

# Chaos et chimères quantiques

David Viennot

Institut UTINAM (UMR CNRS 6213)



- 1 Chaos classique
  - Définition du chaos classique
  - L'exposant de Lyapunov

# Définition du chaos classique

## Définition

*Un système dynamique classique est dit chaotique si :*

- *il présente la propriété de sensibilité aux conditions initiales (SCI).*
- *il est topologiquement mélangeant.*

De plus les systèmes chaotiques dissipatifs présentent des attracteurs étranges (avec une structure fractale) et les systèmes chaotiques hamiltoniens présentent des trajectoires ergodiques en dehors des îlots de stabilité.

# SCI et mélange

Exemple avec l'application du chat d'Arnold

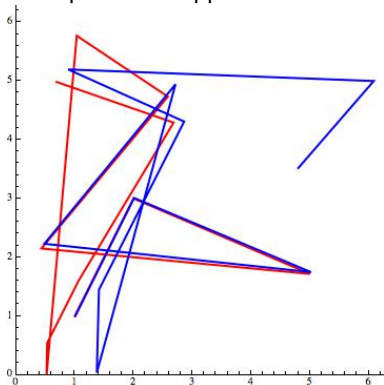
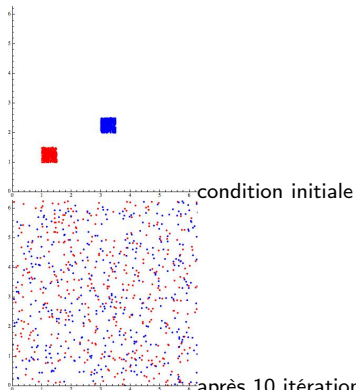
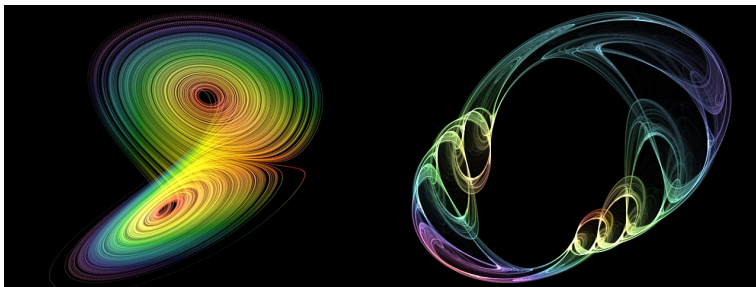


Illustration de la sensibilité aux conditions initiales



condition initiale  
après 10 itérations  
illustration du mélange topologique

# Attracteurs étranges

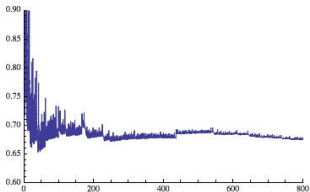


# L'exposant de Lyapunov

$$\begin{aligned}\lambda &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t} \ln \operatorname{tr}(J(t)^\dagger J(t)) \\ &= \sup_{v \in T\Gamma} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|d_v \Phi_t(x_0)\|_{\mathbb{R}^n}\end{aligned}$$

où  $\Phi_t : \Gamma \rightarrow \Gamma$  est le flot ( $\Gamma = \mathbb{R}^n$  est l'espace de phase),  $(d_v \Phi)^j = v^i \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}$ ,  
 $J(t)$  est la matrice Jacobienne de  $\Phi_t$  au point  $x(t) = \Phi_t(x_0)$

$\lambda > 0$  est une mesure du chaos (si la dynamique est bornée).

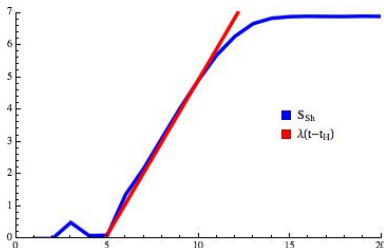


exemple avec le modèle Lorenz.

$$\|\Phi_t(x_0 + \delta x) - \Phi_t(x_0)\| \sim e^{\lambda t} \|\delta x\|$$

# Entropie et exposant de Lyapunov

Exemple avec l'application du chat d'Arnold :



$$S_{Sh} = - \sum_{ij} p_{ij} \ln p_{ij}$$

$p_{ij}$  nombre de copies du système se trouvant dans le micro-état  $[i\epsilon, (i+1)\epsilon] \times [j\epsilon, (j+1)\epsilon]$  (toutes les copies se trouvant initialement dans un même micro-état).

