s)\|}$ avec $\phi_T^a(1) = \phi_T^a(0)$ et $\lim_{T \rightarrow +\infty} \phi_T^a(s) = |a, x(s)\rangle$. Nous avons démontré [13] qu'en réalité c'était la somme des phases dynamique et géométrique qui était indépendante du point de vue :

$$i\hbar^{-1} T \lambda_a(x(s)) + A_a(s) = i\hbar^{-1} T \lambda_{aT}^{eff}(s) + A_{a,T \rightarrow \infty}^{eff}(s) \quad (5.21)$$

où la phase dynamique effective est

$$\lambda_{aT}^{eff}(s) = \lambda_a(x(s)) + \frac{i\hbar}{T} \frac{\langle a, x(s) | \dot{P}_a | a, x(s) \rangle}{\langle a, x(s) | a, x(s) \rangle} \quad (5.22)$$

$P_a(s) = |a, x(s)\rangle \langle a^*, x(s)|$ est le projecteur (non-orthogonal) sur $|a, x(s)\rangle$. On voit que la phase dynamique effective cache une seconde phase géométrique $\eta_a(s) = \frac{\langle a, x(s) | P_a | a, x(s) \rangle}{\langle a, x(s) | a, x(s) \rangle}$ liée à la dissipation. La situation est semblable à celle évoquée dans la partie précédente, où en plus de la phase géométrique adiabatique associée au contrôle lent, s'ajoutait une phase non-adiabatique associée aux oscillations ou frappes rapides (bruit environnemental) et qui était cachée dans la quasiénergie. λ_{aT}^{eff} joue ici le même rôle que la quasiénergie (mais ce n'en est pas une) et η_a est la phase géométrique associée à l'effet de l'environnement (la dissipation).

5.2.3 Dynamique presque adiabatique

Comme expliqué précédemment, la compétition entre les processus de contrôle adiabatique et de dissipation rend l'approximation adiabatique peu fiable. Plutôt que d'essayer de chercher à améliorer l'approximation (par renormalisation superadiabatique ou par la recherche de conditions favorables à celle-ci), il m'a semblé plus pertinent d'assumer le fait qu'elle n'était pas satisfaisante. On peut néanmoins supposer qu'elle est au moins très grossièrement valide dans le sens où l'état obtenu par celle-ci n'est pas orthogonal à la réalité. Soit $P_a(t)$ le projecteur propre sur $|a, x(t)\rangle$ et $P(t)$ le projecteur propre sur la véritable solution de l'équation de Schrödinger ($i\hbar \dot{P} = H(x(t))P(t) - P(t)H(x(t))^\dagger$). Par principe, on peut corriger l'erreur de l'approximation à chaque instant par l'opérateur d'onde $\Omega(t) = P(t)(P_a(t)P(t)P_a(t))^{-1}$ (où $^{-1}$ désigne toujours le pseudoinverse) [14]. Cette expression est purement formelle et ne peut être utilisée en pratique car elle nécessite de connaître la solution de la dynamique $P(t)$. J'ai montré [14] que cet opérateur d'onde généralisé (avec un espace actif $\text{Ran} P_a(t)$ dépendant du temps) satisfait à l'équation non-linéaire suivante :

$$i\hbar \dot{\Omega}(t) = [H(x(t)), \Omega(t)] \Omega(t) + i\hbar \Omega(t) \dot{\Omega}(t) \quad (5.23)$$

Il est intéressant de noter que la structure de cette équation n'est pas très différente de celle des opérateurs d'onde temporels usuels (avec espace actif fixe) si ce n'est que dans ce cas $\Omega \dot{\Omega} = 0$. J'ai montré [14] que la dynamique prend alors la forme exacte :

$$\psi(T) = e^{-i\hbar^{-1} \int_0^T \lambda_a(x(t)) dt} e^{-\int_c A_a} e^{-\int_0^T \eta_a(t) dt} \Omega(T) |a, x(T)\rangle \quad (5.24)$$

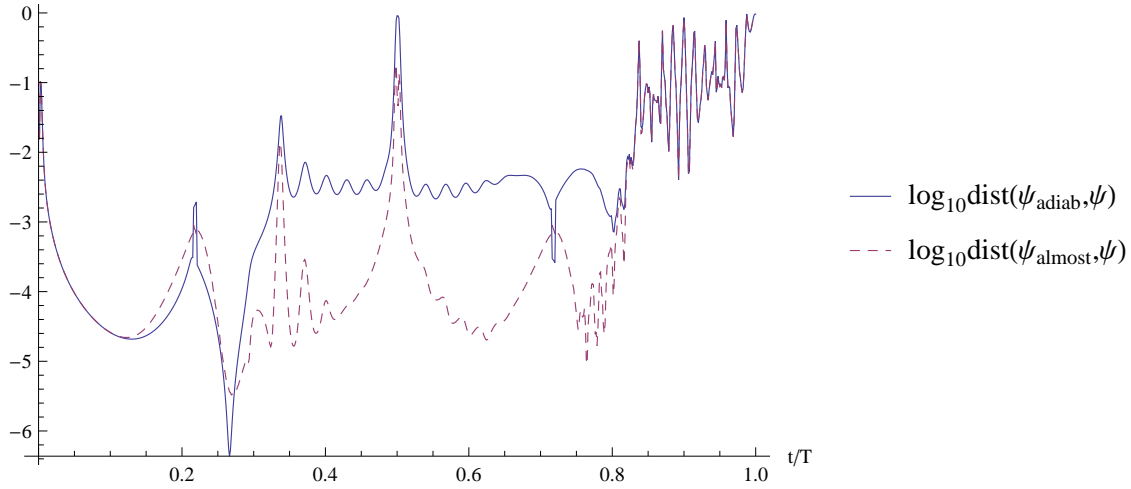


FIGURE 5.2 – Évolution des erreurs de l’approximation adiabatique et de la formule presque adiabatique au cours du temps pour la dynamique de la molécule H_2^+ dans un champ laser lors d’un contrôle par encerclement d’un point exceptionnel (voir section suivante). La condition initiale est l’état lié vibrationnel $g8$. L’opérateur d’onde est calculé dans l’approximation consistant à ne corriger l’approximation adiabatique que par l’intervention de l’état $g9$ ($g8$ et $g9$ sont impliqués dans le point exceptionnel), l’équation de l’opérateur d’onde étant intégrée à l’aide du schéma RK4 (Runge-Kutta d’ordre 4). Les résultats des deux approximations sont comparés pour le calcul des erreurs à une intégration convergée par une méthode d’opérateur fractionné (la même discrétisation temporelle étant utilisée pour cette intégration et pour le schéma RK4). La distance entre deux états utilisée ici est $\text{dist}(\psi, \phi) = 1 - \frac{|\langle \psi | \phi \rangle|}{\|\psi\| \|\phi\|}$. La dégradation des deux approximations à la fin de la dynamique est due à l’intervention d’autres états liés que $g8$ et $g9$. Tiré de [14].

avec $\eta_a(t) = \langle a, x(t) | \dot{\Omega}(t) | a, x(t) \rangle$. On remarque la phase géométrique générée par η_a qui est associée à la non-adiabaticité (et donc au processus dissipatif qui ruine l’approximation adiabatique) et qui est de même nature que celle introduite au paragraphe précédent pour faire coïncider la phase géométrique adiabatique à la phase géométrique cyclique. On peut voir sur la figure 5.2 l’efficacité de l’approche. J’ai également généralisée celle-ci au transport adiabatique d’une superposition de plusieurs états propres droits [14].

Si l’approche presque adiabatique permet de corriger les erreurs adiabatiques dues aux effets dissipatifs, elle ne permet pas tout à fait de traiter (modéliser et résoudre) le contrôle d’une façon complètement géométrique et adiabatique. En effet l’opérateur d’onde $\Omega(t)$ étant obtenu en intégrant une équation non-linéaire, on ne sait pas attribuer un opérateur d’onde à un point donné de la variété de contrôle M . On pourrait imaginer qu’une approximation adiabatique faible permette d’écrire $\Omega(t)$ et la phase géométrique associée (générée par η) comme le transport parallèle de l’opérateur d’onde initial sur la variété de contrôle (ou une variété associée). Mais le problème vient de la non-linéarité de l’équation des opérateurs d’onde, qui empêche d’appliquer une approche adiabatique à celle-ci (définir un “opérateur d’onde propre” au superopérateur non-linéaire $\mathcal{L}(\Omega) = (1 - \Omega)^{-1}[H, \Omega]\Omega$ pose problème).

5.3 Contrôle de systèmes dissipatifs

Dans cette section, nous allons aborder trois exemples de contrôle adiabatique de systèmes dissipatifs.

5.3.1 Inversion de populations vibrationnelles par encerclement d'un point exceptionnel

On a vu au chapitre 2.3.3 la notion de point exceptionnel (EP), un point de l'espace de contrôle M où se croisent deux valeurs propres complexes d'un Hamiltonien non-autoadjoint conjointement à une coalescence des deux vecteurs propres associés. Il manque donc un vecteur propre⁷ sur le EP et $H(x)$ présente un bloc de Jordan d'ordre 2⁸ au niveau du EP. Du point de vue de l'analyse complexe, le EP est un point de branchement de la fonction de variables complexes qui aux coefficients complexes de la matrice H associe la valeur propre λ_a . Il s'en suit que si l'on choisit un chemin de contrôle $\mathcal{C} : t \mapsto x(t) \in M$ qui encercle le EP, on a un changement de feuillet de Riemann. Du point de vue des états propres, on passe du vecteur propre associé à une des valeurs propres impliquées dans le EP, au vecteur propre associé à l'autre. On peut par ce biais inverser les populations entre les deux états impliqués dans le EP.

Ce principe a été proposé pour contrôler les populations vibrationnelles de la molécule H_2^+ [JDLA13, LJK13]. Partant de l'état $\psi(0) = |g8\rangle$, une modulation lente et cyclique de l'intensité et de la fréquence d'un laser permet d'encercler un EP de $g8$ avec $g9$. Par application du théorème adiabatique on a alors si $\psi(0) = |g8, 0\rangle = |g8\rangle$:

$$\psi_{adiab}(t) \simeq e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \lambda_{g8}(t') dt'} |g8, t\rangle \quad (5.25)$$

où $|g8, t\rangle$ est le prolongement continu⁹ de $|g8\rangle$ le long de la trajectoire d'encercllement \mathcal{C} . La phase géométrique adiabatique est nulle dans le cas de l'Hamiltonien de H_2^+ . Mais le prolongement par continuité est tel que

$$|g8, \tau\rangle = |g9\rangle; \quad |g8, 2\tau\rangle = |g8\rangle \quad (5.26)$$

où τ est la période du cycle de contrôle autour du EP. On devrait donc pouvoir faire passer totalement la population de $g8$ vers $g9$, de manière topologique, sans aucune transition explicite localisée sur la trajectoire \mathcal{C} . Malheureusement, les simulations numériques montrent que cela ne fonctionne pas très bien. La raison en est la compétition entre le processus adiabatique et le processus de dissipation. Même en supposant que les autres états de H_2^+ ne contaminent pas le transport adiabatique, au cours de l'encercllement $|g8, t\rangle$ (connecté à $|g8\rangle$ en $t = 0$ et à $|g9\rangle$ en $t = \tau$) va passer de l'état le moins dissipatif par rapport à $|g9, t\rangle$ (connecté à $|g9\rangle$ en $t = 0$ et à $|g8\rangle$ en $t = \tau$) au plus dissipatif¹⁰. Or lorsque $|g8, t\rangle$ est le plus dissipatif, l'approximation adiabatique n'est plus exactement valide. En utilisant la formule du transport presque adiabatique, on a

$$\psi_{almost}(t) = e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \lambda_{g8}(t') dt'} e^{-\int_0^t \eta_{g8}(t') dt'} (|g8, t\rangle + X(t)|g9, t\rangle) \quad (5.27)$$

où η_{g8} est le générateur de la phase géométrique non-adiabatique associée à l'opérateur d'onde $\Omega(t) = |g8, t\rangle\langle g8^*, t| + X(t)|g9, t\rangle\langle g8^*, t|$. La figure 5.3 compare les deux formules de transport à une intégration complète de l'équation de Schrödinger. On voit sur cette figure que la correction non-adiabatique apportée

7. on peut toujours compléter la base des vecteurs propres avec des vecteurs propres généralisés au sens où $(H(x_{EP}) - \lambda_a(x_{EP}))^n |a, x_{EP}\rangle = 0$ pour un certain $n > 1$.

8. $H(x_{EP})$ n'est pas diagonalisable et présente (dans une base de vecteurs propres généralisés bien choisie) un bloc de Jordan $\begin{pmatrix} \lambda_a(x_{EP}) & 1 \\ 0 & \lambda_a(x_{EP}) \end{pmatrix}$.

9. Par souci de simplification, on ne donne pas la formule avec une prolongation continue de λ_{g8} et de $|g8\rangle$ sur M (espace intensité-fréquence du laser de contrôle), car celle-ci est soumise à certaines difficultés. D'une part, $\lambda_{g8}(x)$ ne peut pas être continue sur tout M , car si l'on choisit d'assurer la continuité de $\Re\lambda_{g8}(x)$ alors $\Im\lambda_{g8}(x)$ est discontinue sur la ligne où $\Re\lambda_{g8}(x)$ croise $\Re\lambda_{g9}(x)$ (et inversement). Il y a donc un arbitraire lié à la façon d'attribuer les labels pour définir la continuité sur tout M [8]. D'autre part, la multivaluation des vecteurs propres (cf. chapitre 2.3.3) nécessite de choisir un système de cartes locales impliquant au moins un changement de carte lorsque l'on encercle un EP.

10. L'instant de ce changement de régime du moins au plus dissipatif dépendant de la ligne de croisement des parties imaginaires, mais qui est nécessairement traversée en encerclant le EP. En choisissant comme on l'a fait la continuité de $\Re\lambda_{g8/g9}(t)$, le changement de régime se trouve aux environs de $0.11\tau \pmod{\tau}$ sur la figure 5.3.

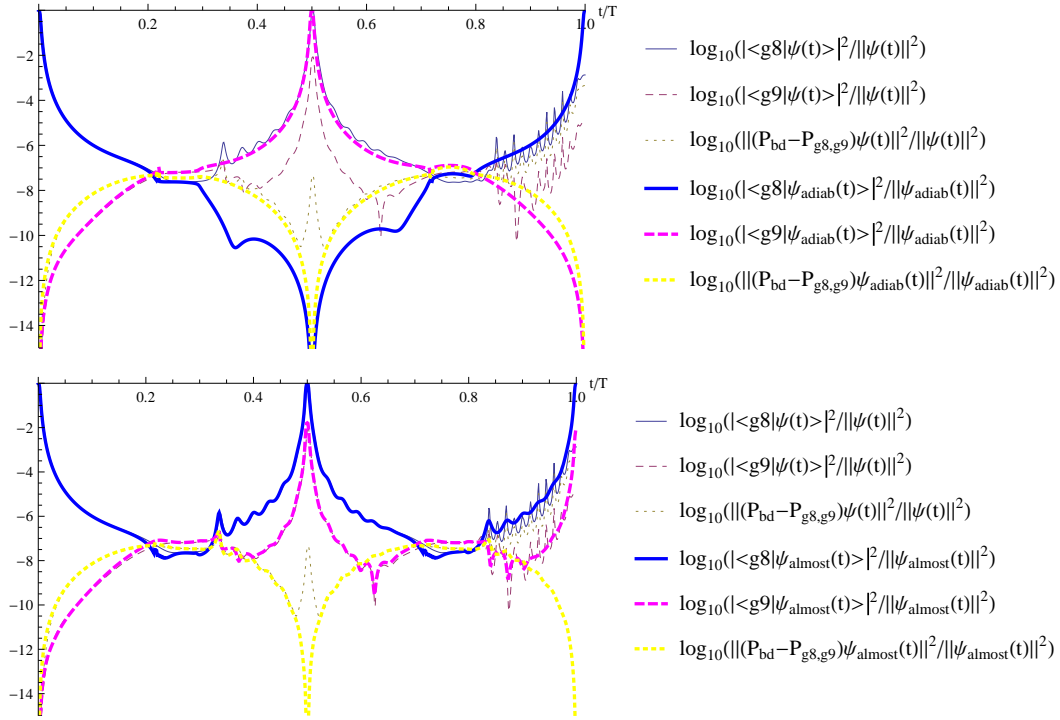


FIGURE 5.3 – Comparaison entre les populations (renormalisées) des états $g8$, $g9$ et de tous les autres états liés au cours du temps pour un contrôle encerclant deux fois ($T = 2\tau$) le EP impliquant ces deux états, entre une intégration de l'équation de Schrödinger complète, la formule de transport adiabatique idéale (en haut) et la formule de transport presque adiabatique (en bas). P_{bd} désigne le projecteur orthogonal sur les états liés et $P_{g8,g9}$ celui sur le sous-espace engendré par $|g8\rangle$ et $|g9\rangle$. Si l'adiabaticité idéale était vérifiée, on aurait inversion de la population des états $g8$ et $g9$ après chaque cycle, or ce n'est pas le cas. L'opérateur d'onde pour le transport presque adiabatique a été intégré à l'aide d'un schéma RK4. L'intégration complète a été réalisée avec une méthode d'opérateurs fractionnés. Tiré de [14].

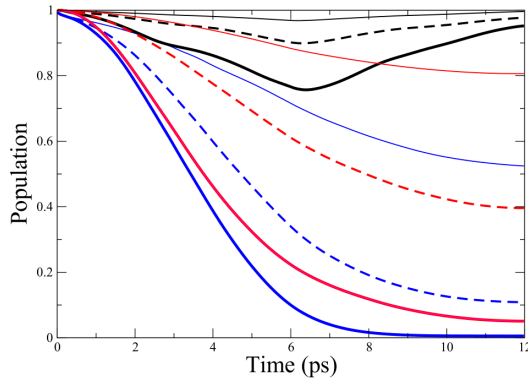


FIGURE 5.4 – Population des états vibrationnels de Na_2 au cours du temps, pour un état initial $v = 8$ (noir), $v = 9$ (rouge) et $v = 10$ (bleu). Sont testés trois chemins de contrôle (ligne continue grasse, ligne continue fine et ligne pointillée) tels que l'état issu continûment de $v = 8$ soit une ZWR. On voit que la population de $v = 8$ survie alors que celles de $v = 9$ et $v = 10$ sont plus ou moins largement dissipées. Appliqué à un ensemble de molécules Na_2 avec une répartition statistique des états, les molécules dans l'état $v = 8$ survivent alors que celle dans un état de plus haute énergie sont dissociées. On a donc un filtrage des molécules en fonction de leur état vibrationnel qui permet une baisse de la température vibrationnelle de l'ensemble. Tiré de [16].

par l'opérateur d'onde pour prendre en compte l'effet contraire à l'adiabaticité de la dissipation, n'est pas négligeable dans le temps. En fait, elle vient même ruiner le principe du contrôle, puisque à chaque fin de cycle la molécule se trouve dans l'état $|g8\rangle$.

5.3.2 Refroidissement vibrationnel à l'aide de résonances de largeur nulle

Si l'approche adiabatique avec des états dissipatifs pose problème, elle est beaucoup plus robuste si l'on considère une valeur propre telle que $\Im m(\lambda_a(x)) = 0, \forall x \in \mathcal{C}_{ZWR}$. Un tel état est dit résonance de largeur nulle (ZWR). Par principe, pour un Hamiltonien de spectre dans le demi-plan complexe inférieur, une ZWR est forcément l'état le moins dissipatif et le théorème adiabatique s'applique alors correctement. Bien sûr le chemin de contrôle \mathcal{C} pour rester sur la ZWR est un chemin extrêmement précis. En cherchant les ZWR dans la théorie de Floquet adiabatique pour le contrôle de la molécule H_2^+ , on peut espérer en suivant le chemin \mathcal{C}_{ZWR} dans M (espace amplitude et fréquence du champ laser)¹¹ ne pas dissocier la population associée à l'état de ZWR tout en dissociant les autres, sans contamination non-adiabatique. En préservant une ZWR rattachée à un état vibrationnel de faible énergie, le procédé s'assimile à un refroidissement laser de la vibration. Tout le problème de contrôle est de trouver la morphologie de la ZWR pour ajuster au mieux \mathcal{C}_{ZWR} . C'est cette idée que nous avons exploitée avec A. Leclerc (Université de Lorraine), G. Jolicard (Université de Bourgogne-Franche-Comté), O. Atabek (Université Paris-Sud) et R. Lefebvre (Université de Paris-Sud) pour proposer un schéma de contrôle vibrationnel de refroidissement pour une molécule diatomique, et qui a été appliqué avec succès (du moins dans les simulations numériques) à la molécule Na_2 [16], voir figure 5.4 On peut également utiliser les résonances de largeur nulle dans des schémas de contrôle du type encerclement de EP pour limiter les effets délétères de la dissipation sur l'adiabaticité comme nous l'avons proposé récemment

11. On notera que la résolution du problème de contrôle consistant à trouver \mathcal{C}_{ZWR} nécessite de bien faire la différence entre fréquence réelle $\omega(t)$ du champ et fréquence effective $\omega_{eff}(t) = \dot{\omega}(t)t + \omega(t)$ qui est celle qui apparaît dans la théorie adiabatique de Floquet.

dans [18].