## 2 Chaos quantique

- Définition du chaos quantique
- Distribution des espacements de niveaux
- Caractéristique directe du chaos quantique ?



# Définition du chaos quantique

Pas de définition claire universelle !

La SCI et le mélange ne peuvent être généralisés à la physique quantique (incertitudes de Heisenberg, chat de Schrödinger, théorie linéaire).

Critères par défaut :

- Ressemblance de la distribution de quasi-probabilité quantique  $|\langle q, p | \psi \rangle|^2$  ( $|q, p\rangle$  état cohérent) avec le portrait de phase classique d'un système chaotique.
- Le probabilité de survie d'un "état chaotique" décroît globalement vers 0 mais avec des résurgences erratiques de probabilités non-nulles.
- Le système présente du spectre singulièrement continu fractal.

# Distribution des espacements de niveaux

Difficile de prouver ou d'évaluer numériquement le caractère singulièrement continu du spectre, mais la propriété d'auto-similarité du spectre singulièrement continu fractal conduit à postuler un critère sur la distribution des espacements de niveaux :

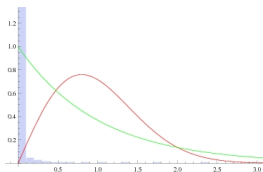
- Spectre "régulier" (pur point/absolument continu) : distribution ponctuelle  $\eta(s) = \sum_i \delta(s - s_i)$
- Spectre aléatoire sans corrélation : loi de Poisson  $\eta(s) = e^{-s}$
- Spectre singulièrement continu fractal : loi de Wigner  $\eta(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4} s^2}$

# Distribution des espacements de niveaux : exemples

$$H = \sum_n \frac{-1}{n^2} |n\rangle\langle n|$$

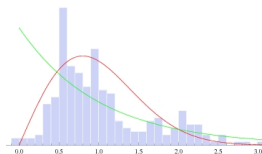
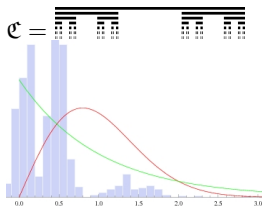
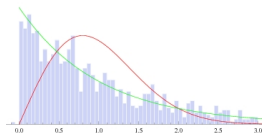
$$H = \sum_n \alpha_n |n\rangle\langle n|$$

$$H = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \alpha |\alpha\rangle\langle \alpha|$$



$$\mathbb{P}(\alpha \in [a, b]) = b - a$$

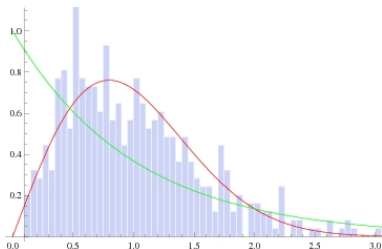
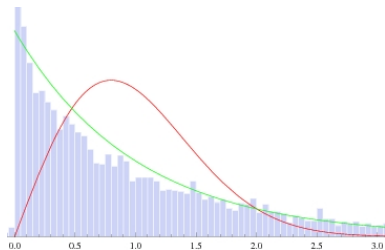
$$\forall [a, b] \subset [0, 1]$$



## Distribution des espacements de niveaux : chaînes de spins

$$H = \frac{J_{xy}}{4} \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_x^i \otimes \sigma_x^{i+1} + \sigma_y^i \otimes \sigma_y^{i+1}) + \frac{J_z}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_z^i \otimes \sigma_z^{i+1}$$

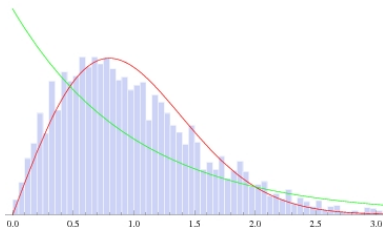
$$H = \frac{\omega_d}{2} \sigma_z^{N/2} + \frac{J_{xy}}{4} \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_x^i \otimes \sigma_x^{i+1} + \sigma_y^i \otimes \sigma_y^{i+1}) + \frac{J_z}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_z^i \otimes \sigma_z^{i+1}$$



# Distribution des espacements de niveaux : verre de spins

$$H = \frac{1}{2} \sum_i (\omega_x^i \sigma_x^i + \omega_z^i \sigma_z^i) + \frac{1}{4} \sum_{i,j} J_x^{ij} \sigma_x^i \otimes \sigma_x^j$$

$\omega_x^i$ ,  $\omega_z^i$  et  $J_x^{ij}$  tirés de manière aléatoire uniforme.



# Exposant de Lyapunov quantique ?

$$\lambda_q = \sup_{v \in \text{dera}} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\nabla_v(U(t, 0)AU(t, 0)^\dagger)\|$$

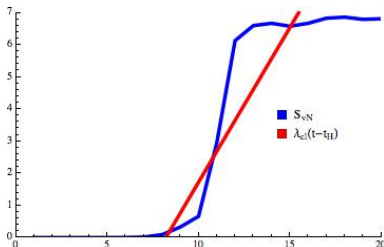
avec  $A \in \mathfrak{a}$ ,  $\nabla_v$  la dérivée directionnelle au sens de la géométrie non-commutative,  $\mathfrak{a}$  étant une algèbre d'observables et  $\text{dera}$  l'algèbre de ses dérivations.

- Si  $\mathfrak{a} = \mathcal{C}^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$ , alors  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Rightarrow \nabla_v f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$  (la définition coïncide avec celle utilisée en mécanique classique).
- Si  $\mathfrak{a} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , alors  $\nabla_B A = [B, A]$  ( $A, B \in \mathfrak{a}$ ).
- Si  $\mathfrak{a} = \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  ( $\dim \mathcal{H} = n < +\infty$ ), alors  $\lambda_q = 0$ .
- Si  $\mathfrak{a} = \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{C}^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$  (système quantique de dimension finie asservi à un système dynamique classique) alors  $\lambda_q = \lambda_{cl}$ .

H.R. Jauslin, O. Sapin & S. Guérin, *J. Math. Phys.* **45**, 4377 (2004).

# Problème

Exemple d'un spin asservi à une application du chat d'Arnold :



$$S_{vN} = -\text{tr}(\rho \ln \rho)$$

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \text{ (pour } N \text{ copies du système).}$$

Les indices numériques montrent que l'on devrait avoir  $\lambda_q^{\text{pertinent}} > \lambda_{cl}$ .

# Questions ouvertes

- Définition pertinente de l'exposant de Lyapunov quantique ?
- Y a-t-il un équivalent quantique aux attracteurs étranges dans le cas de systèmes quantiques ouverts ?
- Si l'on admet l'échec de la topologie non-commutative pour ce problème, y a-t-il une généralisation de la topologie pour définir des équivalents des propriétés de SCI et de mélange en mécanique quantique ?



### 3 Les chimères classiques

- Définition d'un état de chimère
- Propriétés des états de chimère

# Le modèle de Kuramoto

Chaîne de  $N$  oscillateurs couplés en phase :

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i - \frac{\nu}{2M} \sum_{j=i-M}^{i+M} \sin(\theta_i(t) - \theta_j(t) + \alpha)$$

avec  $\theta_i$  la phase du  $i$ -ème oscillateur,  $\omega_i$  sa fréquence naturelle d'oscillation,  $\nu$  l'amplitude du couplage,  $M$  la distance de couplage, et  $\alpha$  un déphasage constant.

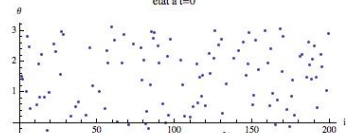
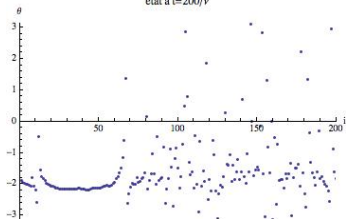
# Définition d'un état de chimère

## Définition

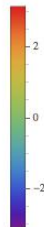
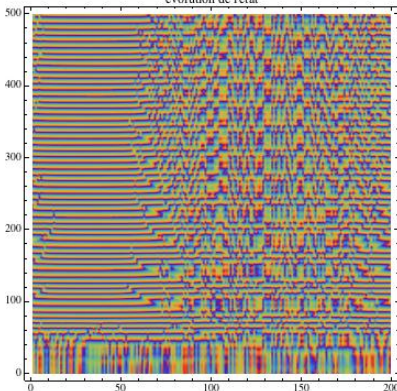
*Une chimère est un état (méta)stable d'un système d'oscillateurs couplés où coexistent une phase cohérente ordonnée et une phase incohérente désordonnée, sans que dans une durée courte le désordre ne contamine tout l'ensemble ni que celui-ci ne s'ordonne complètement.*