5.3.3 Téléportation autour d'un trou noir

On a vu qu'un spin localisé dans un espace-temps courbe était modélisé par un Hamiltonien effectif non-autoadjoint. La gravitation ayant un effet entre deux observateurs définissant deux référentiels, elle va avoir un effet important sur la téléportation quantique. Imaginons qu'Alice et Bob partagent une paire de qubits intriqués supportés par les spins de deux particules. Alice et son qubit sont en chute libre sur un trou noir et Bob et le sien sont comobiles avec celui-ci. Alice pourra-t-elle téléporter de l'information à Bob via le protocole usuel malgré l'effet important du champ gravitationnel énorme du trou noir ? I. Fuentes *et al* [FSM05] ont montré que non dans un modèle de théorie quantique des champs dans un espace-temps courbe simplifié (c'est à dire en considérant Alice dans le voisinage immédiat de l'horizon des événements du trou noir et dans l'approximation du champ de gravité uniforme). La décohérence induite par l'effet Hawking génère du "bruit" dans la téléportation. Avec une étudiante en Master 2, Olivia Moro, nous avons étudié la téléportation quantique autour d'un trou noir dans le modèle des qubits localisés [17]. Par rapport au modèle de Fuentes *et al* nous ne simplifions pas le champ gravitationnel (la géométrie de l'espace-temps), la simplification se trouvant dans les approximations semi-classiques pour traiter la dynamique quantique du qubit. Par rapport à la théorie des spins localisés, nous ajoutons d'ailleurs une troisième approximation semi-classique, consistant à supposer que la dynamique du qubit en chute libre est adiabatique (ce qui est justifié pour les géodésiques que nous avons considérées autour d'un trou noir de Schwarzschild). Nous avons alors accès à l'effet du bruit gravitationnel sur la téléportation en fonction dont Alice tombe sur le trou noir (en ligne droite, en orbite fermée, en spirale) et en fonction d'où elle se trouve dans l'espace-temps (plus ou moins proche de l'horizon des événements, angle par rapport à son point de départ) au moment où elle effectue les opérations nécessaires à la téléportation. Le problème se présente alors comme le "contrôle" de la fidélité de la téléportation avec pour variété de contrôle $M = T\mathcal{E}$ (fibré tangent de la variété espace-temps \mathcal{E} de la géométrie de Schwarzschild) [17]. Nous avons montré qu'en fonction du chemin de contrôle (géodésique de chute libre d'Alice), la fidélité de la téléportation pour un qubit, pour un même état à téléporter, pouvait varier très fortement, voir figure 5.5. Mais si l'on trouve une géodésique pour laquelle la téléportation d'un état est de fidélité 1, elle sera de 0 pour l'état orthogonal, si bien qu'en moyenne, la fidélité de la téléportation est faible (autour de 0.5 si les opérations de la téléportation sont effectuées par Alice alors qu'elle est proche de l'horizon des événements).

En résumé

Les systèmes dissipatifs sont des modèles simples de systèmes ouverts qui sont tout à fait pertinents même si par principe, ils ignorent une part du système dans leur description qui n'est plus que représentée par le processus de dissipation (sauts quantiques issus de l'interaction avec un réservoir non modélisé explicitement, fuites des populations vers l'extérieur d'un espace actif, fuites du paquet d'ondes au delà de la frontière de modélisation, effet Hawking/Unruh, ...). Formellement, le contrôle adiabatique des systèmes dissipatifs se présente comme celui des systèmes fermés, si ce n'est que l'Hamiltonien n'y est pas auto-adjoint, ses valeurs propres sont complexes et ses vecteurs propres gauches diffèrent de ses vecteurs propres droits. Mais en réalité les choses sont beaucoup plus subtiles, du fait de la compétition entre le contrôle adiabatique et le processus dissipatif. La dynamique du contrôle n'est pas à proprement parlé adiabatique (sauf s'il s'agit de maintenir la population de l'état le moins dissipatif). Il faut donc intégrer le fait que la dynamique n'est que presque adiabatique, ce qui introduit une correction par un opérateur d'onde modélisant les effets non-adiabatiques de la dissipation et une phase géométrique non-adiabatique qui vient s'ajouter à la phase géométrique adiabatique usuelle. Cette phase non-adiabatique, liée à la dissipation et issue d'une valeur propre effective, joue le même rôle que la phase non-adiabatique de la théorie adiabatique de Floquet. Il semble donc que les systèmes ouverts soient caractérisés par

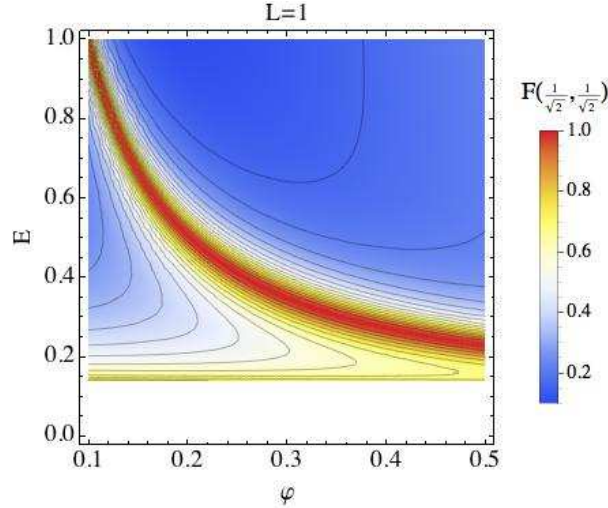


FIGURE 5.5 – Fidélité de la téléportation de l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ pour Alice suivant une géodésique tombant en spirale sur un trou noir de Schwarzschild (avec un moment cinétique par unité de masse $L = \frac{c}{r_S}$ (r_S est le rayon de Schwarzschild du trou noir)) en fonction de l'énergie par unité de masse E (intégrale première de la géodésique) et de l'angle φ par rapport à sa position initiale au moment où Alice effectue les opérations de téléportation. Bob est comobile avec le trou noir. Alice effectue la téléportation lorsqu'elle se trouve à une distance de $10^{-2} r_S$ de l'horizon des événements. Tiré de [17].

l'émergence de deux phases géométriques, l'une associée au contrôle adiabatique et l'autre aux effets de l'environnement. Il faut donc noter que lorsque l'on parle de contrôle adiabatique, il faut distinguer entre un régime adiabatique fort (maintient de la population de l'état le moins dissipatif et autres cas particuliers où l'adiabaticité est plus "forte" que l'effet dissipatif) et un régime adiabatique faible, que j'ai qualifié de presque adiabatique car on ne sait pas donner une "expression adiabatique" à l'opérateur d'onde qui corrige l'approximation adiabatique forte. Mais il faut bien comprendre qu'il a bien deux régimes (même pour l'exemple de l'encerclement d'un EP, on peut obtenir une bonne approximation adiabatique forte en considérant un contrôle très très lent, mais ce cas est peu intéressant car le système est alors tellement dissipé qu'il ne reste en réalité presque plus de fonction d'onde). Cette remarque est importante, on verra dans la partie suivante qu'avec le processus d'intrication, on a aussi deux régimes adiabatiques.

Avant de terminer, il convient de faire une remarque sur la raison de l'origine de la valeur propre effective qui contient un générateur de phase de géométrie en plus de la valeur propre usuelle. En mécanique quantique, l'opérateur Hamiltonien a deux fonctions. La première est d'être l'opérateur énergie du système, i.e. l'observable associée à la mesure de l'énergie. En ce sens, il est utilisé dans une équation aux valeurs propres pour déterminer les états propres d'énergie et les résultats possibles de mesure de celle-ci. Le second rôle de l'Hamiltonien est d'être le générateur de la dynamique. En ce sens il est utilisé dans une équation de Schrödinger dépendante du temps dont l'intégration fournit la fonction d'onde au cours de l'évolution. Or l'approximation adiabatique distingue ces deux rôles, en gardant l'Hamiltonien d'origine comme opérateur énergie, mais en introduisant un hamiltonien effectif pour gouverner la dynamique. Et dans le régime presque adiabatique, ce sont deux Hamiltoniens effectifs différents qui surviennent, l'un comme opérateur énergie, l'autre comme générateur de la dynamique. Le générateur de phase géométrique qui s'intègre ou non au générateur de la phase dynamique n'est alors le reflet que du choix de l'Hamiltonien utilisé pour définir la phase dynamique (celui qui gouverne la dynamique ou celui qui gouverne la définition de l'énergie).

Dans le chapitre suivant nous allons nous intéresser à la théorie jauge supportée par les deux phases

géométriques dans le cas des systèmes dissipatifs.

Publications

Le détail de mes travaux et collaborations concernant les processus dissipatifs, les Hamiltoniens effectifs et le transport presque adiabatique peut être trouvé ci-dessous :

- [7] G. Jolicard, J.P. Killingbeck, D. Viennot, J. Buldyreva & P. Joubert, *Transitional and permanent regimes in the adiabatic Floquet approach to photodissociation processes*, J. Phys. A : Math. Theor. **41**, 095303 (2008) .
- [8] D. Viennot, G. Jolicard & J.P. Killingbeck, *Topology of the adiabatic passage process for molecular photo-dissociative dynamics*, J. Phys. A : Math. Theor. **41**, 145303 (2008).
- [10] G. Dridi, S. Guérin, H.R. Jauslin, D. Viennot & G. Jolicard, *Adiabatic approximation for quantum dissipative systems : formulation, topology and superadiabatic tracking*, Phys. Rev. A **82**, 022109 (2010).
- [11] A. Leclerc, G. Jolicard, D. Viennot & J.P. Killingbeck, *Constrained adiabatic trajectory method : a global integrator for explicitly time-dependent Hamiltonians*, J. Chem. Phys. **136**, 014106 (2012) [arXiv :1201.1150].
- [12] A. Leclerc, D. Viennot & G. Jolicard, *The role of the geometric phases in adiabatic populations tracking for non-hermitian Hamiltonians*, J. Phys. A : Math. Theor. **45**, 415201 (2012) [arXiv :1202.3290].
- [13] D. Viennot, A. Leclerc, G. Jolicard & J.P. Killingbeck, *Consistency between adiabatic and nonadiabatic geometric phases for nonselfadjoint Hamiltonians*, J. Phys. A : Math. Theor. **45**, 335301 (2012) .
- [14] D. Viennot, *Almost quantum adiabatic dynamics and generalized time dependent wave operators*, J. Phys. A : Math. Theor. **47**, 065302 (2014) [arXiv :1308.1528].
- [15] G. Jolicard, A. Leclerc, D. Viennot & J.P. Killingbeck, *Global integration of the Schrödinger equation within the wave operator formalism : the role of the effective Hamiltonian in multidimensional active spaces*, J. Phys. A : Math. Theor. **49**, 195305 (2016) [arXiv :1604.05545].
- [16] A. Leclerc, D. Viennot, G. Jolicard, R. Lefebvre & O. Atabek, *Controlling vibrational cooling with zero-width resonances : an adiabatic Floquet approach*, Phys. Rev. A **94**, 043409 (2016) [arXiv :1607.07371].
- [17] D. Viennot & O. Moro, *Adiabatic transport of qubits around a black hole*, Class. Quant. Gravity **34**, 055005 (2017) [arXiv :1609.01540].
- [18] A. Leclerc, D. Viennot, G. Jolicard, R. Lefebvre & O. Atabek, *Exotic states in the strong field control of H_2^+ dissociation dynamics : from exceptional points to zero-width resonances*, J. Phys. B (soumise) [arXiv :1703.05618].

Chapitre 6

Fibré catégorique des opérateurs d'onde

La description de la géométrie des systèmes dissipatifs se heurte à une difficulté. Les opérateurs d'onde qui corrigent le défaut d'adiabaticité de ces systèmes n'ont pas d'expression adiabatique permettant de les exprimer comme des applications de la variété de contrôle M , ce du fait de la non-linéarité de l'équation dont ils sont solutions. Pour lever cette difficulté, il faut construire la géométrie directement sur la variété des états quantiques plutôt que sur l'espace de contrôle. Dans le cas de l'approximation adiabatique pour des systèmes fermés, on considère comme variété quantique l'espace projectif complexe :

$$\mathbb{C}P^{n-1} = \{P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), P^2 = P, P^\dagger = P, \dim \text{Ran}P = 1\} \quad (6.1)$$

avec $\dim \mathcal{H} = n$. $\mathbb{C}P^{n-1}$ est la variété des projecteurs orthogonaux de rang 1, mais on peut la voir également comme l'ensemble des états normés $\mathbb{S}^{2n-1} \simeq \{\psi \in \mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n, \|\psi\| = 1\}$ sans phase $\mathbb{C}P^{n-1} = \mathbb{S}^{2n-1}/U(1) = \{[e^{i\varphi}\psi]_{\varphi \in [0, 2\pi]}, \psi \in \mathbb{S}^{2n-1}\}$. Les états normés forment donc un fibré principal sur les

états normés sans phase : $\begin{array}{c} \mathbb{S}^{2n-1} \leftarrow U(1) \\ \downarrow \\ \mathbb{C}P^{n-1} \end{array}$. Ce fibré est équipé d'une connexion naturelle définie par le potentiel :

$$A(|\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\psi|d\psi\rangle \in \Omega^1(\mathbb{C}P^{n-1}, i\mathbb{R}) \quad (6.2)$$

Pour une dynamique cyclique $\psi(T) = e^{i\varphi}\psi(0)$, A définit les phases géométriques non-adiabatiques, $\psi(t) = e^{-i\hbar^{-1} \int_0^t \langle\tilde{\psi}(t')|H(t')|\tilde{\psi}(t')\rangle dt'} e^{-\int_{\mathcal{C}:P(0)\rightarrow P(t)} A(P)} \tilde{\psi}(t)$, avec \mathcal{C} le chemin dessiné par $P(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ sur $\mathbb{C}P^{n-1}$ et $\tilde{\psi}(T) = \tilde{\psi}(0)$ ($\tilde{\psi}$ est la section du fibré vectoriel associé qui est cyclique au dessus de \mathcal{C}). Dans le cas de l'approximation adiabatique, le fibré P_a dans lequel elle prend place est tel que

$$\begin{array}{ccc} P_a & \xleftarrow{f^*} & \mathbb{S}^{2n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}P^{n-1} \end{array}$$

où $f(x) = |a, x\rangle\langle a, x|$ est l'application qui à un point de la variété de contrôle associe le projecteur orthogonal sur l'état propre de $H(x)$ considéré dans le transport adiabatique. Les fonctions de trivialisations de P_a sont définies par ($\forall x \in U^\alpha, \forall g \in U(1)$) $\phi_P^\alpha(x, g) = \phi_S^\alpha(f(x), g)$ avec ϕ_S^α les fonctions de trivialisations

de $\begin{array}{c} \mathbb{S}^{2n-1} \leftarrow U(1) \\ \downarrow \\ \mathbb{C}P^{n-1} \end{array}$ pour un recouvrement d'ouverts de $\mathbb{C}P^{n-1}$ issu de celui de $M : \{f(U^\alpha)\}_\alpha$.

Nous allons donc étudier la fibration au dessus de $\mathbb{C}P^{n-1}$ pour un système dissipatif où il est nécessaire de considérer les opérateurs d'onde corrigeant le défaut d'adiabaticité. J'ai également étudié la structure géométrique pour le transport presque adiabatique d'une superposition d'états propres droits [25], mais par souci de simplification du propos, je ne donne ici les expressions que pour le cas du transport d'un seul.

6.1 Le fibré catégorique des opérateurs d'onde

La base de la fibration est une catégorie \mathcal{B} que l'on a déjà évoquée, dont les objets sont $\text{Obj}(\mathcal{B}) = \mathbb{C}P^{n-1}$. Les opérateurs d'onde (nécessaires à la correction non-adiabatique) forment les flèches $\text{Morph}(\mathcal{B}) = \{P_q(P_{q-1}P_qP_{q-1})^{-1} \dots (P_0P_1P_0)^{-1}, P_i \in \mathbb{C}P^{n-1}, q \in \mathbb{N}\}^1$. Les applications source, cible et identité sont définies par $s(P_q(P_{q-1}P_qP_{q-1})^{-1} \dots (P_0P_1P_0)^{-1}) = \text{Ran}P_0$, $t(P_q(P_{q-1}P_qP_{q-1})^{-1} \dots (P_0P_1P_0)^{-1}) = \text{Ran}P_q$ et $\text{id}_P = P$, la composition des flèches étant définie par la composition des opérateurs. Lorsque j'avais introduit la catégorie \mathcal{B} dans l'introduction, les opérateurs d'onde n'étaient que des représentations de la règle de la projection de Born lors d'une mesure. Ici les opérateurs d'onde ont un rôle continu dans la dynamique, celui de corriger l'approximation adiabatique forte pour tenir compte du régime qui n'est que presque adiabatique. \mathcal{B} est un exemple de ce que j'appelle un espace 2-affine (hyperbolique) [25]. Soit \mathcal{P} la catégorie définie par $\text{Obj}(\mathcal{P}) = \mathcal{H}$ et $\text{Morph}(\mathcal{P}) = \{(f, \psi) \in \bigsqcup_{q=1}^{\infty} \mathcal{L}^q(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}\}; \ker \chi(f)^\perp = \mathbb{C}\psi\}$, où $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ est l'ensemble des endomorphismes de \mathcal{H} de rang 1, $\mathcal{L}^q(\mathcal{H}) = \{(f_q, \dots, f_1) \in (\mathcal{L}^1(\mathcal{H}))^q, \text{Ran}f_i = \ker f_{i+1}^\perp\} / \chi$ pour la condition d'équivalence $(f_q, \dots, f_1) \sim_\chi (f'_q, \dots, f'_1) \iff f_q \dots f_1 = f'_q \dots f'_1$ ($\chi(f_q, \dots, f_1) = f_q \dots f_1$, χ est la "concaténation" des opérateurs). Les applications source, cible, et identité de \mathcal{P} sont définies par $s(f, \psi) = \psi$, $t(f, \psi) = \chi(f)\psi$, et $\text{id}_\psi = \left(\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\|\psi\|^2}, \psi \right)$. Cette catégorie définit le 2-fibré $\mathcal{P} \Leftarrow \mathcal{G}$ avec le foncteur de projection défini

par $\pi(\psi) = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\|\psi\|^2}$ (pour $\psi \in \mathcal{H}$) et $\pi(f) = P_{\text{Ran}f} (P_{\ker f^\perp} P_{\text{Ran}f} P_{\ker f^\perp})^{-1}$ (pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$). Le module croisé de Lie est $\mathcal{G} = (\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*, t, \alpha)$ où α est triviale ($\alpha_\mu(\nu) = \nu$, $\forall \mu, \nu \in \mathbb{C}^*$) et t est l'action de \mathbb{C}^* sur lui-même ($t(\mu)\nu = \mu\nu$, $\forall \mu, \nu \in \mathbb{C}^*$). Le premier groupe \mathbb{C}^* représente les changements de norme, alors que le second représente l'unique valeur propre non-nulle d'un endomorphisme de rang 1. Les deux générateurs des phases géométriques, $A(|\psi\rangle\langle\psi|) = \frac{\langle\psi|d\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \in \Omega^1(\text{Obj}(\mathcal{B}), \mathbb{C})$ et $\eta(\Omega) = \frac{\langle\psi_0|\Omega^{-1}d\Omega|\psi_0\rangle}{\langle\psi_0|\psi_0\rangle} \in \Omega^1(\text{Morph}(\mathcal{B}), \mathbb{C})$ définissent la 2-connexion de \mathcal{P} , la cambrure (qui est ici pure gauge) est $B = d\eta \in \Omega^2(\text{Morph}(\mathcal{B}), \mathbb{C})$. Le relèvement horizontal de la flèche définie par $t \mapsto (|a, x(t)\rangle\langle a, x(t)|, \Omega(t)) \in \text{Morph}(\mathcal{B})$ (pour $|a, x\rangle$ vecteur propre instantané et $\Omega(t)$ correction au défaut d'adiabaticité) donne la formule du transport presque adiabatique 5.24.

Pour pouvoir revenir au contrôle adiabatique, on aurait besoin d'un foncteur $F : \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{B}$ avec $\text{Obj}(\mathcal{M}) = M$. La question est : quels sont les flèches de \mathcal{M} ? On pourrait penser que probablement il ne s'agit que des identités $\text{Morph}(\mathcal{M}) = \{\text{id}_x, x \in M\}$, c'est à dire que \mathcal{M} est une catégorie triviale. Mais même avec ce choix, il faudrait connaître une application $F(\text{id}_x) = \Omega(x)$ qui attribue à un point de l'espace de contrôle un unique opérateur d'onde. Or l'impossibilité d'appliquer une forme de théorème adiabatique à l'équation des opérateurs d'onde (qui est non-linéaire) empêche de fournir cette application. Néanmoins, il est possible de trouver des constructions sur M pour les cas particuliers où un régime adiabatique fort est valide.

6.2 Gerbes au dessus d'un cercle de EP

Considérons l'Hamiltonien d'un système à deux niveaux suivant :

$$H(z) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{z} \\ z & -2vr \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

avec $z \in \mathbb{C} = M$ qui constitue les deux paramètres (réels) de contrôle, $r > 0$ est une constante. Cet Hamiltonien correspond à un atome à deux niveaux contrôlé par un champ laser parfaitement résonant dans l'approximation d'onde tournante à un photon avec une émission spontanée d'un des états vers un état sombre non-modélisé ($z = \frac{\hbar}{2}\Omega e^{i\theta}$ avec $\Omega = |\langle 1|\vec{\mu} \cdot \vec{E}|2\rangle|^2$ ($\vec{\mu}$ moment dipolaire électrique, \vec{E} champ

1. on notera que l'on considère des opérateurs d'onde avec des étapes intermédiaires, ceci est rendu nécessaire par l'obligation de pouvoir considérer des compositions d'opérateurs d'onde.

électrique); θ la phase du laser, le detuning est nul car la fréquence du laser est parfaitement résonante sur la transition $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$, et $r = \frac{\hbar\Gamma}{8}$ avec Γ la largeur de résonance de l'état dissipatif lié à l'émission spontanée). Les valeurs propres de $H(z)$ sont

$$\begin{cases} \lambda_{\pm}(z) = \iota(-r \mp \sqrt{r^2 - |z|^2}) & \text{si } |z| < r \\ \lambda_0(z) = -\iota r & \text{si } |z| = r \\ \lambda_{\pm}(z) = -\iota r \pm \sqrt{|z|^2 - r^2} & \text{si } |z| > r \end{cases} \quad (6.4)$$

Sur $M_r^{int} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$, $\lambda_-(z)$ est la résonance la moins dissipative (et $\lambda_+(z)$ est la plus dissipative), sur $\mathbb{S}_r^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = r\}$ $\lambda_0(z)$ est l'unique valeur propre (les points de \mathbb{S}_r^1 sont tous des EP), et sur $M_r^{ext} = \{z \in \mathbb{C}, |z| > r\}$, $\lambda_-(z)$ est la résonance de plus basse énergie (et $\lambda_+(z)$ celle de plus haute énergie), les deux résonances étant autant dissipatives l'une que l'autre. Si l'on considère des chemins commençant sur M^{int} avec pour condition initiale $|-, z(0)\rangle^{int}$, alors le régime adiabatique fort peut être valide sur M^{int} . Si le chemin traverse le cercle de EP, du fait de la coalescence entre les vecteurs propres, la fonction d'onde se trouvera dans une équisuperposition de $|-, z\rangle^{ext}$ et $|+, z\rangle^{ext}$ à la suite de la traversée [9]. Mais puisqu'ils sont autant dissipatifs l'un que l'autre, le régime adiabatique fort est valide (mais pour la superposition). Les seuls moments où l'adiabaticité forte n'est pas strictement conservée sont les traversées du cercle de EP. Sur M_r^{int} et M_r^{ext} on peut construire des espaces fibrés ordinaires pour décrire le transport adiabatique, comme pour un système conservatif. Mais comment les recoller entre eux et intégrer le cercle de EP qui constitue un défaut topologique unidimensionnel? Une des façons (ce n'est pas la seule) consiste à considérer les trois régions $\{U^{int}, U^{bd}, U^{ext}\}$ définies par $U^{int} = M_{r+\epsilon}^{int}$, $U^{ext} = M_{r-\epsilon}^{ext}$ et $U^{bd} = \{z \in \mathbb{C}, r-\epsilon < |z| < r+\epsilon\}$, avec $\epsilon \ll 1$ un paramètre permettant le recouvrement des cartes [9,25]. L'idée consiste à prolonger les vecteurs propres $|\pm, z\rangle^{int}$ sur tout U^{int} en "empêchant" la coalescence de ceux-ci :

$$|\pm, z\rangle^{int} = \begin{cases} |\pm, z\rangle & \text{si } z \in M_{r-\epsilon}^{int} \\ |\pm, (r-\epsilon)e^{\iota \arg z}\rangle & \text{si } r+\epsilon < z \leq r-\epsilon \end{cases} \quad (6.5)$$

de même

$$|\pm, z\rangle^{ext} = \begin{cases} |\pm, z\rangle & \text{si } z \in M_{r+\epsilon}^{ext} \\ |\pm, (r+\epsilon)e^{\iota \arg z}\rangle & \text{si } r+\epsilon \leq z < r-\epsilon \end{cases} \quad (6.6)$$

enfin

$$|-, z\rangle^{bd} = |0, re^{\iota \arg z}\rangle \quad (6.7)$$

$$|+, z\rangle^{bd} = |1, re^{\iota \arg z}\rangle \quad (6.8)$$

où $|1, re^{\iota\theta}\rangle$ est le vecteur propre généralisé : $(H(re^{\iota\theta}) - \lambda_0(re^{\iota\theta}))^2|1, re^{\iota\theta}\rangle = 0$, $\langle 1, re^{\iota\theta}|0, re^{\iota\theta}\rangle = 0$. Le passage d'une carte à l'autre ne se fait pas par simple changement de norme, il est donc nécessaire d'introduire des opérateurs d'onde de transition de la forme $\Omega_{\pm}^{\alpha\beta}(z) = P_{\pm}^{\alpha}(z)(P_{\pm}^{\beta}(z)P_{\pm}^{\alpha}(z)P_{\pm}^{\beta}(z))^{-1}$ avec $\alpha, \beta \in \{int, bd, ext\}$ et $P_{\pm}^{\alpha}(z) = |\pm, z\rangle^{\alpha\alpha}\langle \pm, *|$. Les gerbes \mathcal{P}_{\pm} au dessus de M sont alors définies par les fonctions de 2-transition $h_{\pm}^{int, bd, ext}(z)$ définies par ² [9]

$$\forall z \in U^{bd}, \quad h_{\pm}^{int, bd, ext}(z)P_{\pm}^{bd}(z) = \Omega_{\pm}^{bd, ext}(z)\Omega_{\pm}^{int, ext}(z)^{-1}\Omega_{\pm}^{int, bd}(z) \quad (6.9)$$

On peut se contenter de poser \mathcal{M} comme la catégorie triviale obtenue de M , et à gérer la traversée du cercle de EP "à la main" (sans l'intégrer dans la géométrie) puisque il s'agit d'un passage non-adiabatique. On peut néanmoins vouloir ajouter l'effet de la traversée du cercle de EP en considérant sur \mathbb{S}_r^1 l'opérateur d'onde permettant la transformation de $|-, z\rangle^{int}$ en $\frac{1}{\sqrt{2}}(|-, z\rangle^{ext} + |+, z\rangle^{ext})$ [25]. Or il se trouve que

2. Pour être plus précis $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_{\pm}^{int, bd, ext}(z) = 1 \pm \iota$.

$|1, z\rangle = |0, -z\rangle$. Il vient que cet opérateur d'onde est $\Omega(z, -z) = P_{sc}(z)(P_0(z)P_{sc}(z)P_0(z))^{-1}$ avec $P_{sc}(z)$ le projecteur sur $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0, z\rangle + |0, -z\rangle)$ et $P_0(z)$ le projecteur sur $|0, z\rangle$. $\Omega(z, -z)$ peut être interprété comme l'image d'une flèche de z vers $-z$. On a alors $\text{Obj}(\mathcal{M}) = M$ et $\text{Morph}(\mathcal{M}) = \{\text{id}_z = (z, z), z \in M\} \cup \{(z, -z), z \in \mathbb{C}, |z| = r\}$ [24]. Le transport adiabatique apparaît alors comme le relèvement de la flèche $t \mapsto (z(t), (-1)^{\delta_{r,|z|}} z(t))$.

La construction précédente n'est néanmoins valide que si l'on considère des chemins coupant le cercle de EP, pour les chemins qui longent le cercle, les connexions comme on les a définies dans ce chapitre ne sont pas valables (il faudrait introduire des connexions non-abéliennes sur un 2-fibré ambiant $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_- \times \mathcal{P}_+$ pour décrire les mélanges entre les deux états propres généralisés induits par la structure non-diagonale de l'Hamiltonien, mais je n'ai pas à ce jour considéré le problème de la structure géométrique du transport adiabatique d'un bloc de Jordan).

En résumé

Le contrôle presque adiabatique des systèmes dissipatifs prend place dans un fibré catégorique dont la base est la catégorie des projecteurs orthogonaux et des opérateurs d'onde, et la catégorie totale est l'espace de Hilbert avec ses endomorphismes de rang 1. La difficulté est que cette description n'introduit pas la variété des paramètres de contrôle, même si dans certains cas où le régime adiabatique fort est valide (sauf éventuellement en des instants précis isolés) l'on peut obtenir une description sur cette variété. La résolution de ce problème reste une question ouverte, de même pour ce qui concerne le transport d'un

bloc de Jordan. On notera au passage que le 2-fibré $\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \leftarrow & \mathcal{G} \\ & \downarrow & \\ & \mathcal{B} & \end{array}$ est trivial au sens où ses 2-fonctions de

transition sont réduites à 1, alors que la gerbe \mathcal{P} construite sur un cercle de EP est non-triviale. Il semble donc que les blocs de Jordan (non considéré dans l'approche de la presque adiabaticité que j'ai développée jusqu'ici) sont les responsables de la non-trivialité des réalisations géométriques des classes de Deligne d'ordre 3 du contrôle adiabatique des systèmes dissipatifs. Une autre question reste totalement ouverte, il s'agit du cas des continua. Dans tous mes travaux, je n'ai considéré que des systèmes de dimension finie ou des problèmes ne faisant intervenir directement que des états du spectre discret (états liés ou états de résonance). Or comme on l'a vu, dans les modèles de frontières absorbantes, le spectre continu tourne dans le plan complexe inférieur et est donc lié aux processus dissipatifs. Définir une approximation adiabatique avec des états du continuum pose des difficultés propres (pas de gaps spectraux, états du continuum qui sont souvent non-normalisables (ce sont des distributions), topologie faible plus naturelle que la topologie de la norme, etc). Sur le fond, elles ne me paraissent pas insurmontables. En travaillant sur la question, il m'a semblé que la structure géométrique naturelle qui pourrait décrire la question du contrôle adiabatique avec un continuum, est fondée sur des champs continus de C^* -algèbres [DD63]. Comme pour le cas du cercle de EP, la construction de la structure géométrique nécessite de définir des applications de transition entre les cartes, comme les opérateurs d'onde de transition de la section précédente. Or, pour les champs continus de C^* -algèbres, les opérateurs de transition ne peuvent pas être des opérateurs d'onde, et je n'ai pas été en mesure de les construire, empêchant de conclure cette voie de recherche. Cette question d'une approximation adiabatique et de la géométrie qui la supporte dans le cas d'un continuum, reste pour moi une question totalement sans réponse.

Publications

Mes travaux concernant les fibrés catégoriques et les gerbes dans le contrôle des systèmes dissipatifs peuvent être trouvés ci-dessous :

- [9] D. Viennot, *The need for a flat higher gauge structure to describe a Berry phase associated with some resonance phenomena*, J. Math. Phys. **50**, 052101 (2009).

- [25] D. Viennot, *Non-abelian higher gauge theory and categorical bundle*, J. Geom. Phys. **110**, 407 (2016) [arXiv :1202.2280].

Conclusion et perspectives de la partie II

Les systèmes dynamiques quantiques dissipatifs sont décrits par des Hamiltoniens effectifs dont le dissipateur (la part non-auto-adjointe) modélise une perte vers des états non-modélisés (état sombre, états hors de l'espace actif, états localisés de l'autre côté de la frontière absorbante, état du vide associé à l'effet Hawking pour un qubit localisé en espace-temps courbe,...). La décohérence dans ces systèmes dynamiques dissipatifs devrait être qualifiée de fausse au sens de Joos [Joo07], car elle est triviale. Si les termes hors diagonaux de $|\psi\rangle\langle\psi|$ tendent vers zéro avec $t \rightarrow +\infty$ c'est simplement car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0$ (la fonction d'onde est dissipée avec le temps). Mais il faut comprendre que ce n'est que du point de vue de la représentation effective. Si l'on prend l'exemple de la représentation effective de l'équation de Lindblad avec émission spontanée vers un état sombre, au niveau de la description première, l'équation de Lindblad décrit bien une intrication avec l'environnement (le champ des fluctuations quantiques responsable de l'émission spontanée), intrication que l'on ne peut mettre en évidence dans l'équation qu'en considérant la purification de l'équation de Lindblad mais que l'on perd formellement en passant à la description (approchée) effective. De même avec l'approche de l'Hamiltonien effectif d'un qubit localisé en espace-temps courbe, l'origine de la dissipation est une intrication entre les champs de particules de part et d'autre de l'horizon des événements responsable des effets Unruh et Hawking. Intrication qui n'est plus formellement visible dans le formalisme effectif. Ainsi, si formellement dans les descriptions effectives (dissipatives), la décohérence est fausse, les mécanismes physiques sous-jacents font appel à de l'intrication entre le système et son environnement, et la décohérence est donc vraie. Le distinguo entre les deux notions, me paraît donc ici quelque peu flou.

L'approche du contrôle adiabatique dans ces situations effectives dissipatives se heurte à la difficulté que la qualité de l'approximation adiabatique (hors renormalisation superadiabatique) n'est pas des meilleures. Même si des applications peuvent être traitées dans ce cadre (refroidissement vibrationnel de molécule, téléportation quantique en espace-temps courbe), il paraît nécessaire de considérer le régime adiabatique faible (régime presque adiabatique). Malheureusement, la non-linéarité de l'équation définissant les opérateurs d'onde généralisés empêche une description purement géométrique du contrôle (au sens où la description ne ferait intervenir que des variétés définies à partir des paramètres de contrôle). La levée de cet obstacle est une condition sine qua non pour la poursuite dans cette voie. Quelle(s) stratégie(s) pourrait-on adopter ? Une approche pourrait être d'essayer de définir des valeurs propres non-linéaires, mais l'on peut douter de son efficacité (si l'on peut poser formellement une équation non-linéaire aux valeurs propres, en général celle-ci n'a que des solutions triviales). On pourrait essayer de travailler avec l'opérateur de type Koopman de l'équation non-linéaire, ce dernier étant un opérateur linéaire, mais avec les difficultés inhérentes à cet type d'opérateur (espace de Hilbert étendu de très grande taille, spectre très complexe,...). Enfin, plutôt que de travailler avec comme variété de base M l'espace des paramètres de contrôle, on pourrait essayer de travailler sur $\mathcal{L}_x M$ l'espace des chemins fermés sur M partant de x (on peut penser que si l'équation est non-linéaire c'est parce qu'elle prend en compte des effets de mémoire sur la trajectoire suivie dans M). Mais cette approche va présenter la difficulté que $\mathcal{L}_x M$ est une variété de dimension infinie et que les intégrales de l'approche usuelle vont devenir des intégrales de chemins. Il ne s'agit que de pistes pour avancer dans le problème, mais on voit bien que même avant d'avoir été "travaillées" des difficultés se dressent déjà dans la réalisation de celles-ci.

Indépendamment des problèmes inhérents au contrôle adiabatique des systèmes dissipatifs, il m'est ap-

paru que le problème des qubits localisés en espace-temps courbe, et en particulier autour d'un trou noir, pouvait avoir des prolongements intéressants. L'Hamiltonien effectif de ce modèle pourrait apparaître comme une "valeur propre non-commutative" de l'équation de Schrödinger associée à la dynamique d'une pile de branes dans un modèle matriciel issu de la théorie des cordes [BD12]. Ce point pourrait être relié au fait que dans certaines versions de la théorie des cordes, la classification des trous noirs extrêmes suit les mêmes propriétés mathématiques que la classification des états d'intrication d'un système de trois qubits [BDL12], et au théorème ER=EPR qui stipule que (mathématiquement parlant) un trou de ver (pont d'Einstein-Rosen) est similaire à un état d'intrication entre deux particules distantes (paradoxe d'Einstein-Podolsky-Rosen) [MS13]. Cette question des liens entre information quantique et étude des trous noirs en théorie des cordes, en lien avec les approches adiabatiques et géométriques, pourrait constituer un développement futur intéressant. J'ai commencé une collaboration sur le sujet avec Frédéric Holweck (Université de Technologie de Belfort-Montbéliard) qui s'intéresse de longue date à la question de la classification des états d'intrication des qubits. Ce qui est intéressant, est qu'une équation aux valeurs propres non-commutatives similaire à celle de la théorie des cordes apparaît également dans l'étude du contrôle adiabatique de systèmes intriqués. Cela fait l'objet de la partie suivante.

Troisième partie

Contrôle des systèmes quantiques
intriqués

Chapitre 7

Transport adiabatique d'une matrice densité d'un système bipartite

Dans cette partie nous allons étudier le cas du contrôle d'un système quantique \mathcal{S} en contact avec un autre système quantique \mathcal{E} que l'on désignera comme l'environnement de \mathcal{S} . L'intrication entre \mathcal{S} et \mathcal{E} constitue alors l'éventuel processus de gêne du contrôle, étant entendu que l'opérateur du contrôle cherche à agir sur \mathcal{S} en ignorant \mathcal{E} (au sens propre du terme, nous supposons que l'opérateur ne dispose pas d'information sur \mathcal{E}). Formellement, la dynamique du contrôle est gouvernée par un Hamiltonien auto-adjoint de la forme (pour $x \in M$) :

$$H(x) = H_{\mathcal{S}}(x) \otimes 1_{\mathcal{E}} + 1_{\mathcal{S}} \otimes H_{\mathcal{E}}(x) + H_I(x) \quad (7.1)$$

avec $H_I \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}})$ l'opérateur d'interaction (et donc le générateur de l'intrication) entre \mathcal{S} et \mathcal{E} . L'Hamiltonien du système $H_{\mathcal{S}}$ dépend naturellement des paramètres de contrôle x , mais rien a priori n'interdit à l'environnement de "ressentir" le contrôle (si l'on pense à un contrôle par champ laser, l'environnement peut très bien être affecté par ce champ qui doit le traverser pour atteindre le système). C'est pour cette raison qu'en toute généralité $H_{\mathcal{E}}$ dépend également de x . L'interaction peut elle-même être affectée (par exemple si \mathcal{S} et \mathcal{E} sont deux atomes interagissant via des couplages multipolaires électriques, les moments induits par le champ de contrôle modifient cette interaction). H_I est donc également dépendant de x . Soit $\psi \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ la fonction d'onde du système bipartite solution de l'équation de Schrödinger $i\hbar\dot{\psi} = H(x(t))\psi(t)$ (pour un contrôle $t \mapsto x(t)$). Conformément avec l'hypothèse selon laquelle l'opérateur n'a pas accès à l'information concernant \mathcal{E} , l'état qu'il cherche à contrôler est l'état mixte $\rho(t) = \text{tr}_{\mathcal{E}}|\psi(t)\rangle\rangle\langle\langle\psi(t)|$ (la trace partielle sur $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ "effaçant" les informations concernant \mathcal{E} dans ψ). Lorsque \mathcal{E} est un "grand environnement" (un bain thermique par exemple), moyennant diverses approximations, on peut montrer que $\rho(t)$ obéit à une équation maîtresse de type Lindblad [BP02]. Mais comme on l'a déjà remarqué, outre le phénomène d'intrication, les phénomènes de dissipation et de distorsion sont présents dans ce cas (et sont conjoints à l'intrication du fait de l'origine commune aux trois phénomènes). Afin dans un premier temps d'étudier uniquement l'effet de l'intrication sur le contrôle, nous n'allons considérer que des "petits environnements" (\mathcal{E} est un système quantique avec un nombre de degrés de liberté du même ordre que celui de \mathcal{S} , nous supposons toujours ici que $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ sont de dimensions finies).