# États de chimère dans le modèle de Kuramoto

$$N = 200, \omega_i = 0, M = 60, \alpha = 1.46.$$

état à  $t=0$ état à  $t=200/\nu$ 

évolution de l'état



# Stabilité

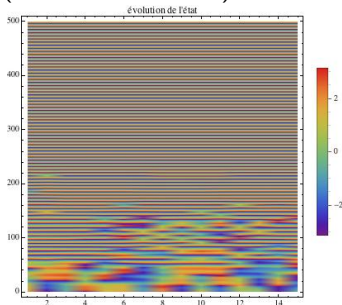
Les chimères sont des états métastables (longue durée de vie) avant un collapse vers un état totalement ordonné, si  $N \rightarrow +\infty$  les états de chimère sont parfaitement stables (durée de vie infinie).

Régime permanent ordonné

Collapse

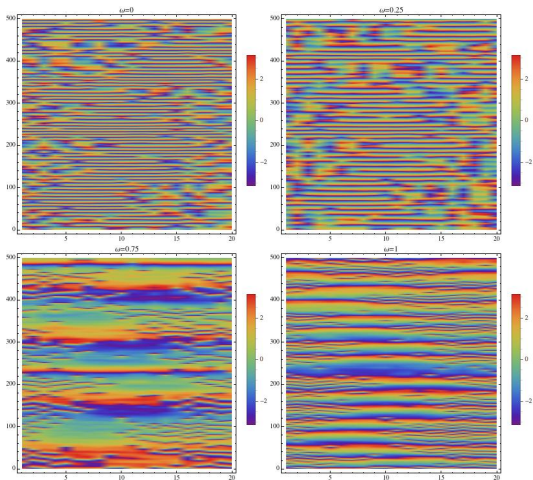
Régime métastable de chimère

Régime transitoire



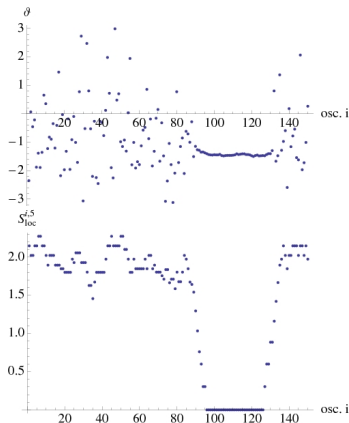
$$N = 15, \omega_i = 0, M = 5, \alpha = 1.46$$

# Effet de la fréquence d'oscillation



$$N = 20, M = 6, \alpha = 1.46$$

# Désordre et chaos



$N = 150$ ,  $\omega_i = 0$ ,  $M = 45$ ,  $\alpha = 1.46$

Les oscillations dans la phase incohérente désordonnée sont chaotiques avec un exposant de Lyapunov  $0 < \lambda \leq 0.1$  ( $N \leq 40$ ).

M. Wolfrum & O.E. Omel'chenko, *Phys. Rev. E* **84**, 015201(R) (2011).

$$S_{loc}^{i,R} = - \sum_n p_n^{i,R} \ln p_n^{i,R}$$

où  $p_n^{i,R}$  est la fraction des  $2R+1$  oscillateurs autour du  $i$ -ème se trouvant dans le micro-état  $[n\epsilon, (n+1)\epsilon] \subset [0, 2\pi]$ .

- 4 Les chimères quantiques
- Modèle de chimère quantique ?
  - États de chimères quantiques
  - Chaos quantique dans les chimères ?



# Généraliser les états de chimère en mécanique quantique

- Étudier une version purement quantique du modèle de Kuramoto dont les états propres auraient des propriétés chimériques.
- Système qui à la limite semi-classique tend vers le modèle de Kuramoto, les états de chimères étant révélés par la moyenne de l'opérateur densité dans un état cohérent ou par une approximation WKB.

V.M. Bastidas et al., *Phys. Rev. E* **92**, 062924 (2015). I.H. de Mendoza et al., *Phys. Rev. E* **90**, 052904 (2014).

- Asservir une chaîne de spins à un modèle de Kuramoto pour essayer de transférer les propriétés chimériques à la chaîne.
- Étudier un modèle purement quantique ayant une structure mathématique proche du modèle de Kuramoto dont les états propres auraient des propriétés chimériques.