La question est de trouver une formulation du transport adiabatique adaptée aux matrices densités et pertinente vis à vis de l'effet de l'intrication avec l'environnement. Ce qui dans un premier temps nécessite de savoir quelle notion de vecteurs propres est pertinente.

7.1 L'équation aux valeurs propres non-commutatives

Par analogie avec le phénomène de distorsion étudié partie II, le transport adiabatique semble pouvoir être défini à partir des vecteurs propres instantanés de l'Hamiltonien du système bipartite $H(x)$ (équi-

valent de l'Hamiltonien de Floquet ou de Koopman). On qualifiera un tel régime d'adiabatique fort, car il implique que l'évolution de \mathcal{S} et de \mathcal{E} soient ensemble adiabatiques par rapport au contrôle. Mais ce n'est pas le seul régime qui puisse nous intéresser dans le cadre du contrôle. Comme on l'a vu au chapitre 2.3.4, pour augmenter la contrôlabilité d'un système fermé, on peut vouloir passer par un croisement de valeurs propres pour échanger les populations de celles-ci (au prix de dégrader la qualité de l'approximation adiabatique). Il est également possible de changer les poids relatifs dans une superposition de deux états propres instantanés en faisant un coude en passant par un croisement des valeurs propres associées (ou en jouant sur les transitions non-adiabatiques induites par passage lent au voisinage d'un croisement). Dans ces cas, du fait de l'absence d'espacement entre les niveaux et du rôle des transitions non-adiabatiques, le régime adiabatique est plus faible, mais la contrôlabilité (la quantité d'objectifs atteignables) est plus forte. De ce fait, on peut supposer que le contrôle peut générer toute transformation $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_S)$. Revenons au cas du système bipartite. Par maintenir la contrôlabilité supposée de \mathcal{S} (mais qui est plus fragile – moins robuste – du fait du régime faible) sans que les effets de \mathcal{E} ne viennent totalement la ruiner, on peut imaginer qu'il est nécessaire que l'évolution de \mathcal{E} soit fortement adiabatique par rapport au contrôle. On est donc conduit à considérer que le régime adiabatique faible consiste en un transport adiabatique (au sens fort) de \mathcal{E} protégeant le fragile contrôle de \mathcal{S} des effets délétères de \mathcal{E} . Puisqu'il s'agit d'appliquer l'adiabaticité stricte uniquement sur \mathcal{E} , il est intéressant de noter que $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ peut être considéré comme un C^* -module à gauche (c'est à dire un espace vectoriel dont le corps des complexes \mathbb{C} est remplacé par la C^* -algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$ des opérateurs de \mathcal{S})¹ [19]. Cette structure décrit \mathcal{E} en tant qu'espace des états avec \mathcal{S} relégué au rang secondaire des "scalaires", ce qui est dans la philosophie du régime adiabatique faible. En tant que C^* -module, $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ est équipé du produit interne $\forall \psi, \phi \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E, \langle \psi | \phi \rangle_* = \text{tr}_E |\phi\rangle\langle\psi|$ qui satisfait bien aux propriétés attendues : $\forall A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S), \forall \psi, \phi, \chi \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E,$

$$\langle \psi | A\phi + B\chi \rangle_* = A\langle \psi | \phi \rangle_* + B\langle \psi | \chi \rangle_* \quad (7.2)$$

$$\langle A\psi + B\phi | \chi \rangle_* = \langle \psi | \chi \rangle_* A^\dagger + \langle \phi | \chi \rangle_* B^\dagger \quad (7.3)$$

$$\langle \psi | \phi \rangle_* = \langle \phi | \psi \rangle_*^\dagger \quad (7.4)$$

$$\langle \psi | \psi \rangle_* = 0 \iff \psi = 0 \quad (7.5)$$

Cette structure de C^* -module est parfaitement naturelle pour étudier les matrices densités de \mathcal{S} dans le sens où pour $\psi \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$

$$\|\psi\|_*^2 = \rho \quad (7.6)$$

Il vient que les vecteurs propres instantanés pertinents sont solutions de l'équation [19,20]

$$H(x)|\mathfrak{E}, x\rangle = \mathfrak{E}(x)|\mathfrak{E}, x\rangle \quad (7.7)$$

avec $|\mathfrak{E}, x\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E, \mathfrak{E}(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$ la valeur propre non-commutative associée (dite non-commutative car c'est un élément de la C^* -algèbre des opérateurs de \mathcal{S}). On impose de plus la condition suivante :

$$[\mathfrak{E}(x) \otimes 1_E, H(x)]|\mathfrak{E}, x\rangle = 0 \quad (7.8)$$

traduisant le comportement "normal" pour une valeur propre qui doit commuter avec son opérateur devant son vecteur propre (même si une telle condition était triviale avec des valeurs propres scalaires, dans le cas non-commutatif elle est nécessaire à assurer la cohérence de la notion). $\rho_{\mathfrak{E}}(x) = \langle \mathfrak{E}, x | \mathfrak{E}, x \rangle_*$ joue alors le rôle de matrice densité propre.

Du fait de la structure non-commutative du C^* -module, les questions du degré de dégénérescence de \mathfrak{E} et de la complétude d'une éventuelle base de vecteurs propres ne sont pas tranchées². Par contre, il

1. L'action de $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$ sur $\psi \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ étant définie par $A\psi = A \otimes 1_E \psi$.

2. La littérature mathématique semble se focaliser plutôt sur l'étude des équations aux valeurs propres dans des C^* -modules de la forme $\mathfrak{a} \otimes \mathcal{H}$ où \mathfrak{a} est la C^* -algèbre et \mathcal{H} un espace vectoriel. Cette structure est peut-être intéressante pour la description de certains systèmes ouverts, mais je n'ai pas étudié la question pour l'instant.

est possible de donner un sens à la qualification de E comme non-dégénérée (ce qui est nécessaire à étudier le transport adiabatique de $|\mathfrak{E}, x\rangle\rangle$) [19]. H étant auto-adjoint, on s'attend à ce que E le soit également (comme le spectre scalaire est réel pour un Hamiltonien auto-adjoint), mais en fait \mathfrak{E} n'est qu'en moyenne auto-adjoint (au sens des probabilités définies par la matrice densité propre) [19], i.e.

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{S}}(\rho_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^\dagger)) = 0 \quad (7.9)$$

Ce qui n'exclue pas que certaines valeurs propres non-commutatives soient auto-adjointes au sens fort du terme. Si l'on note $\mathcal{L}_x(\rho) = \mathrm{tr}_{\mathcal{E}}([H(x), |\psi\rangle\rangle\langle\langle\psi|])$ le générateur de la dynamique de la matrice densité, $i\hbar\dot{\rho} = \mathcal{L}_{x(t)}(\rho(t))$ (\mathcal{L}_x prenant la forme d'un Lindbladien uniquement dans le cas où \mathcal{E} est grand avec les approximations associées à la dérivation des équations maîtresses), il est intéressant de noter que l'équation aux valeurs propres non-commutatives prend la forme

$$\mathcal{L}_x(\rho_{\mathfrak{E}}(x)) = \mathfrak{E}(x)\rho_{\mathfrak{E}}(x) - \rho_{\mathfrak{E}}(x)\mathfrak{E}(x)^\dagger \quad (7.10)$$

En comparant avec l'équation de Schrödinger-Liouville pour un système isolé, $i\hbar\dot{\rho} = H\rho - \rho H$, on voit que d'une certaine façon la valeur propre non-commutative joue le rôle d'un Hamiltonien effectif de \mathcal{S} une fois \mathcal{E} "oublié".

À plusieurs reprises j'ai mentionné les analogies existantes entre le contrôle des systèmes ouverts et la théorie des cordes, du fait que les deux théories faisaient appel à des théories de jauge de degré 3. Il est à noter que l'on trouve également une équation aux valeurs propres non-commutatives en théorie des cordes, dans une version dite du modèle matriciel [BD12] : $\sigma^i \otimes X_i |\mathfrak{E}\rangle\rangle = \mathfrak{E} |\mathfrak{E}\rangle\rangle$ avec $|\mathfrak{E}\rangle\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N$ l'état quantique d'une D2-brane reliée par une supercorde fermionique à une D0-brane³, $\{\sigma^i\}_{i=1,2,3}$ sont les matrices de Pauli, $X_i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$ sont les coordonnées non-commutatives⁴ de la D2-brane, et $\mathfrak{E} = x_i \sigma^i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ regroupe les coordonnées scalaires $\{x_i\}_{i=1,2,3}$ de la D0-brane "sonde" (position de la D2-brane dans l'état propre $|\mathfrak{E}\rangle\rangle$)⁵.

Il faut noter que les valeurs propres usuelles de $H(x)$ sont aussi des valeurs propres au sens non-commutatif introduit ici, avec $\mathfrak{E}(x) = \lambda_a(x) 1_{\mathcal{S}}$ pour $\lambda_a(x) \in \mathrm{Sp}(H(x))$. Considérer le vecteur propre associé dans le cadre du C^* -module peut être tout à fait satisfaisant pour certains exemples [20,21], sachant que la recherche des solutions où la valeur propre non-commutative n'est pas un multiple de l'identité souffre de l'absence d'une méthode générale. Néanmoins comme on va le voir dans la section suivante, dans le cas d'un couplage perturbatif entre \mathcal{S} et \mathcal{E} , nous disposons d'une méthode de construction de $\mathfrak{E}(x)$ [22].

7.2 Théorème adiabatique pour un système bipartite en couplage perturbatif

7.2.1 Transport adiabatique faible d'une matrice densité

Soient les valeurs et vecteurs propres instantanés de \mathcal{S} et \mathcal{E} :

$$H_{\mathcal{S}}(x)|a, x\rangle_{\mathcal{S}} = \mu_a(x)|a, x\rangle_{\mathcal{S}} \quad (7.11)$$

$$H_{\mathcal{E}}(x)|\alpha, x\rangle_{\mathcal{E}} = \nu_\alpha(x)|\alpha, x\rangle_{\mathcal{E}} \quad (7.12)$$

3. Une Dp-brane est une variété de dimension p sur laquelle les cordes sont attachées et où sont définies leurs conditions aux limites de Dirichlet.

4. La D2-brane est en fait une variété non-commutative au sens de la théorie d'Alain Connes [Con90].

5. La tension de la corde fermionique est proportionnelle à la distance entre les deux D-branes, dans un état propre la tension nulle montre que la D0-brane sonde se trouve sur une variété classique associée à la D2-brane. Pour l'état ψ avec la D0-brane au point $\{x_i\}_i$, on peut définir la tension par $\langle\langle\psi|\sigma^i \otimes (X_i - x_i)|\psi\rangle\rangle$.

On suppose que $H_I(x) = \epsilon V(x)$ avec $\epsilon \ll 1$ un paramètre perturbatif. On considère les valeurs et vecteurs propres usuels de $H(x)$:

$$H(x)|a\alpha, x\rangle = \lambda_{a\alpha}(x)|a\alpha, x\rangle \quad (7.13)$$

qui sont connectés par perturbation⁶ à ceux des composants du système bipartite :

$$\lambda_{a\alpha} = \mu_a + \nu_\alpha + \epsilon V_{a\alpha, a\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (7.14)$$

$$|a\alpha, x\rangle = |a, x\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |\alpha, x\rangle_{\mathcal{E}} + \epsilon \sum_{(b\beta) \neq (a\alpha)} \frac{V_{b\beta, a\alpha}}{\mu_a - \mu_b + \nu_\alpha - \nu_\beta + \epsilon V_{a\alpha, a\alpha}} |b, x\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |\beta, x\rangle_{\mathcal{E}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (7.15)$$

Avec Lucile Aubourg, étudiante dont j'ai coencadré la thèse, nous avons démontré [22] [Aub17] que dans des hypothèses correspondantes au régime adiabatique faible, la matrice densité du système est (au premier ordre de perturbation) :⁷

$$\rho(T) = \text{Ad} \left[\mathbb{T} \overleftarrow{e}^{-i\hbar^{-1} \int_0^T E_\alpha^{(1)}(x(t)) dt} \mathbb{P} \overrightarrow{e}^{-\int_C A_\alpha^{(1)}(x)} \right] \rho_{a\alpha}(x(T)) + \mathcal{O}(\max(\frac{1}{T}, \epsilon^2)) \quad (7.16)$$

pour un chemin de contrôle \mathcal{C} dans M paramétré par $[0, T] \ni t \mapsto x(t)$, avec $\rho(0) = \rho_{a\alpha}(x(0))$, la matrice densité propre étant $\rho_{a\alpha}(x) = \text{tr}_{\mathcal{E}} |a\alpha, x\rangle \langle a\alpha, x| = \langle a\alpha, x | a\alpha, x \rangle_*$ ($\text{Ad}(U)\rho = U\rho U^\dagger$). Le générateur de la phase dynamique est donné par

$$E_\alpha^{(1)} = \sum_{b,c} \left(\lambda_{b\alpha} \delta_{bc} - \frac{i\hbar}{T} \eta_{abc} \right) |b\alpha, x\rangle_{\mathcal{S}}^{(1)(1)} \langle c\alpha, x| \quad (7.17)$$

avec

$$|b\alpha, x\rangle_{\mathcal{S}}^{(1)} = |b, x\rangle_{\mathcal{S}} + \epsilon \sum_{d \neq b} \frac{V_{d\alpha, b\alpha}}{\mu_b - \mu_d + \epsilon V_{b\alpha, b\alpha}} |d, x\rangle_{\mathcal{S}} \quad (7.18)$$

et

$$\begin{aligned} \eta_{abc}^{(1)} &= \mathcal{E} \langle \alpha, x | \frac{d}{dt} | \alpha, x \rangle_{\mathcal{E}} \\ &+ \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{V_{b\gamma, c\alpha} \mathcal{E} \langle \alpha, x | \frac{d}{dt} | \gamma, x \rangle_{\mathcal{E}} (1 - \delta_{bc})}{\mu_c - \mu_b + \nu_\alpha - \nu_\gamma + \epsilon V_{c\alpha, c\alpha}} \\ &+ \epsilon \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{V_{b\alpha, c\gamma} \mathcal{E} \langle \gamma, x | \frac{d}{dt} | \alpha, x \rangle_{\mathcal{E}} (1 - \delta_{bc})}{\mu_b - \mu_c + \nu_\alpha - \nu_\gamma + \epsilon V_{b\alpha, b\alpha}} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Comme avec les quasiénergies des systèmes asservis à des systèmes dynamiques classiques, et avec les valeurs propres effectives des systèmes dissipatifs, le générateur de la phase dynamique cache un générateur de phase géométrique ($\eta_\alpha^{(1)}$) clairement associé à \mathcal{E} . Avec ce terme, on trouve la valeur propre non-commutative qui est simplement l'opérateur diagonal des valeurs propres connectées à ν_α : $\mathfrak{E} = \sum_b \lambda_{b\alpha} |b\alpha, x\rangle_{\mathcal{S}}^{(1)(1)} \langle b\alpha, x|$.

Le générateur de la C^* -phase géométrique est donné par

$$A_\alpha^{(1)} = \sum_{b,c} \langle b\alpha, x | d | c\alpha, x \rangle_{\mathcal{S}}^{(1)} |b\alpha, x\rangle_{\mathcal{S}}^{(1)(1)} \langle c\alpha, x| \quad (7.20)$$

6. On choisit la méthode de perturbation de Wigner-Brillouin pour éviter les petits diviseurs qui surviennent dans les dynamiques adiabatiques faibles où les croisements des valeurs propres de $H_{\mathcal{S}}$ sont autorisés.

7. $\mathbb{P} \overrightarrow{e}$ désigne l'exponentielle contre-ordonnée sur un chemin.

Le générateur peut être décomposé comme $A_\alpha^{(1)} = \mathfrak{A}_{a\alpha} + \tilde{\eta}_{a\alpha}$, avec $\mathfrak{A}_{a\alpha}$ (qui est la partie essentielle du générateur de la phase géométrique) solution de l'équation

$$\mathfrak{A}_{a\alpha}\rho_{a\alpha} = \langle a\alpha, x | d | a\alpha, x \rangle_* \quad (7.21)$$

$\tilde{\eta}_{a\alpha}$ étant tel que $\tilde{\eta}_{a\alpha}\rho_{a\alpha} + \rho_{a\alpha}\tilde{\eta}_{a\alpha}^\dagger = 0$. On a donc des phases (géométriques et dynamiques) à valeurs dans les opérateurs de \mathcal{S} (ce qui est conforme à la structure de C^* -module).

Lucile Aubourg a également calculé $|b\alpha, x\rangle^{(2)}$, $E_\alpha^{(2)}$ et $A_\alpha^{(2)}$ pour le second ordre de perturbation [22] [Aub17].

En régime adiabatique fort, on a $\rho(T) = \rho_{a\alpha}(x(T)) + \mathcal{O}(\frac{1}{T\epsilon})$. On voit donc très bien qu'en régime adiabatique faible, le supplément de contrôlabilité tient dans l'action des phases dynamiques et géométriques à valeurs opérateurs.

En conjecturant la validité d'un théorème adiabatique faible pour le cas général (sans l'hypothèse perturbative), on a [19]

$$\rho(T) \simeq \text{Ad} \left[\mathbb{T}e^{-i\hbar^{-1} \int_0^T \mathfrak{E}(x(t)) dt} \mathbb{P}e^{-\int_C (\mathfrak{A} + \eta)} \right] \rho_{\mathfrak{E}}(x(T)) \quad (7.22)$$

avec $\mathfrak{A}\rho_{\mathfrak{E}} = \langle \mathfrak{E}, x | d | \mathfrak{E}, x \rangle_*$ ou encore $d\rho_{\mathfrak{E}} = \mathfrak{A}\rho_{\mathfrak{E}} + \rho_{\mathfrak{E}}\mathfrak{A}^\dagger$, et $\eta\rho_{\mathfrak{E}} + \rho_{\mathfrak{E}}\eta^\dagger = 0$.

7.2.2 Interprétation de la théorie de jauge

En collaboration avec José Lages de l'Institut UTINAM, nous avons montré que les C^* -phases géométriques constituaient bien une théorie de jauge de degré 3, non-abélienne et avec des champs à valeurs dans la C^* -algèbre des opérateurs de \mathcal{S} [19,20]. Je ne détaillerais pas ici tous les éléments de la théorie de jauge (qui présentent une certaine complexité), mais je vais m'intéresser aux champs qu'elle définit, à savoir la courbure :

$$B_{a\alpha} = d\mathfrak{A}_{a\alpha} - \mathfrak{A}_{a\alpha} \wedge \mathfrak{A}_{a\alpha} \quad (7.23)$$

et un champ que l'on appelle la fausse courbure⁸ :

$$F_{a\alpha} = dA_\alpha - A_\alpha \wedge A_\alpha - B_{a\alpha} \quad (7.24)$$

La première chose que l'on peut remarquer est qu'en l'absence d'interaction entre \mathcal{S} et \mathcal{E} , et donc en l'absence d'intrication, le vecteur propre du système bipartite étant alors factorisable $|a\alpha, x\rangle = |a, x\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |\alpha, x\rangle_{\mathcal{E}}$, $\text{tr}_{\mathcal{S}}(\rho_{a\alpha}F_{a\alpha})$ est la courbure associée au fibré du transport adiabatique de $|a, x\rangle_{\mathcal{S}}$ et $\text{tr}_{\mathcal{S}}(\rho_{a\alpha}B_{a\alpha})$ est la courbure associée au fibré du transport adiabatique de $|\alpha, x\rangle_{\mathcal{E}}$. Une analyse plus fine, menée en partie sur des expérimentations numériques, montre les propriétés suivantes [20,21,23] :

- $\text{tr}_{\mathcal{S}}(\rho_{a\alpha}F_{a\alpha})$ mesure l'amplitude des effets non-adiabatiques sur \mathcal{S} qui sont de deux ordres :
 - des effets de transitions non-adiabatiques d'un état propre de \mathcal{S} à un autre, qui semblent se concentrer autour de défauts topologiques ponctuels sur M (comme pour le cas des systèmes fermés) ;
 - des effets de décohérence non-adiabatique (induite par une augmentation de l'intrication entre \mathcal{S} et \mathcal{E}) dûs à l'action de \mathcal{E} qui rompt la fragile adiabaticité de la dynamique de \mathcal{S} , et qui semblent se concentrer autour de défauts topologiques sous forme de cordes sur M ;

⁸ L'ordre de perturbation n'est plus indiqué, considérant que A_α est la valeur exacte ou toute approximation perturbative possible.

- $\text{tr}_S(\rho_{a\alpha} B_{a\alpha})$ mesure l'amplitude d'effets de décohérence "cinématique" (toujours induite par l'augmentation de l'intrication entre \mathcal{S} et \mathcal{E}), provoqués par des transitions d'états de \mathcal{E} induisant un changement de strate de pureté⁹ de ρ , et qui semblent se concentrer autour de défauts topologiques ponctuels ;
- $\rho_{a\alpha}$ est caractéristique d'une intrication instantanée entre \mathcal{S} et \mathcal{E} ($-\text{tr}_S(\rho_{a\alpha} \ln \rho_{a\alpha}) \neq 0$) due à la non-factorisabilité de $|a\alpha, x\rangle$ (il s'agit de l'intrication directement sous contrôle qui ne dépend que de la position dans M et non du chemin parcouru – et donc de la dynamique – comme les deux autres processus ci-dessus, c'est aussi la seule intrication présente dans le régime adiabatique fort).

Un exemple du rôle des champs est donné sur les figures 7.1 et 7.2.

7.3 Le 2-fibré de la théorie de jauge

7.3.1 Construction du 2-fibré

La construction de la fibration dans laquelle prend place le générateur de la C^* -phase géométrique et ses fausse courbure et cambrure, est assez similaire à la construction du fibré adiabatique des systèmes fermés vue au chapitre 2.3.4. Ainsi, si l'on veut prendre en compte toute la variété de contrôle M , on doit considérer une équation aux valeurs propres non-commutatives

$$H(x)|\mathfrak{E}, x\rangle^\alpha = \mathfrak{E}(x)|\mathfrak{E}, x\rangle^\alpha \quad (7.25)$$

avec des vecteurs propres définis localement (sur chaque carte U^α) afin que ceux-ci soient de classe \mathcal{C}^1 . Il apparaît alors deux groupes de jauge (locaux) [19]. L'un $G_x \subset GL(\mathcal{H}_S)$ correspond aux changements de phases et de normes non-commutatives (notions liées à celle de non-dégénérescence de \mathfrak{E}), l'autre correspond aux transformations de l'environnement laissant invariant l'Hamiltonien $K_x = \{k \in U(\mathcal{H}_E), k^{-1}H(x)k = H(x)\}$. Les deux transformations de jauge laissent invariante l'équation aux valeurs propres non-commutatives : $\forall gk \in G_x \times K_x, H(x)|\mathfrak{E}, x\rangle^\alpha = \mathfrak{E}(x)|\mathfrak{E}, x\rangle^\alpha \Rightarrow H(x)gk|\mathfrak{E}, x\rangle^\alpha = \mathfrak{E}(x)gk|\mathfrak{E}, x\rangle^\alpha$. Mais du point de vue de la matrice densité, G_x correspond aux changements de jauge "actifs" alors que K_x correspond aux reconfigurations inobservables de $\mathcal{E} : |\mathfrak{E}, x\rangle^\alpha = \widetilde{gk}|\mathfrak{E}\rangle^\alpha \Rightarrow \tilde{\rho}_\mathfrak{E}^\alpha = g\rho_\mathfrak{E}^\alpha g^\dagger$. K_x n'ayant pas d'influence sur la matrice densité, il est "représenté" pour celle-ci par H_x le sous-groupe de G_x qui laisse invariant $\rho_\mathfrak{E}^\alpha$. Les fonctions de transition du 2-fibré sont alors définies par

$$\forall x \in U^\alpha \cap U^\beta, \quad |\mathfrak{E}, x\rangle^\alpha = k^{\alpha\beta}(x)g^{\alpha\beta}(x)|\mathfrak{E}, x\rangle^\beta \quad (7.26)$$

avec $g^{\alpha\beta}(x) \in G_x$ et $k^{\alpha\beta}(x) \in K_x$, et on montre [19] que $h^{\alpha\beta\gamma}(x) = g^{\alpha\beta}(x)g^{\beta\gamma}(x)g^{\gamma\alpha}(x) \in H_x$ définit des 2-fonctions de transition. Par ailleurs, on a

$$\mathfrak{A}^\beta = g^{\alpha\beta-1}\mathfrak{A}^\alpha g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta-1}dg^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta-1}\eta^{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} \quad (7.27)$$

avec $\eta^{\alpha\beta}(x) \in \mathfrak{h}_x$ (\mathfrak{h}_x est algèbre de Lie de H_x) solution de $\eta^{\alpha\beta}\rho_\mathfrak{E}^\alpha = \alpha\langle \mathfrak{E}, x | k^{\alpha\beta} dk^{\alpha\beta-1} | \mathfrak{E}, x \rangle_*^\alpha$.

Les groupes de jauge locaux définissent des espaces fibrés locaux $P_G^\alpha = \bigcup_{x \in U^\alpha} G_x$ et $P_H^\alpha = \bigcup_{x \in U^\alpha} H_x$

qui avec les fonctions de transition et de 2-transition définissent un 2-fibré $\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{P}$ où $\mathcal{G} = (G, H, \alpha, t)$,

G et H étant les groupes de Lie modèles des G_x et H_x (t étant l'injection canonique de H dans G (H est un sous-groupe normal de G) et α la conjugaison), \mathcal{M} est la catégorie triviale associée à M (les seules flèches sont les identités sur les points de M), et $\text{Obj}(\mathcal{P}) = \bigsqcup_\alpha P_G^\alpha$ et $\text{Morph}(\mathcal{P}) = \bigsqcup_\alpha P_H^\alpha \times_M P_G^\alpha$.

9. L'espace des matrices densités peut être décomposé en différentes strates de niveau de pureté, allant de la strate des états purs à celle ne contenant que la matrice densité de la distribution microcanonique (état le plus impur possible).

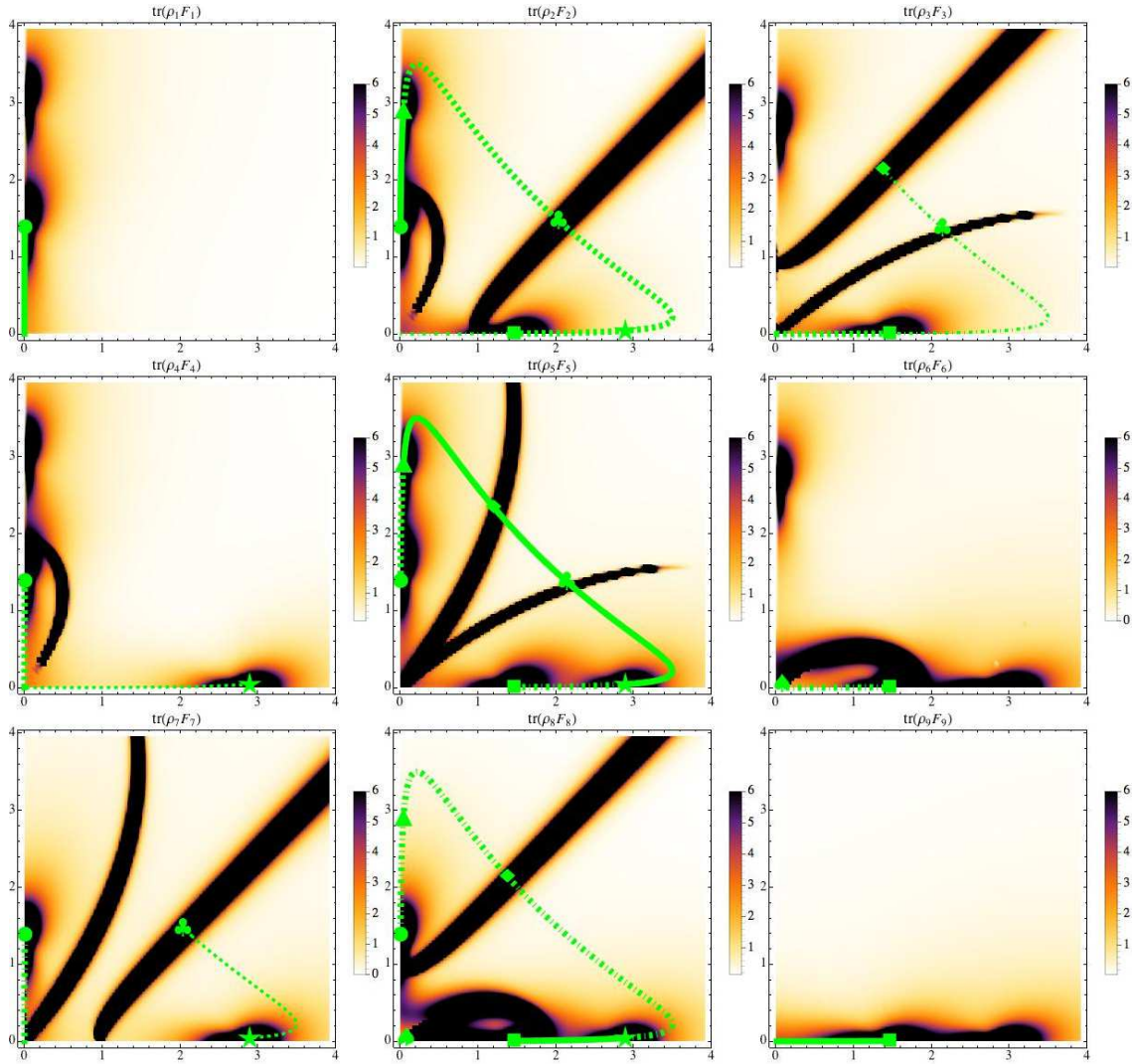


FIGURE 7.1 – Représentation des moyennes des fausses courbures $\text{tr}_S(\rho_{a\alpha}F_{a\alpha})$ sur la variété de contrôle M pour le contrôle d'un atome à 3 niveaux (\mathcal{S}) suivant la méthode du STIRAP (STIMulated Raman Adiabatic Passage) en interaction avec un atome identique (\mathcal{E}) qui ressent les champs laser de contrôle atténués de moitié. Les deux directions de M correspondent aux deux intensités des champs laser utilisés dans la méthode du STIRAP. L'interaction perturbative entre les deux atomes est indépendante des champs laser de contrôle. La courbure est nulle dans cet exemple. On constate que les fortes valeurs des fausses courbures se concentrent sous la forme de tâches plus ou moins elliptiques autour de points sur les bords de M , ainsi qu'autour de cordes qui traversent M . La numérotation des fausses courbures F_i est telle que $i = a + 3(\alpha - 1)$. On a tracé trois chemins (traits pleins, tirets, pointillés) correspondant au chemin de contrôle STIRAP pour 3 conditions initiales de \mathcal{E} différentes. Des événements particuliers sont indiqués par \bullet , \blacktriangle , \blacklozenge ,... Les dynamiques induites sur \mathcal{S} sont représentées figure 7.2. Tiré de [21].

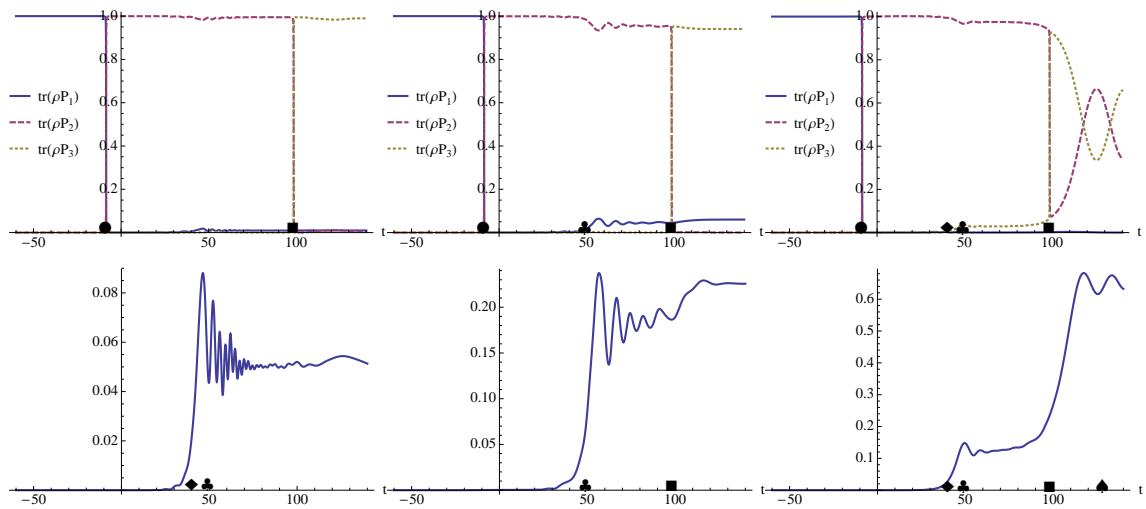


FIGURE 7.2 – Évolution de la matrice densité $\rho(t)$ pour un atome à 3 niveaux (\mathcal{S}) dans un contrôle STIRAP en contact avec un autre atome (\mathcal{E}) tel que décrit figure 7.1. En haut les probabilités d'occupation des états propres instantanés de \mathcal{S} , et en bas l'entropie de von Neumann $-\text{tr}(\rho(t) \ln \rho(t))$. À gauche pour le chemin en trait plein sur la figure 7.1, au centre pour celui en tirets, et à droite pour celui en pointillés. On constate que les événements \bullet et \blacksquare correspondent à une transition d'un état propre à un autre (correspondant au passage des chemins par les singularités ponctuelles de la fausse courbure); alors que les événements \blacklozenge , \clubsuit et \spadesuit correspondent à de forts changements d'intrication visible dans la dynamique des entropies (correspondant au passage des chemins par les cordes de singularité de la fausse courbure). Les événements \blacktriangle et \blackstar sur la figure 7.1 correspondent à des changements d'état propre de \mathcal{E} , qui n'ont pas de conséquence sur \mathcal{S} . Tiré de [21].

7.3.2 Les différentes notions de phase dans le C^* -module

La présence des trois groupes de jauge G , K et H peut surprendre, mais il faut remarquer que l'équation aux valeurs propres non-commutatives (et la structure de C^* -module) induit trois notions différentes de phase pour un état $\psi \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$:

- Un opérateur h est une phase par invariance s'il laisse invariant la norme C^* : $\|h\psi\|_*^2 = \|\psi\|_*^2$. C'est cette définition qui conduit au groupe H .
- Un opérateur g est une phase par équivariance s'il transforme la norme C^* par conjugaison : $\|g\psi\|_*^2 = g\|\psi\|_*^2g^{-1}$. C'est cette définition qui conduit au groupe G (on notera de plus, que puisque \mathfrak{E} n'est pas auto-adjoint – mais seulement en moyenne – on se trouve dans une situation qui se rapproche du cas non-hermitien et il faut aussi considérer les changements de norme dans G , d'où le choix de prendre g non-unitaire dans le paragraphe précédent).
- Un opérateur k est une phase par rapport à l'Hamiltonien si : $Hk\psi = kH\psi$. C'est cette définition qui conduit à K .

Il est clair que pour un espace de Hilbert usuel (sur le corps des complexes \mathbb{C} et donc avec des phases et des normes scalaires), ces trois définitions coïncident, mais ce n'est plus le cas quand ces phases deviennent des opérateurs.

En résumé

Dans le régime adiabatique faible, la dynamique des matrices densités d'un système qui s'intrique avec un environnement se présente comme le transport d'une matrice densité propre (solution d'une équation aux valeurs propres non-commutatives) présentant des phases dynamiques et géométriques à valeurs dans les opérateurs du système. Si le régime adiabatique faible permet une plus grande contrôlabilité que le régime fort, le contrôle est y aussi plus gêné par les effets de l'intrication, mais ceux-ci sont quantifiables à l'aide de la fausse courbure et de la cambrure de la théorie de jauge de degré 3 induite par les C^* -phases géométriques. Ce travail nécessiterait une meilleure compréhension de l'équation aux valeurs propres non-commutatives pour s'extraire de l'hypothèse du couplage perturbatif entre le système et l'environnement. Les cas d'autres structures de C^* -module ($\mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \otimes \mathcal{H}_E$), ou du renversement de point de vue ($\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ vu comme un C^* -module à droite de C^* -algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H}_E)$, correspondant à une dynamique adiabatique forte de \mathcal{S} mais pas de \mathcal{E}), mériteraient d'être étudiés. Enfin l'analogie entre le contrôle adiabatique des systèmes bipartites et les D-branes pourrait être étudié de plus près afin de voir si la théorie des cordes peut être simulée dans des systèmes quantiques simples disponibles expérimentalement (alors qu'elle échappe actuellement à toute expérimentation directe). Le 2-fibré \mathcal{P} équipé de la cambrure permet de définir des relèvements horizontaux de surfaces de la variété de contrôle M . À ce stade, le sens de tels relèvements du point de vue du contrôle quantique n'est pas clair pour moi, d'autant que la cambrure est associée aux changements de strate de pureté de la matrice densité induite par le contrôle.

Avant de poursuivre, j'aimerais faire une autre remarque sur la classification des décohérences au sens Joos [Joo07]. \mathcal{E} étant petit, on serait ici en présence d'une fausse décohérence. Car dans la classification de Joos, où les Hamiltoniens sont indépendants du temps, une chute de cohérence dans une intrication avec un petit système quantique est toujours compensée par une remontée de celle-ci au bout d'un certain temps (en fait à faible dimension, on a seulement des oscillations plus ou moins complexes en fonction du nombre d'états intriqués superposés). La décohérence est fausse car elle est "spontanément" réversible avec le temps et est donc considérée comme accidentelle. Mais du fait du contrôle, après avoir conduit le système sur un chemin $t \mapsto x(t)$, si la cohérence a chuté, il n'y a pas de raison qu'elle remonte ensuite, même si le chemin est fermé (sauf si on a évité toutes les singularités et que l'homonologie est nulle, c'est à dire si la fausse courbure et la cambrure sont nulles ou très faibles dans la zone entourée). La décohérence est néanmoins réversible, à condition de refaire le chemin de contrôle en sens inverse. Mais

à partir du moment où - du fait du contrôle - on se donne le droit d'agir activement sur le système, toute décohérence, même la vraie décohérence au sens Joos, est réversible (par des procédures de purification ou de distillation quantiques). Encore une fois, il me semble que dans le cadre du contrôle quantique, la distinction de Joos entre vraie, fausse et décohérence falsifiée, n'est pas pertinente.

Publications

Mes travaux concernant le contrôle adiabatique des matrices densités d'un système intriqué avec un petit environnement peuvent être trouvés ci-dessous :

- [19] D. Viennot & J. Lages, *A new kind of geometric phases in open quantum systems and higher gauge theory*, J. Phys. A : Math. Theor. **44**, 365301 (2011) [arXiv :1101.2852].
- [20] D. Viennot & J. Lages, *C^* -geometric phase for mixed states : entanglement, decoherence and the spin system*, J. Phys. A : Math. Theor. **45**, 365305 (2012) [arXiv :1207.7340].
- [21] D. Viennot, *Adiabatic quantum control hampered by entanglement*, J. Phys. A : Math. Theor. **47**, 295301 (2014) [arXiv :1310.4095].
- [22] D. Viennot & L. Aubourg, *Adiabatic theorem for bipartite quantum systems in weak coupling limit*, J. Phys. A : Math. Theor. **48**, 025301 (2015) [arXiv :1407.4356].