Réf. : D. Viennot & L. Aubourg, *Phys. Lett. A* **380**, 678 (2016).

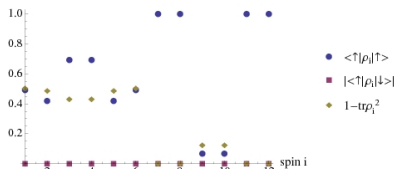
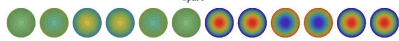
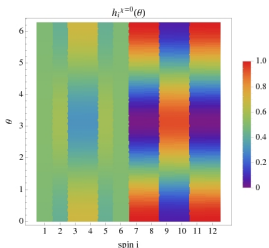
# Modèle de chaîne de spins structurellement proche du modèle de Kuramoto

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\hbar\omega_i}{2} \sigma_z^i + \frac{\hbar\nu \sin \alpha}{2M} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=i-M \\ j \neq i}}^{i+M} (\sigma_+^i \otimes \sigma_+^j + \sigma_z^i \otimes \sigma_z^j)$$

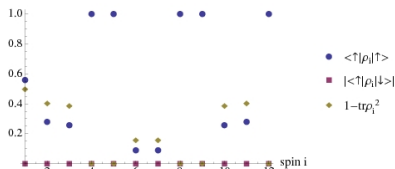
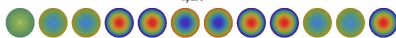
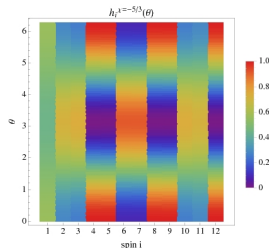
$$H \neq H^\dagger \Rightarrow \begin{cases} H|\chi_n\rangle = \chi_n|\chi_n\rangle \\ H^\dagger|\chi_n^\#\rangle = \chi_n|\chi_n^\#\rangle \end{cases}$$

Les vecteurs propres droits et gauches sont différents (nécessaire pour avoir des versions quantiques d'états métastables).

## Chimères quantiques

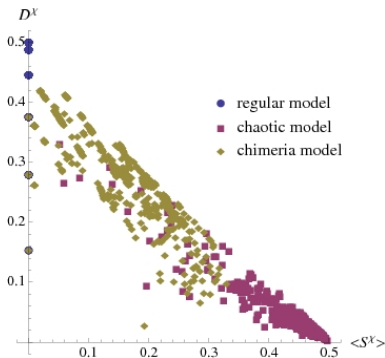


$$N = 12, M = 3, \omega = 1, \alpha = \frac{\pi}{2}, \chi = 0$$



$$N = 12, M = 3, \omega = 1, \alpha = \frac{\pi}{2}, \chi = -\frac{1}{3}$$

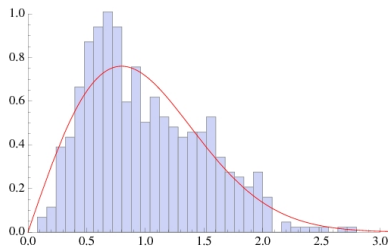
# Désordre vs intrication dans les chaînes de spins



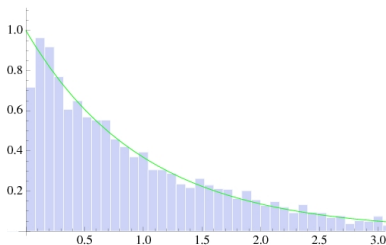
$$\langle S^X \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^X \quad D^X = 1 - \text{tr} \langle \rho^X \rangle^2 - \langle S^X \rangle$$

$$\langle \rho^X \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i^X \quad \rho_i^X = \text{tr}_{\neq i} |\chi\rangle \langle \chi| \quad S_i^X = 1 - \text{tr}(\rho_i^X)^2$$

# Distribution des espacements de niveaux



$$N = 12, M = 3, \omega_i = 0.2 + i\frac{0.4}{N}, \\ \alpha = 1.46$$



$$N = 12, M = 3, \omega_i = 0.2 + \\ 0.4 \sin\left(\frac{i^2 \pi}{2N^2}\right), \alpha = 1.46$$

# Questions ouvertes

- Modèle plus simple ? Plus réaliste expérimentalement ?
- Plus besoin de la non-hermiticité avec une chaîne infinie ?