Chapitre 8

Contrôle d'un système intriqué avec un grand environnement

On s'intéresse toujours au contrôle d'un système quantique \mathcal{S} en contact avec un environnement quantique \mathcal{E} , mais cette fois de très grande dimension par rapport à \mathcal{S} (au sens où \mathcal{E} présente un très grand nombre de degrés de liberté par rapport \mathcal{S} , un réservoir de bosons par exemple comme un bain thermique). On pourrait vouloir utiliser la même approche que dans le chapitre précédent, mais trois problèmes surviennent. D'une part l'application du théorème adiabatique faible pour les matrices densités que nous avons démontré nécessite une condition de non-résonance entre les transitions de \mathcal{S} et celles de \mathcal{E} , ce qui n'a aucune chance d'être avec \mathcal{E} très grand (son spectre étant en général approché par un continuum). Le second problème est que la dimension de \mathcal{E} étant infinie, sans que d'une manière générale l'on puisse se restreindre à un sous-espace de petite dimension, la résolution pratique de l'équation aux valeurs propres non-commutatives et de l'arsenal déployé au chapitre précédent semble inopérante. Enfin la complexité de la dynamique de \mathcal{E} fait qu'en général, il est préférable de travailler avec une équation qui prend en compte uniquement les effets de \mathcal{E} sur la matrice densité de \mathcal{S} , c'est à dire une équation maîtresse de la forme de Lindblad, quitte à faire un certain nombre d'approximations sur ces effets [BP02]. C'est donc sur le contrôle d'une équation de Lindblad que nous nous arrêtons ici.

8.1 Difficultés inhérentes au problème

La première difficulté est que l'on ne peut pas simplement se contenter d'ajouter un contrôle à l'Hamiltonien du système sans toucher aux opérateurs de quantum jumps Γ_k et aux taux de jumps γ_k . En effet ceux-ci sont liés aux résonances entre les transitions de \mathcal{S} et \mathcal{E} (permettant les transferts d'énergie de l'un à l'autre), ces mêmes résonances qui nous empêchent d'utiliser l'approche des systèmes bipartites du chapitre précédent. Or la présence du contrôle (si c'est un champ laser sur un atome par exemple), modifie les niveaux d'énergie instantanée de \mathcal{S} (ce qui est en contact avec \mathcal{E} c'est l'atome habillé du champ, ou si l'on préfère, le contrôle en amenant lui-même des échanges d'énergie avec \mathcal{S} – par absorption ou émission de photons – modifie les conditions de résonance avec \mathcal{E}). Il s'en suit que les opérateurs et les taux de jumps dépendent des paramètres de contrôle et ce même en supposant que \mathcal{E} n'est pas directement affecté par le contrôle. C'est le phénomène que j'ai désigné comme la *contre-réaction* de l'environnement dans l'introduction. On montre en effet, que pour un contrôle adiabatique de \mathcal{S} (au sens fort, sans passer par des croisements de niveaux de \mathcal{S}), l'équation de Lindblad prend la

forme (dans les approximations Markovienne et séculaire) [ABLZ12] :

$$\begin{aligned}
i\hbar\dot{\rho} &= [H(x(t)), \rho] \\
&\quad - \frac{i}{2} \sum_{i < j} \sum_{k \in \{+, -, z\}} \gamma_k^{ij}(x(t)) \{ \bar{\sigma}_k^{ij}(x(t))^\dagger \bar{\sigma}_k^{ij}(x(t)), \rho \} \\
&\quad + i \sum_{i < j} \sum_{k \in \{+, -, z\}} \gamma_k^{ij}(x(t)) \bar{\sigma}_k^{ij}(x(t)) \rho \bar{\sigma}_k^{ij}(x(t))^\dagger
\end{aligned} \tag{8.1}$$

où $\bar{\sigma}_k^{ij}(x) = R(x)\sigma_k^{ij}R(x)^\dagger$, $\{\sigma_k^{ij}\}_k$ étant les opérateurs (de type Pauli) associés à la transition de l'état i vers l'état j de \mathcal{S} , et $R(x)$ est la matrice des vecteurs propres de $H(x)$. Autrement dit, les opérateurs de jumps sont habillés du champ de contrôle. On voit donc que si l'on cherche à contrer les effets de l'environnement en modifiant le contrôle, les opérateurs de jumps "tournent" avec celui-ci pour maintenir leurs effets malgré tout. C'est pour cela que j'appelle cette dépendance "contre-réaction", et celle-ci limite fortement la contrôlabilité de \mathcal{S} dominé par \mathcal{E} . Cette contre-réaction se complique dans un régime adiabatique plus faible où l'on permet les croisements de niveaux de \mathcal{S} (ce qui change bien sûr les effets de résonance avec \mathcal{E}), dans le régime non-séculaire, mais surtout dans le régime non-Markovien où du fait des effets de mémoire à longs termes, les taux de jumps vont dépendre du chemin de contrôle (et pas seulement de la valeur instantané $x(t)$) et se "rappeler" du passage par un croisement. Avec Bruno Bellomo de l'Institut UTINAM et Daniele Militello de l'Université de Palerme en Italie, nous étudions actuellement la dérivation des équations maîtresses adiabatiques dans ce cas le plus général. Ce travail est toujours en cours.

Partons maintenant du principe que l'on dispose de l'équation maîtresse en présence d'un contrôle adiabatique, où pour la dériver, on a déjà supposé que l'évolution de \mathcal{S} seul était adiabatique (fortement – sans croisement –, ou faiblement – avec croisement –). Il s'agit maintenant de définir le transport adiabatique de la matrice densité de \mathcal{S} , c'est à dire de définir l'adiabaticité de \mathcal{S} en présence des effets de \mathcal{E} . Pour cela, il est nécessaire d'étudier l'équation de Lindblad comme une équation de Schrödinger. Deux approches sont alors possibles. La première consiste à considérer la représentation de Liouville de l'équation de Lindblad (en considérant ρ comme un opérateur de Hilbert-Schmidt, avec le produit scalaire $\langle\langle \tau | \rho \rangle\rangle = \text{tr}(\tau^\dagger \rho)$). On a alors

$$i\hbar|\dot{\rho}\rangle\rangle = L(x(t))|\rho(t)\rangle\rangle \tag{8.2}$$

avec $|\rho\rangle\rangle \in \mathcal{H}_S^{\otimes 2}$ et $L(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S^{\otimes 2})$, $L(x)^\dagger \neq L(x)$. On revient donc au problème du contrôle adiabatique d'un système dissipatif traité dans la partie II, avec néanmoins quelques particularités :

- le seul état propre de $L(x)$ qui soit une matrice densité est l'état stationnaire instantané $L(x)|\rho_\infty(x)\rangle\rangle = 0$ ($\text{tr}\rho_\infty(x) = 1$). C'est aussi systématiquement l'état propre le moins dissipatif (il ne dissipe pas du tout contrairement aux autres), et n'a aucun couplage non-adiabatique avec les autres états ;
- les autres états propres, $L(x)|\tau_a(x)\rangle\rangle = \Lambda_a(x)|\tau_a(x)\rangle\rangle$ ($\text{tr}\tau_a(x) = 0$ et $\Lambda_a \in \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}^{*-}$) représentent dans la décomposition de $\rho(t)$ les corrections par rapport à l'état stationnaire instantané, à savoir les écarts aux populations stationnaires et les cohérences, leurs dissipations correspondant aux régimes transitoires ;
- $\rho(t)$ est nécessairement une superposition de tous les états propres instantanés sauf si l'on part de l'état stationnaire instantané (en se plaçant directement en régime permanent).

L'absence de couplages non-adiabatiques de l'état stationnaire instantané rend la contrôlabilité très faible (elle se limite à déformer cet état stationnaire et à changer le poids des différents régimes transitoires aux croisements de valeurs propres), sauf à jouer avec des effets non-markoviens. C'est sur ce point que nous travaillons avec Bruno Bellomo et Daniele Militello, en ajoutant des techniques de *reservoir engineering* (contrôle statique de \mathcal{E}) afin d'augmenter la contrôlabilité du système. Ce travail est en cours, et il

semble assez difficile de trouver un contrôle adiabatique probant qui soit autre chose que la dégradation "incontrôlable" des solutions de contrôle du cas où \mathcal{S} est isolé. Outre ces difficultés de mise en pratique, la définition du transport (presque) adiabatique et la structure de la théorie de jauge associée sont celles de la partie II.

Dans cette première approche où l'on passe à la représentation de Liouville, on insiste sur le caractère dissipatif de la dynamique induite par \mathcal{E} . Dans la seconde approche, on souhaite insister sur le fait que \mathcal{S} et \mathcal{E} s'intriquent, et que c'est cette intrication qui est responsable des effets de \mathcal{E} sur la matrice densité de \mathcal{S} . C'est cette approche qui nous intéresse dans cette partie dédiée aux effets d'intrication. Mais comme on l'a dit plus haut, on ne peut pas travailler avec l'environnement complet. On va donc chercher à travailler avec un environnement effectif de petite dimension, dit environnement auxiliaire \mathcal{A} . L'évolution dans $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ est alors donnée par l'équation de Schrödinger associée à la procédure mathématique de purification [23] :

$$i\hbar\dot{\Psi}_{\rho} = \left(H(x(t)) \otimes 1_{\mathcal{A}} - \frac{i}{2}\gamma^k \Gamma_k(x(t)) \dagger \Gamma_k(x(t)) \otimes 1_{\mathcal{A}} + \frac{i}{2}\gamma^k \Gamma_k(x(t)) \otimes \Gamma_k^{\dagger}(x(t), \Psi_{\rho}(t)) \right) \Psi_{\rho}(t) \quad (8.3)$$

avec $\rho(t) = \text{tr}_{\mathcal{A}} |\Psi_{\rho}(t)\rangle \langle \Psi_{\rho}(t)|$ (on suppose ici $\det \rho \neq 0$). Or cette équation est non-linéaire, $\Gamma_k^{\dagger}(\Psi_{\rho}) = (W_{\rho}^{-1} \Gamma_k W_{\rho})^{\dagger \text{T}}$ (avec W_{ρ} la matrice telle que $\Psi_{\rho} = (W_{\rho})^{i\alpha} \zeta_i \otimes \xi_{\alpha}$, $(\zeta_i)_i$ et $(\xi_{\alpha})_{\alpha}$ bases orthonormées de $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$), rendant impossible de définir ses valeurs propres (commutatives ou non) et rendant impossible une approche adiabatique. Cette non-linéarité est le prix à payer pour décrire une dynamique complexe dans un espace de Hilbert de petite dimension. Comme pour le régime presque adiabatique des dynamiques dissipatives, on ne pourra pas travailler sur la variété de contrôle M (ou sur une catégorie associée) et l'on devra se rabattre sur la description géométrique des dynamiques non-adiabatiques sur une variété ou une catégorie correspondant directement aux états (ici mixtes).

Reste une difficulté que l'on a déjà pointée dans l'introduction, la dynamique présente conjointement des effets de distorsion (cachés dans la non-linéarité de l'intricateur), de dissipation (engendrés par le dissipateur $-\frac{i}{2}\gamma^k \Gamma_k^{\dagger} \Gamma_k$), d'intrication (par l'intricateur entre \mathcal{S} et \mathcal{A}) et de contre-réaction (dans la dépendance en x des opérateurs et des taux de jumps). Ces effets sont inséparables car d'origine commune, l'intrication entre \mathcal{S} et \mathcal{E} . La présence de tous les phénomènes risque de compliquer quelque peu l'étude de la géométrie de la théorie de jauge.

8.2 Géométrie de la dynamique d'une matrice densité

8.2.1 C^* -phases géométriques non-adiabatiques

Abandonnant l'approche adiabatique du fait de la non-linéarité de l'équation de Lindblad purifiée, il nous faut désormais une nouvelle façon de définir les phases géométriques. Comme dans le cas des systèmes fermés, c'est une notion de cyclicité qui va nous le permettre, en utilisant les notions de phases dans le C^* -module vues précédemment. Ainsi, $t \mapsto \Psi_{\rho}(t)$ (purification de $t \mapsto \rho(t)$) sera une évolution cyclique s'il existe $t \mapsto \tilde{\Psi}_{\tilde{\rho}}(t)$ telle que $\tilde{\Psi}_{\tilde{\rho}}(T) = \tilde{\Psi}_{\tilde{\rho}}(0)$, et $\Psi_{\rho}(t) = g(t)h(t) \otimes k(t)\tilde{\Psi}_{\tilde{\rho}}(t)$ avec $g(t) \in G$ un opérateur pouvant être vu comme une phase/norme par équivariance, $h(t) \in H$ un opérateur vu comme une phase par invariance, et $k(t) \in K$ pouvant être vu comme une reconfiguration inobservable de l'environnement auxiliaire \mathcal{A} . On trouve alors une expression tout à fait similaire au cas adiabatique traité dans le chapitre précédent [23] :

$$\rho(T) = \text{Ad} \left[\mathbb{T}_{\leftarrow} e^{-i\hbar^{-1} \int_0^T \mathfrak{E}(\rho(t)) dt} \mathbb{P}_{\rightarrow} e^{-\int_C (\mathfrak{A}(\tilde{\rho}) + \eta(\tilde{\rho}))} \right] \tilde{\rho}(0) \quad (8.4)$$

les générateurs des phases géométriques étant définis de façon similaire au chapitre précédent, celui de la phase dynamique étant défini par $\mathfrak{E}(\rho) = H - \frac{i}{2}\gamma^k \Gamma_k^{\dagger} \Gamma_k + \frac{i}{2}\gamma^k \Gamma_k \rho \Gamma_k^{\dagger} \rho^{-1}$. On notera néanmoins une

particularité, l'expression de ρ en fonction de $\tilde{\rho}$ est implicite, car \mathfrak{E} est intégrée le long de $t \mapsto \rho(t)$ et non de $t \mapsto \tilde{\rho}(t)$. Il s'agit là de l'effet direct de la non-linéarité de l'équation de Lindblad purifiée. Bien que n'étant plus une valeur propre non-commutative, on voit dans l'expression de \mathfrak{E} que le générateur de la phase dynamique joue toujours le rôle d'un Hamiltonien effectif de \mathcal{S} une fois \mathcal{A} oublié.

La phase par équivariance induite par l'évolution cyclique correspond à des transformations isospectrales de \mathcal{S} . Le changement de norme par équivariance ($G \subset GL(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$) (phase "non-unitaire") correspond à des SLOCC (opérations locales stochastiques et communication classique). Les SLOCC sont les opérations et les protocoles en information quantique que peut réaliser un opérateur sur \mathcal{S} sans modifier le niveau d'intrication avec \mathcal{A} et sans connaissance de ce dernier. Le changement de norme C^* (la non-conservation de la trace), la partie dite "stochastique", est associée au fait que l'on ne se limite pas aux protocoles qui assurent un succès avec certitude. Nombre de protocoles en informatique quantique nécessitent des opérations de post-sélection où il faut trier les systèmes en fonction du succès ou de l'échec des opérations. Rien ne permet de garantir pour une évolution $t \mapsto \rho(t)$, que le passage à la matrice densité cyclique $t \mapsto \tilde{\rho}(t)$ ($\tilde{\rho}(T) = \tilde{\rho}(0)$) ne nécessite pas l'utilisation de protocoles SLOCC. De fait l'analyse formelle de la cyclicité des dynamiques purifiées montre que le groupe de transformations est sous-groupe de $GL(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ (transformations isospectrales et SLOCC) et ne peut pas être réduit par un argument général à $U(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ (transformations unitaires).

Mon étude des évolutions purifiées cycliques dans la structure de C^* -module montre [23] également que la phase géométrique k des reconfigurations inobservables de \mathcal{A} , n'est autre que la phase géométrique introduite par Uhlmann [Uhl86]. Cette dernière avait été introduite à partir de la notion de "parallélisme dans les probabilités de transition" et apparaît de manière tout à fait naturelle dans le présent formalisme. De plus, il avait été remarqué que la définition d'Uhlmann ne fournissait pas un générateur de phase géométrique défini de manière univoque, mais que toute une famille de générateurs (toute une famille de connexions) était possible [DR92]. Or j'ai montré [23] que le passage d'un générateur à l'autre dans cette famille est en fait un changement de jauge au sens d'une classe de Deligne de degré 3 (la phase d'Uhlmann semblait associée à une famille de connexions différentes, car elle n'était considérée que comme une théorie de jauge au sens d'une classe de Deligne de degré 2). Enfin, la phase géométrique par invariance qui apparaît naturellement dans le formalisme, n'est autre que la phase géométrique introduite par Sjökqvist [SPE⁺00] (et dont la structure géométrique a été étudiée par Andersson [AH13]), initialement introduite dans le cadre de l'interferométrie des systèmes ouverts. Il apparaît donc que le formalisme du C^* -module permet d'unifier différentes définitions de phases géométriques de systèmes ouverts, la "fluidité" entre les différentes phases étant assurée par la théorie de jauge de classe de Deligne de degré (au moins) 3 [23].

8.2.2 La catégorie des états mixtes et la fibration

La structure géométrique qui sous-tend la théorie de jauge des C^* -phases géométriques est compliquée par le fait que l'espace des matrices densités est en fait un fibré stratifié, c'est à dire un fibré non-localement trivial : la fibre type est différente d'une strate à l'autre. Les différentes strates sont définies par le profil de dégénérescence et de zéros des valeurs propres des matrices densités (normalisées). Elles peuvent être considérées comme des strates de différentes puretés (bien qu'il s'agisse d'une classification discrète de la pureté, à opposer à une mesure continue telle que $\text{tr}\rho^2$; la stratification n'induit pas non plus une relation d'ordre totale). Ainsi, on pourra distinguer la strate des états purs (profil de valeurs propres $(1, 0, \dots, 0)$), de celle de la distribution microcanonique – la plus "impure" – (profil $(1/N, \dots, 1/N)$), de la strate cœur (profil (p_1, \dots, p_N) , avec $i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j$ et $\sum_{i=1}^N p_i = 1$), et des autres profils avec plus ou moins de zéros et plus ou moins de dégénérescence. L'espace des matrices densités $\text{Obj}(\mathcal{D})$ doit donc être considéré comme un fibré sur un simplexe $\text{Obj}(\mathcal{S})$ (une variété de type segment, triangle, tétraèdre, hypertétraèdre,...) représentant les différents profils de probabilités statistiques pour le système. À chaque

élément du simplexe (vertexe, arête, facette, cœur, ...) correspond une strate différente. Le simplexe de base peut être assimilé à une catégorie triviale \mathcal{S} ($\text{Morph}(\mathcal{S})$ ne contient que les flèches identités sur les points de $\text{Obj}(\mathcal{S})$). Par contre l'espace des matrices densités lui-même, \mathcal{D} , peut être équipé d'une structure de catégorie non-triviale avec¹ $\text{Morph}(\mathcal{D}) = G/H \times \text{Obj}(\mathcal{D})$, avec $\forall (g, \rho) \in \text{Morph}(\mathcal{D})$, $s(g, \rho) = \rho$, $t(g, \rho) = g\rho g^\dagger$, $\text{id}_\rho = (1_{\mathcal{S}}, \rho)$ (les flèches sont les transformations isospectrales et les SLOCC, c'est à dire qu'elles représentent les protocoles d'information quantique que l'opérateur peut appliquer à une matrice densité). \mathcal{D} est très similaire à la catégorie \mathcal{B} (introduite pour les systèmes dissipatifs presque adiabatiques), les états mixtes remplaçant les états purs comme objets et les SLOCC remplaçant les opérateurs d'onde comme flèches (en fait, \mathcal{B} peut être vue comme l'une des strates de \mathcal{D}).

L'étude de la fibration associée à la théorie de jauge des phases géométriques est rendue délicate par la stratification, car G , H et K ne sont pas les mêmes d'une strate à l'autre. De plus, les multiples générateurs de phases géométriques sont associés à différentes fibrations. Il se présente ainsi [23] : un

2-fibré à gauche
$$\begin{array}{c} \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{D} \\ \Downarrow \\ \mathcal{S} \end{array}$$
 (avec $\mathcal{G} = (G, H, t, \alpha)$, t étant toujours l'injection canonique du sous-groupe

normal H dans G et α la conjugaison), un 2-fibré à droite
$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \Leftarrow \mathcal{K} \\ \Downarrow \\ \mathcal{D} \end{array}$$
 (avec $\mathcal{K} = (K, K, t, \alpha)$) et un

fibré composite
$$\begin{array}{c} H \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D}) \\ \downarrow \\ G/H \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D}) \\ \downarrow \\ \text{Obj}(\mathcal{S}) \end{array}$$
, tous trois inséparables car constitués des mêmes variétés/catégories. Il

s'en suit que la structure géométrique complète devrait être qualifiée de "bifibré catégorique composite

stratifié"
$$\begin{array}{c} \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{D} \Leftarrow \mathcal{K} \\ \downarrow \downarrow \\ \downarrow \mathcal{D} \\ \downarrow \downarrow \\ \mathcal{S} \end{array}$$
. Je ne vais pas expliciter ici en détails cette structure qui est assez complexe,

mais je voudrais pointer du doigt l'origine de cette complexité. La partie
$$\begin{array}{c} \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{D} \\ \Downarrow \\ \mathcal{S} \end{array}$$
 est très semblable au

2-fibré construit dans le chapitre précédent pour rendre compte des effets d'intrication dans les systèmes bipartites (où \mathcal{S} se substituerait à la catégorie de contrôle \mathcal{M}). D'ailleurs, les phases géométriques décrites comme des connexions des deux structures, sont définies de manière très similaire. Le fibré catégorique en

2-espace affine
$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \Leftarrow \mathcal{K} \\ \Downarrow \\ \mathcal{D} \end{array}$$
 a une structure très similaire à celui introduit chapitre 6 pour rendre compte de

la géométrie du transport presque adiabatique des systèmes dissipatifs. Enfin
$$\begin{array}{c} H \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D}) \\ \downarrow \\ G/H \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D}) \\ \downarrow \\ \text{Obj}(\mathcal{S}) \end{array}$$
 rappelle

le fibré composite introduit au chapitre 4 pour décrire la géométrie des systèmes quantiques asservis. La triple structure géométrique n'est donc que la manifestation de la présence conjointe et inséparable des phénomènes de distorsion, de dissipation et d'intrication pour les systèmes ouverts sur de grands environnements. Les connexions des différentes sous-structures définissent chacune une classe de Deligne de degré 3. La manière dont est construit la structure totale, comme l'internalisation (remplacement des variétés par des catégories) d'un empilement vertical (fibration composite) ou comme l'empilement horizontal (bifibration droite/gauche) d'un empilement vertical (fibration composite), laisse à penser que globalement la théorie de jauge est de degré de Deligne 4, ce qui est en accord avec les différents éléments de complexité : le contrôle de la dynamique, avec dissipation et distorsion/intrication (qui ne comptent comme un seul élément de complexité car engendré par le même terme dans l'équation de Lindblad ou

1. On omet d'indiquer des indices de strates dans les notations afin d'alléger l'écriture dans cette discussion.

sa purification). Je n'ai néanmoins pas à ce jour cherché à mettre en exergue la théorie de jauge totale, considérant que la complexité des théories de jauge de chaque sous-structure se suffisait déjà à elle-même.

En résumé

Le contrôle adiabatique ou la géométrisation du contrôle en général d'un système intriqué avec un grand environnement reste une question très délicate et demandant encore beaucoup de travail. La prise en compte et la compréhension des effets de contre-réaction, en particulier pour les systèmes non-Markoviens, reste quasiment totalement à faire. Celle-ci se heurte à la difficulté que représente la dérivation des équations maîtresses et à trouver un régime adiabatique satisfaisant pour retrouver de la contrôlabilité. Les résultats concernant une approche géométrique (hors approximation adiabatique) sont encourageants et semblent en accord avec la physique du problème (présence conjointe des divers processus), mais sa complexité risque d'entraver fortement son efficacité pratique.

Publications

Mes travaux concernant la géométrie des matrices densités et de leurs purifications, et les phases géométriques des systèmes ouverts peuvent être trouvés ci-dessous :

- [23] [D. Viennot](#), *Purification of Lindblad dynamics, geometry of mixed states and geometric phases*, J. Math. Phys. (soumise) [arXiv :1508.02279].

Conclusion et perspectives de la partie III

Le traitement adiabatique du contrôle des systèmes intriqués (avec un petit environnement) est finalement assez semblable au contrôle adiabatique d'un système isolé, si ce n'est le remplacement du corps des complexes par une C^* -algèbre. Ce remplacement n'est rien d'autre que la conséquence du passage des états purs (vecteurs d'un espace de Hilbert) à des états mixtes (matrices densités). Cette incrémentation des vecteurs vers des matrices, amène une incrémentation générale où les phases scalaires deviennent des phases à valeurs opérateurs, et où les valeurs propres deviennent des "valeurs propres non-commutatives" jouant le rôle d'Hamiltoniens effectifs. Lorsque l'environnement est grand, du fait de la concomitance des phénomènes d'intrication, de dissipation et de distorsion, la description adiabatique et la structure géométrique associée prennent une forme particulièrement complexe. Comme pour la dissipation, il est de plus difficile d'aborder le contrôle par une méthode totalement adiabatique car la non-linéarité de l'équation de Lindblad purifiée entrave la possibilité de définir proprement des états propres. Pour résoudre ce problème, on pourrait se contenter d'explorer l'approche adiabatique dans la représentation de Liouville. C'est ce que nous faisons avec B. Bellomo et D. Militello, mais la particularité de la structure de l'équation de Lindblad (dans l'approximation Markovienne) fait que la contrôlabilité sur les processus de relaxation et de décohérence est assez faible. Une meilleure approche pourrait être de traiter l'équation de Schrödinger du bipartite système-environnement sans la moindre approximation en essayant d'appliquer l'approche faite avec les petits environnements. Malheureusement, la difficulté liée à la dimension de l'environnement pourrait être très difficile à surmonter dans le cas général. De plus l'approche perturbative utilisée pour construire les valeurs propres non-commutatives ne fonctionnerait pas. En effet, pour que cette construction soit valide, il faut satisfaire à des clauses de non-résonances entre les transitions du système et celles de l'environnement. Or pour un petit environnement, dont on peut supposer qu'il présente un spectre purement ponctuel, cela peut être parfaitement satisfait, mais pour un grand environnement dont on suppose en général le spectre continu (ou quasi-continu), cela n'est pas le cas (tout un continuum de fréquences de transition est possible, induisant que les hypothèses de non-résonance ne peuvent être satisfaites). Pour aller plus loin, il semble nécessaire de développer des méthodes pour résoudre les équations aux valeurs propres non-commutatives².

2. NB : les mathématiciens se sont déjà penchés sur la question, malheureusement pas pour un $\mathcal{L}(\mathcal{H}_S) - C^*$ -module de la forme $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ mais plutôt pour $\mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \otimes \mathcal{H}_E$. Peut-être est-il possible de reconstruire la théorie avec ce C^* -module afin de pouvoir appliquer les résultats déjà développés en mathématiques ?

Chapitre 9

Conclusion

Le contrôle des systèmes quantiques ouverts est gêné par trois processus d'action de l'environnement : la distorsion du signal de contrôle, la dissipation des ondes quantiques, et l'intrication des états du système avec l'environnement. Ces processus induisent des phénomènes de relaxation, de décohérence ou de contre-réaction au contrôle dont il faut prendre compte pour résoudre les problèmes de contrôle.

Comme nous l'avons vu partie I, le bruit ajouté au signal de contrôle induit un processus de relaxation et de décohérence plus ou moins rapide vers l'état microcanonique quantique. Cette évolution s'oppose aux objectifs du contrôle. L'intrication avec un petit environnement ne génère qu'une gêne au contrôle, produisant de la décohérence déviant le résultat de la dynamique. Il est néanmoins difficile voire impossible d'éviter cette gêne comme nous l'avons vu dans l'exemple traité partie III. Par ailleurs, avec un grand environnement, la relaxation vers un état stationnaire "imposé" par ce dernier s'oppose très fortement à la réussite d'un contrôle qui ne consisterait pas à atteindre une déformation adiabatique de cet état (du moins dans le régime Markovien car dans le cas contraire il est permis d'espérer que des effets de mémoire augmentent la contrôlabilité bien que rendant l'établissement d'une stratégie de contrôle plus difficile). Dans le cas d'un processus de dissipation, nous avons vu partie II que le problème de contrôle se présentait de façon très similaire au cas des systèmes fermés. Néanmoins la dissipation peut conduire à ce que la réussite du contrôle soit au prix d'une très faible probabilité finale de survie du système. De plus, la compétition entre adiabaticité et dissipation, l'une tentant de maintenir les populations des états propres, et l'autre tendant à les faire disparaître, rend la stratégie du contrôle adiabatique peu fiable.

Nous avons néanmoins montré que des stratégies ou des situations spécifiques pouvaient permettre de dépasser en partie ces difficultés. Avec du bruit obéissant à une dynamique chaotique, la présence de l'horizon de cohérence que nous avons mis en évidence (partie I) permet de réaliser les objectifs du contrôle avant que le chaos ne vienne déstabiliser le système. Dans ce cadre nous avons étudié le contrôle de la transmission d'une excitation sur une chaîne de spins, la "poussant" dans le sens désiré et la "gelant" sur un site particulier. Les effets délétères de la dissipation étant amoindris voire supprimés si le contrôle consiste à maintenir le système sur l'état ou les états de moindre dissipation, les stratégies de contrôle reposant sur les résonances de largeur nulle (ZWR) se révèlent très efficaces (partie II). Nous avons appliqué de telles stratégies au refroidissement vibrationnel de molécules diatomiques et à l'inversion de population de deux états par encerclement d'un point exceptionnel (EP). Il est à noter que dans la représentation de Liouville de l'équation de Lindblad (pour un système ouvert sur un grand environnement), l'équivalent d'une ZWR est l'état stationnaire instantané. La stratégie de contrôle adiabatique avec ZWR correspond donc à la déformation adiabatique de cet état. Dans le cas d'une intrication avec un petit environnement, il est possible d'anticiper les effets de décohérence sur la variété de contrôle en étudiant les champs de fausse courbure et de cambrure adiabatiques comme nous l'avons fait partie III avec l'intrication de deux atomes à trois niveaux.

On remarquera que les systèmes dissipatifs ont un rôle singulier car l'on peut toujours se ramener à ce

type de systèmes par des changements de représentation :

$$\text{système bruité} \xrightarrow[\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes L^2(\Gamma, d\mu)]{\text{rep. Schrödinger-Koopman}} \text{système intriqué} \xrightarrow[\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes 2}]{\text{trace partielle \& rep. de Liouville}} \text{système dissipatif}$$

On peut néanmoins définir “directement” des systèmes dissipatifs par la construction d’Hamiltoniens effectifs non-auto-adjoints décrivant des pertes de “flux de quantique” de l’espace actif sur lequel est modélisé le système vers un extérieur non-modélisé. Le phénomène de résonance quantique est particulièrement bien mis en évidence avec ces Hamiltoniens effectifs. D’autres modèles plus exotiques d’Hamiltoniens non-auto-adjoints peuvent être proposés pour mettre en évidence des comportements physiques irréversibles inhabituels, comme avec le modèle de chaîne de spins chimérique évoqué partie I.

L’approche adiabatique du contrôle doit prendre en considération différents régimes. Un régime adiabatique fort pour lequel les poids des populations des états propres instantanés du système restent inchangés tout au long de la dynamique. Un régime adiabatique faible, où les poids des populations des états propres instantanés peuvent être mélangés en des instants bien précis correspondant à des passages rapides par des croisements de niveaux d’énergie (ou de quasi-énergie). Un régime presque adiabatique qui ressemble au régime faible mais avec des contaminations des populations les unes par les autres à cause d’effets de l’environnement hors de contrôle. Et enfin un régime adiabatique d’espace actif (que je n’ai fait qu’évoquer dans ce mémoire) où toutes les transitions non-adiabatiques et autres contaminations sont possibles à l’intérieur d’un sous-espace d’états propres instantanés (et donc une évolution absolument pas adiabatique dans ce sous-espace), mais sans effets non-adiabatiques avec l’extérieur de ce sous-espace (l’adiabaticité ne protégeant que le sous-espace actif des contaminations avec son supplémentaire). Avec l’affaiblissement du régime adiabatique, on gagne en contrôlabilité (il y a plus d’états cibles atteignables) mais on perd en robustesse (la fragilité du contrôle augmente) et on perd en lisibilité (il devient plus difficile de trouver le chemin de contrôle amenant à la cible). La table 9.1 résume les différents régimes adiabatiques avec leurs conditions. Les situations pour lesquelles on ne dispose pas (à ma connaissance) de théorème adiabatique apparaissent avec “?” dans le table 9.1. Dans le cas des systèmes intriqués, il est nécessaire de poser une condition de non-résonance entre les transitions du système et celles de l’environnement. Une telle condition n’est valide que pour des petits environnements et ne sera certainement pas satisfaite avec un grand. Je subodore que la levée de cette contrainte correspond au régime presque adiabatique similaire à celui des systèmes dissipatifs. D’une part parce que ces résonances vont fortement influencer la dynamique du système et certainement provoquer des contaminations des populations. D’autre part, parce que les systèmes intriqués avec un grand environnement obéissant à l’équation de Lindblad peuvent être traités comme des systèmes dissipatifs dans la représentation de Liouville. Mis à part le cas où l’on déforme adiabatiquement l’état stationnaire instantané (état le moins dissipatif dans la représentation de Liouville) qui doit correspondre à un régime adiabatique fort, tous les autres cas (avec régime transitoire de décohérence et de relaxation) se trouvent de facto dans le cas d’un régime presque adiabatique.

Comme évoqué à plusieurs reprises, les théories de jauge de haut degré (associées aux classe de De-ligne de degré au moins 3) ont surtout été étudiées dans le cadre des problèmes de gravitation quantique, et en particulier dans le cadre de la théorie des cordes. Des analogies entre cette théorie et les phases géométriques des systèmes ouverts se sont faites jour, comme généralisations de l’analogie bien connue entre la théorie des champs (avec monopôles magnétiques) et les phases géométriques des systèmes fermés (théories de jauge de degré 2). Ainsi dans la représentation de Schrödinger-Floquet (et par extension de dans celle de Schrödinger-Koopman pour les systèmes bruités) comme en théorie des cordes, l’espace-temps du contrôle se voit étendu par des extra-dimensions compactes et les phases géométriques se voient associées à un “champ de Neveu-Schwarz” abélien d’interaction avec une corde fermée virtuelle. L’approche adiabatique des systèmes bipartites repose sur une équation aux valeurs propres non-commutatives tout à fait similaire à celle modélisant dans le modèle matriciel de la théorie des cordes une D2-brane non-commutative (associée à l’environnement) reliée par une supercorde fermionique à une D0-brane (as-

TABLE 9.1 – Les conditions des différents régimes adiabatiques en fonction du type de système contrôlé.

	Systèmes fermés	Systèmes dissipatifs	Systèmes intriqués	Systèmes bruités
Régime adiabatique fort	<ul style="list-style-type: none"> pas de passage par des croisements. couplages non-adiabatiques négligeables. 	<ul style="list-style-type: none"> pas de passage par les EP. couplages non-adiabatiques négligeables. rester sur l'état le moins dissipatif. 	<ul style="list-style-type: none"> pas de passage par les croisements de \mathcal{S}. couplages non-adiabatiques de \mathcal{S} négligeables. pas de résonance entre les transitions de \mathcal{S} et \mathcal{E}. 	<ul style="list-style-type: none"> pas de passage par les croisements de quasiénergies. couplages non-adiabatiques entre états de quasiénergie négligeables. non-résonance entre transitions du système et exposants de Lyapunov au voisinage des points fixes du flot.
Régime adiabatique faible	<ul style="list-style-type: none"> passages rapides par des croisements coniques. couplages non-adiabatiques négligeables hors voisinage des croisements. 	<ul style="list-style-type: none"> passages rapides par des EP. couplages non-adiabatiques négligeables hors des voisinages des EP. rester sur le ou les états de dissipation minimale. 	<ul style="list-style-type: none"> passage rapide par les croisements coniques de \mathcal{S}. couplages non-adiabatiques de \mathcal{S} négligeables hors des voisinages des croisements. pas de passage par les croisements de \mathcal{E}. couplages non-adiabatiques de \mathcal{E} négligeables. pas de quasi-résonance entre les transitions de \mathcal{S} et \mathcal{E}. 	<ul style="list-style-type: none"> passages rapides par des croisements coniques de quasiénergie. couplages non-adiabatiques entre états de quasiénergie négligeables hors voisinage des croisements. non-résonance entre transitions du système et exposants de Lyapunov au voisinage des points fixes du flot.
Régime presque adiabatique		<ul style="list-style-type: none"> pas de passage par les EP. couplages non-adiabatiques négligeables. 	?	?
Régime adiabatique d'espace actif	<ul style="list-style-type: none"> pas de passage par les croisements entre intérieur et extérieur de l'espace actif. couplages non-adiabatiques négligeables entre intérieur et extérieur de l'espace actif. 	<ul style="list-style-type: none"> pas de passages par des EP entre intérieur et extérieur de l'espace actif. couplages non-adiabatiques négligeables entre intérieur et extérieur de l'espace actif. 	?	?

TABLE 9.2 – Différents problèmes de contrôle en fonction de leur degré de cohomologie de Deligne.

deg.	problème de contrôle	éléments de complexité
0	contrôle statique de systèmes fermés	\emptyset
1	contrôle quasistatique (Schrödinger-Floquet/Koopman)	bruit
	contrôle statique de systèmes dissipatifs	dissipation
	reservoir engineering	intrication
2	contrôle adiabatique de systèmes fermés	dynamique
3	contrôle adiabatique distordu	dynamique, bruit
	contrôle adiabatique de systèmes dissipatifs	dynamique, dissipation
	contrôle adiabatique avec intrication (petit environnement)	dynamique, intrication
4	contrôle adiabatique avec intrication (grand environnement)	dynamique, intrication, dissipation

sociée au système). Les phases géométriques à valeurs opérateurs de l'approximation adiabatique faible définissent un champ de cambrure adiabatique similaire à un "champ de Neveu-Schwarz" non-abélien. Enfin, les effets de la gravitation sur un qubit transporté dans un espace-temps courbe sont modélisés à l'aide d'un hamiltonien effectif non-auto-adjoint, les rapprochant d'effets dissipatifs. Cet Hamiltonien effectif est issu de diverses approximations semi-classiques sur la théorie des champs en espace-temps courbe. Il est possible d'émettre l'hypothèse qu'il puisse être également issu d'un modèle matriciel de la théorie des cordes dans une autre limite semi-classique en tant que valeur propre non-commutative de l'équation des D-branes. Les trois processus (distorsion, intrication et dissipation) sont donc liés d'une façon ou d'une autre à une partie de la théorie des cordes. Il pourrait être intéressant dans ce contexte de se demander si la présence conjointe des trois, comme avec un grand environnement, ne permettrait pas de construire une version suffisamment "complète" de la théorie. On pourrait alors peut-être disposer d'un "simulateur" de la gravité quantique à partir d'un système quantique ouvert, comme récemment le rayonnement Hawking d'un trou noir a été simulé à l'aide de condensats de Bose-Einstein atomiques [Ste16].

Bien que les trois processus soient assez différents, j'ai montré que le contrôle adiabatique des systèmes ouverts pouvait toujours être modélisé par une théorie de jauge de classe de Deligne de degré 3 (voir plus si plusieurs processus sont présents simultanément), voir table 9.2. Au final, on peut observer une certaine similitude dans la structure mathématique des trois processus, comme le montre la table 9.3. Les structures géométriques et catégoriques qui sous-tendent les théories de jauge ont été généralement obtenues par assemblage à partir des fonctions de 1 et 2-transition qui s'obtiennent de façon assez naturelle en considérant les questions de changements de "phase" dans les équations aux valeurs propres. Mais ces structures peuvent être construites de façon équivalente par empilement pour le cas de la distorsion et par internalisation pour les cas de la dissipation et de l'intrication. Cette différence dans la construction s'explique par le fait que le processus de distorsion est en amont du système (il affecte le signal de contrôle et non le système directement), alors que les processus de dissipation et d'intrication se déroulent au niveau du système. Reste un processus que je n'ai pas traité dans mes travaux, l'altération du feed-back du contrôle. Étant en aval du système, on peut penser que ce processus se rapproche de la distorsion du point de vue du contrôle adiabatique et des structures géométriques. La question du feed-back recouvre en réalité trois situations. La première est associée à une simple mesure du résultat après un contrôle en "boucle ouverte" (contrôle résolu *ab initio*). L'altération ne porte alors que sur la vérification du contrôle. La seconde est associée aux protocoles de contrôle avec post-sélection, où l'on contrôle simultanément plusieurs copies du système, pour ensuite ne conserver que celles dont le résultat d'une mesure satisfait à un critère de sélection. Dans ce cas l'altération porte sur la validité de la post-sélection. Enfin la troisième est associée au contrôle en "boucle fermée" (contrôle avec feed-back), où l'on fait des mesures sur le système pendant le déroulement du contrôle pour ajuster ce dernier "à la volée". L'altération porte alors sur la qualité de l'ajustement. Puisque dans ce cas l'altération de la mesure du feed-back engendre un mauvais ajustement du signal de contrôle, il faudra probablement considérer que l'altération induit une distorsion du signal de contrôle. Et comme le fait de faire des mesures sur le

TABLE 9.3 – Comparaison des formalismes de contrôle adiabatique pour les trois processus d'action de l'environnement, avec la structure de l'espace de Hilbert, l'Hamiltonien du système et l'Hamiltonien effectif (ou valeur propre non-commutative), la définition de l'état mixte, le générateur de la phase géométrique environnementale cachée dans la valeur propre effective (ou dans la quasi-énergie), le générateur de la phase géométrique du système (formes usuelle et effective), et les deux principaux groupes de jauge.

Distorsion	Dissipation	Intrication
\mathcal{H}_S (espace du système) $L^2(\Gamma, d\mu)$ (espace du bruit) $\mathcal{K} = \mathcal{H}_S \otimes L^2(\Gamma, d\mu)$	S_0 (espace actif) S_0^\perp (extérieur à l'espace actif) $\mathcal{H} = S_0 \oplus S_0^\perp$	\mathcal{H}_S (espace du système) \mathcal{H}_E (espace de l'environnement) $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$
$H_K = H - i\hbar F^\mu \partial_\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$	$H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ $H^{eff} = P_0 H \Omega \in \mathcal{L}(S_0)$ $\mathcal{L}(P) = H^{eff} P - P H^{eff \dagger}$	$H_{tot}(x) = H_S + H_E + H_{int} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{tot})$ $\mathfrak{E} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$ $\mathcal{L}(\rho_{\mathfrak{E}}) = \mathfrak{E} \rho_{\mathfrak{E}} - \rho_{\mathfrak{E}} \mathfrak{E}^\dagger$
$\rho = \mathbb{E}[\psi_\bullet\rangle\langle\psi_\bullet] = \text{tr}_{L^2(\Gamma)} \Psi\rangle\langle\Psi $	$P = \psi\rangle\langle\psi , \ \psi\ ^2 < 1$	$\rho = \text{tr}_E \Psi\rangle\langle\Psi = \ \Psi\ _*^2$
$\eta_a = F^\mu(\theta) \langle a(\theta), x \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} a(\theta), x \rangle$	$\eta_a = \frac{\langle a, x \Omega a, x \rangle}{\langle a, x a, x \rangle}$	$\eta_\alpha = \sum_{bc} \varepsilon \langle \alpha, x \frac{d}{dt} \alpha, x \rangle_\varepsilon b\alpha, x \rangle_{SS} \langle c\alpha, x + \dots$
$A_a = \langle a(\theta), x d a(\theta), x \rangle$	$A_a = \langle a^*, x d a, x \rangle$ $A_a^{eff} = \frac{\langle a, x d a, x \rangle}{\langle a, x a, x \rangle}$	$A_\alpha = \sum_{bc} \mathcal{S} \langle b\alpha, x d c\alpha, x \rangle_{\mathcal{S}} b\alpha, x \rangle_{\mathcal{S}} \langle c\alpha, x $ $\mathfrak{A}_{a\alpha} \langle a\alpha, x a\alpha, x \rangle_* = \langle a\alpha, x d a\alpha, x \rangle_*$
$U(1)$ (changements de phase) S (actions sur Γ) ^a	\mathbb{C}^* (changements de norme) \mathbb{C}^* (endomorphismes de rang 1)	G (transf. isospectrales et SLOCC sur \mathcal{S}) H, K (reconfigurations de \mathcal{E})

^a : $U(1)$ et \mathbb{Z}_2 dans les exemples traités, le cas général reste à développer.

système induit un changement d'états de celui-ci (par la règle de projection de Born), il y a aussi sans doute un phénomène de dissipation à prendre en compte. Le cas du contrôle en boucle fermée risque donc de présenter simultanément trois processus concomitants et inséparables car d'origine commune (une situation que l'on retrouve avec le contrôle d'un système en contact avec un grand environnement). L'étude de cette problématique pourrait constituer une suite pour ces travaux.

Outre les questions non-résolues et les travaux à poursuivre qui ont été listés dans les conclusions de chaque partie, d'importants points restent à développer. Avec ces structures mathématiques j'ai développé un cadre dans lequel le contrôle est décrit, mais des questions importantes n'ont pas été traitées : le niveau de contrôlabilité (c'est à dire la taille de l'espace des cibles qui peuvent être effectivement atteintes) et la robustesse du contrôle (la qualité du contrôle en fonction des déformations de la solution $t \mapsto x(t)$ dues aux erreurs expérimentales ou à l'idéalisation des modèles – un problème distinct de la distorsion du signal du contrôle, il s'agit ici de savoir ce qu'il se passe si le signal primaire de contrôle n'est pas tout à fait la bonne solution –). Dans le cas des systèmes fermés, en particulier dans le cadre des applications en informatique quantique, des résultats théoriques sur la contrôlabilité et la robustesse, prenant place dans la structure fibrée, ont été démontrés. On peut citer en particulier le théorème d'Ambrose-Singer-Chow-Rashevski pour les applications en HQC (calcul quantique holonomique) [Luc05]. Il serait intéressant de généraliser ce résultat aux fibrés catégoriques du contrôle des systèmes ouverts. Un autre point important est de développer des méthodes numériques pour résoudre en pratique un problème de contrôle (une question qui se rapproche des problématiques de contrôle optimal). Il serait sans doute nécessaire d'étudier cette question pour le cas des systèmes ouverts dans le cadre de la représentation en géométrie catégorique, en particulier si l'on doit renoncer à l'approche purement adiabatique (comme dans le cas d'un système ouvert sur un grand environnement ou d'une dissipation presque adiabatique où la non-linéarité de certaines équations empêchent une approche fondée sur des vecteurs propres instantanés).

Enfin sur une question plus mathématique, je m'interroge sur le rôle de la géométrie non-commutative dans le contrôle des systèmes ouverts, qui aurait été à première vue plus naturelle que la géométrie catégorique, car les structures de C^* -algèbre et de l'ensemble des matrices densités constituent le fondement de la topologie non-commutative (basiquement une matrice densité peut-être vue comme une

distribution sur la variété non-commutative associée à la C^* -algèbre des observables du système jouant le rôle de l'espace de phase quantique). Réciproquement, la théorie des catégories peut-elle fournir une notion de topologie sur une catégorie jouant le rôle d'espace de phase quantique? Dans l'état actuel des constructions que j'ai présentées ici, la géométrie est catégorique alors que les notions topologiques sont non-commutatives, il s'agit peut-être d'une situation naturelle, mais je n'ai pas d'argument physique, mathématique ou épistémologique à l'absence de rôle à la géométrie non-commutative et à une topologie catégorique¹.

1. la notion existe mathématique c'est celle de *topos*, certains auteurs ont étudié le lien entre les *topoi* et la mécanique quantique [Flo11], mais je n'ai pas eu le temps de creuser la question en détails pour savoir si cela pouvait avoir un lien avec les fibrés catégoriques.

Bibliographie

- [AA87] Y. Aharonov and J. Anandan. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 58 :1593, 1987.
- [ABLZ12] T. Albash, S. Boixo, D.A. Lidar, and P. Zanardi. Quantum adiabatic markovian master equation. *New J. Phys.*, 14 :123016, 2012.
- [ACJ05] P. Aschieri, L. Cantini, and B. Jurčo. Nonabelian bundle gerbes, their differential geometry and gauge theory. *Comm. Math. Phys.*, 254 :367, 2005.
- [ACK16] S. Abramsky, B. Coecke, and A. Kissinger. Categorical quantum mechanics. arXiv :0808.1023, 1510.05468, 1605.085617, 2008, 2016.
- [AH13] O. Andersson and H. Heydari. Operational geometric phase for mixed quantum states. *New J. Phys.*, 15 :053006, 2013.
- [Arn71] V.I. Arnolds. On matrices depending on parameters. *Russ. Math. Surv.*, 26 :29, 1971.
- [Aub17] L. Aubourg. *Contrôle et transmission de l'information dans les systèmes de spins*. PhD thesis, École doctorale Carnot-Pasteur, Université de Bourgogne-Franche-Comté, 2017.
- [BCCS12] U. Boscain, F. Chittaro, T. Chambrion, and M. Sigalotti. Adiabatic control of schrödinger equation via conical intersections of the eigenvalues. *IEEE Trans. Aut. Control*, 57 :1970, 2012.
- [BD12] D. Berenstein and E. Dzienkowski. Matrix embeddings on flat r^3 and the geometry of membranes. *Phys. Rev. D*, 86 :086001, 2012.
- [BDL12] L. Borsten, M.J. Duff, and P. Lévy. The black-hole/qubit correspondance : an up-to-date review. *Class. Quant. Gravity*, 29 :224008, 2012.
- [Ber84] M.V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. R. Soc. A*, 392 :45, 1984.
- [BFK06] J. Berkovitz, R. Frigg, and F. Kronz. The ergodic hierarchy, randomness and hamiltonian chaos. *History and Philosophy of Modern Physics*, 37 :661, 2006.
- [Bit96] M. Bitbol. *Mécanique quantique, une introduction philosophique*. Flammarion, Paris, 1996.
- [BM94] J.-L. Brylinski and D.A. McLaughlin. The geometry of degree 4 characteristic classes and line bundles on loop spaces. *Duke Math. J.*, 75 :603, 1994.
- [BMM12] M. Budišić, R. Mohr, and I. Mezić. Applied koopmanism. *Chaos*, 22 :047510, 2012.
- [BP02] H.-P. Breuer and F. Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press, Oxford, 2002.

- [BP03] Y. Benoist and F. Paulin. Systèmes dynamiques élémentaires. cours de l'ENS, 2003.
- [BR02] E. Brown and H. Rabitz. Some mathematical and algorithmic challenges in the control of quantum dynamics phenomena. *J. Math. Chem.*, 31 :17, 2002.
- [BS04] J. Baez and U. Schreiber. Higher gauge theory : 2-connections on 2-bundles. arXiv :hep-th/0412325, 2004.
- [BW15] J.C. Baez and D.K. Wise. Teleparallel gravity as higher gauge theory. *Commun. Math. Phys.*, 333 :153, 2015.
- [Béz02] J.-Y. Béziau. La théorie des ensembles et la théorie des catégories : présentation de deux sœurs ennemies. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, IX :45, 2002.
- [CCRR99] A.S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, and M. Rinaldi. Loop and path spaces and four-dimensional bf theories : connections, holonomies and observables. *Commun. Math. Phys.*, 204 :493, 1999.
- [CLS10] S. Chatterjee, A. Lahiri, and A.N. Sengupta. Parallel transport over path spaces. *Rev. Math. Phys.*, 22 :1033, 2010.
- [CM15] F.C. Chittaro and P. Mason. Approximate controllability via adiabatic techniques for the three-inputs controlled schrödinger equation. arXiv :1502.06814, 2015.
- [Con90] A. Connes. *The interface of mathematics and particle physics*. Clarendon press, Oxford, 1990.
- [DD63] J. Dixmier and A. Douady. Champs continus d'espaces hilbertiens et de c^* -algèbres. *Bull. Soc. Math. France*, 91 :227, 1963.
- [d'E02] B. d'Espagnat. *Traité de physique et de philosophie*. Fayard, Paris, 2002.
- [DR92] J. Dittmann and G. Rudolph. A class of connections governing parallel transport along density matrices. *J. Math. Phys.*, 33 :4148, 1992.
- [Flo83] G. Floquet. Sur les equations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales de l'ENS*, 12 :47, 1883.
- [Flo11] C. Flori. Review of the topos approach to quantum theory. arXiv : 1106.5660, 2011.
- [FSM05] I. Fuentes-Schuller and R.B. Mann. Alice falls into a black hole : entanglement in noninertial frames. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :120404, 2005.
- [GH78] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley, New York, 1978.
- [GHV72] W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone. *Connections, curvature and cohomology*. Academic Press, New York, 1972.
- [Gir71] J. Giraud. *Cohomologie non-abélienne*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [GJ03] S. Guérin and H.R. Jauslin. Control of quantum dynamics by laser pulses : adiabatic floquet theory. *Adv. Chem. Phys.*, 125 :147, 2003.
- [GS12] A. Gabin and L.F. Santos. Quantum chaos : an introduction via chains of interacting spins $\frac{1}{2}$. *Am. J. Phys.*, 80 :246, 2012.
- [Haa91] F. Haake. *Quantum signatures of chaos*. Springer, Berlin, 1991.

- [Hea01] R. Healey. On the reality of gauge potentials. *Philosophy of Science*, 68 :432, 2001.
- [HT86] M. Henneaux and C. Teitelboim. p-form electrodynamics. *Foundations of Physics*, 16 :593, 1986.
- [IdG07] J.M. Isidro and M.A. de Gosson. Abelian gerbes as gauge theory of quantum mechanics on phase space. *J. Phys. A*, 40 :3549, 2007.
- [JDLLA13] A. Jaouadi, M. Descouter-Lecomte, R. Lefebvre, and O. Atabek. Signatures of exceptional points in the laser control of non-adiabatic vibrational transfer. *J. Phys. B*, 46 :145402, 2013.
- [JK03] G. Jolicard and J.P. Killingbeck. The bloch wave operator : generalizations and applications - part 1 - the time dependent case. *J. Phys. A*, 36 :R411, 2003.
- [Joh02] S. Johnson. *Constructions with bundle gerbes*. PhD thesis, University of Adelaide, 2002.
- [Joo07] E. Joos. Decoherence : an introduction. *Physics and Philosophy*, 010 :1863, 2007.
- [Joy07] A. Joye. General adiabatic evolution with a gap condition. *Commun. Math. Phys.*, 275 :139, 2007.
- [Kal07] J. Kalkkinen. Topological quantum field theory on non-abelian gerbes. *J. Geom. Phys.*, 57 :505, 2007.
- [Kat50] T. Kato. On the adiabatic theorem of quantum mechanics. *J. Phys. Soc. Japan*, 5 :435, 1950.
- [KJ03] J.P. Killingbeck and G. Jolicard. The bloch wave operator : generalizations and applications - part 1 - the time independent case. *J. Phys. A*, 36 :R105, 2003.
- [KSL07] J. Karthik, A. Sharma, and A. Lakshminarayan. Entanglement, avoid crossing and quantum chaos in an ising model with tilted magnetic field. *Phys. Rev. A*, 75 :022304, 2007.
- [Kur75] Y. Kuramoto. Self entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In H. Araki, editor, *International symposium on mathematical problems in theoretical physics*, page 420, Berlin, 1975. Springer-Verlag.
- [LC14] T.E. Lee and C.-K. Chan. Heralded magnetism in non-hermitian atomic systems. *Phys. Rev. X*, 4 :041001, 2014.
- [LDK⁺05] J. Lages, V.V. Dobrovitski, M.I. Katsnelson, H.A. De Raedt, and B.N. Harmon. Decoherence by a chaotic many-spin bath. *Phys. Rev. E*, 72 :026225, 2005.
- [LGSX09] C. Laurent-Gengoux, M. Stiénon, and P. Xu. Non abelian differential gerbes. *Adv. Math.*, 220 :1357, 2009.
- [LJK13] A. Leclerc, G. Jolicard, and J.P. Killingbeck. Discussion of the adiabatic hypothesis in control schemes using exceptional points. *J. Phys. B*, 46 :145503, 2013.
- [LM94] A. Lasota and M.C. Mackey. *Chaos, fractals and noise*. Srpinger, New York, 1994.
- [LRM14] T.E. Lee, F. Reiter, and N. Moiseyev. Entanglement and spin squeezing in non-hermitian phase transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :250401, 2014.
- [Luc05] D. Lucarelli. Control aspects of holonomic quantum computation. *J. Math. Phys.*, 46 :052103, 2005.

- [LZB⁺10] M. Lapert, Y. Zhang, M. Braun, S.J. Glasery, and D. Sugny. Singular extremals for the time-optimal control of a dissipative spin $\frac{1}{2}$ particle. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :083001, 2010.
- [Mac69] S. MacLane. *Categories for the working mathematician*. Springer, New York, 1969.
- [Mac03] M. Mackaay. A note on the holonomy of connections in twisted bundles. *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.*, 44 :39, 2003.
- [McC04] J.M. McCaw. *Quantum chaos : spectral analysis of Floquet operators*. PhD thesis, University of Melbourne, 2004.
- [Moi11] N. Moiseyev. *Non-hermitian quantum dynamics*. Cambridge university press, Cambridge, 2011.
- [MS90a] B. Milek and P. Seba. Singular continuous quasienergy spectrum in the kicked rotator with separable perturbation : possibility of the onset of quantum chaos. *Phys. Rev. A*, 42 :3213, 1990.
- [MS90b] D.J. Moore and G.E. Stedman. Non-adiabatic berry phase for periodic hamiltonians. *J. Phys. A*, 23 :2049, 1990.
- [MS13] J. Maldacena and L. Susskind. Cool horizons for entangled black hole. *Prog. Phys.*, 61 :781, 2013.
- [MT07] M. Miyamoto and A. Tanaka. Cheon's anholonomies in floquet operators. *Phys. Rev. A*, 76 :042115, 2007.
- [Mur96] M.K. Murray. Bundle gerbes. *J. Lond. Math. Soc.*, 54 :403, 1996.
- [Nak90] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Institute of Physics Publishing, Bristol, 1990.
- [NW13] T. Nikolaus and K. Waldorf. Four equivalent versions of nonabelian gerbes. arXiv :1103.4815, 2013.
- [PA15] M.J. Panaggio and D.M. Abrams. Chimera states : coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearty*, 28 :R67, 2015.
- [PCZ96] J.F. Poyatos, J.I. Cirac, and P. Zoller. Quantum reservoir engineering with laser cooled trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :4728, 1996.
- [PTW12] M.C. Palmer, M. Takahashi, and H.F. Westman. Localized qubits in curved spacetimes. *Annals of Physics*, 327 :1078, 2012.
- [RF77] V. Rohlin and D. Fuchs. *Premiers cours de topologie, chapitres géométriques*. Mir, Moscou, 1977.
- [RV15] C. Rovelli and F. Vidotto. *Covariant loop quantum gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [Sar00] S. Sardanashvily. Classical and quantum mechanics with time-dependent parameters. *J. Math. Phys.*, 41 :5245, 2000.
- [SB97] M. Shapiro and P. Brumer. Quantum control of chemical reactions. *J. Chem. Soc. Faraday Trans.*, 93 :1263, 1997.
- [Sim83] B. Simon. Holonomy, the quantum adiabatic theorem and berry's phase. *Phys. Rev. Lett.*, 51 :2167, 1983.

- [SJW07] O. Sapin, H.R. Jauslin, and S. Weigert. Upper quantum lyapunov exponent and anosov relations for quantum system driven by a classical flow. *J. Stat. Phys.*, 127 :699, 2007.
- [SKA⁺05] D. Sugny, A. Keller, O. Atabek, D. Daems, C.M. Dion, S. Guérin, and H.R. Jauslin. Laser control of the optimal evolution of pure quantum states. *Phys. Rev. A*, 71 :063402, 2005.
- [Smo07] L. Smolin. *Rien ne va plus en physique*. Dunod, Paris, 2007.
- [SPE⁺00] E. Sjöqvist, A.K. Pati, A. Ekert, J.S. Anandan, M. Ericsson, D.K.L. Oi, and V. Vedral. Geometric phases for mixed states in interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :2845, 2000.
- [Ste16] J. Steinhauer. Observation of hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole. *Nature Physics*, 12 :959, 2016.
- [Teu03] S. Teufel. *Adiabatic perturbation theory in quantum dynamics*. Srpinger, Berlin, 2003.
- [Uhl86] A. Uhlmann. Parallel transport and quantum holonomy along density operators. *Rep. Math. Phys.*, 24 :229, 1986.
- [Vie05] D. Viennot. Principal bundle structure of quantum adiabatic dynamics with a berry phase which does not commute with the dynamical phase. *J. Math. Phys.*, 46 :072102, 2005.
- [Woc11] C. Wockel. Principal 2-bundles and their gauge 2-group. *Forum Math.*, 23 :565, 2011.
- [WZ84] F. Wilczek and A. Zee. Appearance of gauge structure in simple dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 52 :2111, 1984.
- [Zwi09] B. Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.