

Electromagnétisme

David Viennot

10 juillet 2013

Table des matières

1	Géométrie des champs électrostatiques et magnétostatiques	5
1.1	Quel est le rôle physique d'un champ ?	5
1.2	Géométrie	6
1.2.1	Rappels de géométrie vectorielle	6
1.2.2	Parité, pseudovecteurs et pseudoscalaires	9
1.2.3	Formulation locale/différentielle vs globale/intégrale	12
1.3	Équations des champs stationnaires	15
1.3.1	Lois des champs et des déplacements dans le vide	15
1.3.2	Symétries et champs	24
1.3.3	Invariance de jauge	26
1.3.4	Champs et potentiels en fonction des sources et conditions aux interfaces	28
1.3.5	Énergies électrostatique et magnétostatique	30
2	Électrostatique et magnétostatique dans les milieux matériels	33
2.1	Dipôles et moments dipolaires	33
2.2	Propriétés électriques des matériaux	35
2.2.1	La polarisation	35
2.2.2	Excitation électrique	36
2.2.3	Milieux paraélectriques	39
2.3	Propriétés magnétiques des matériaux	41
2.3.1	L'aimantation	41
2.3.2	Excitation magnétique	43
2.3.3	Ferromagnétisme	45
3	Dynamique des champs électromagnétiques	47
3.1	Equations de Maxwell	47
3.1.1	Les équations de Maxwell et courants de déplacement	47
3.1.2	Invariance de jauge des équations de Maxwell	50
3.1.3	Énergie électromagnétique	52
3.2	Ondes électromagnétiques	53
3.2.1	Propagation des ondes électromagnétiques dans un MLHI non-dispersif	53
3.2.2	Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux dispersifs	57
3.2.3	Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux dissipatifs	58
3.3	Électromagnétisme et relativité	59
3.3.1	Incompatibilité de l'électromagnétisme avec la mécanique newtonienne	59
3.3.2	Covariance	60
3.3.3	Formulation covariante de l'électromagnétisme	61
3.4	Invariance de jauge électromagnétique et mécanique quantique	62
3.4.1	Invariance de jauge en dynamique quantique	62
3.4.2	L'effet Aharonov-Bohm et interprétation physique du magnétisme	63

Chapitre 1

Géométrie des champs électrostatiques et magnétostatiques

1.1 Quel est le rôle physique d'un champ ?

La notion de force a mis longtemps à être conceptualisée en physique. Elle était utilisée implicitement dès l'antiquité (avec par exemple la notion de poids chez Archimède), mais sans être clairement définie. Cette notion doit sa définition à Isaac Newton, dans *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Principes mathématiques de la philosophie naturelle) : la force est une action mécanique capable de créer une accélération. Ainsi les forces sont l'origine **de la mise**¹ en mouvement. Cette notion ne pose pas de problèmes majeurs pour les forces de contact (réaction de support solide, force de frottement, ...). Deux corps en contact agissent et réagissent l'un sur l'autre par l'intermédiaire de forces. Mais dans le même ouvrage, Newton introduisit la loi de gravitation universelle faisant intervenir la force :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

Suivant cette loi, les corps semblent agir "à distance" l'un sur l'autre. Ainsi, la théorie de la gravitation de Newton semble non-locale : un objet non-présent en un lieu géographique donné a une influence sur ce qui se passe en ce lieu. Cette non-localité de l'interprétation de la théorie de la gravitation était un problème majeur dans la compréhension physique du phénomène. Elle fut même à l'origine d'un profond rejet de sa théorie à l'époque de la publication des Principia, en particulier de la part de Christian Huygens. La physique de l'époque était en effet encore influencée par les théories aristotéliennes considérant l'origine de mouvement comme un état transitoire permettant aux choses de revenir vers leur "état naturel", mais surtout par la philosophie de René Descartes et sa conception mécaniste de la nature. Dans cette conception, la matière est inerte et le mouvement est régi par les lois simples (et locales) des chocs et de la pression. Beaucoup ont alors considéré la loi de l'attraction universelle comme une résurgence de l'occultisme, ce qui n'est pas tout à fait faux. En effet, Newton pratiquait en secret l'alchimie, et son concept d'interaction à distance n'est pas sans rappeler la notion "d'affinité" que l'on trouve en alchimie. Par la suite, l'étude de l'électricité et du magnétisme, introduisit les autres forces agissant à distance que sont la force de Lorentz (électrique) et la force de Laplace (magnétique). Une interprétation moins problématique fût proposée par Michael Faraday, qui introduisit les "lignes de force". L'idée est que les objets chargés électriquement, sont "reliés" par des "lignes invisibles" qui transmettent la force. On pourrait faire l'analogie avec la tension d'un fil. Lorsqu'on tire sur un fil attaché à une masse, on agit directement sur le bout du fil (par une force de contact), le bout du fil agit sur le "petit morceau" de fil qui lui est contigu, ce petit morceau agit sur le petit morceau à côté, et ainsi de proche en proche, la force est transmise **localement** jusqu'à la masse. Les lignes de forces sont sensées agir de façon analogues, en transmettant de proche en proche l'interaction. Cette idée fût bien sûr renforcée par la visualisation expérimentale de ces lignes (en utilisant de la limaille de fer et un aimant, par exemple). Les lignes de force donnent une interprétation locale des forces "agissant à distance" mais par l'intermédiaire d'objets non-locaux (une ligne n'est pas un objet local car n'est pas déterminée en un point par ce seul point). La solution est de revenir "au découpage" de la ligne en "petits morceaux infiniment petits" agissant les uns sur les autres de proche en proche. Mathématiquement formulé, ceci introduit de

1. et non directement du mouvement, cf. principe d'inertie de Galilée

nouvelles entités, les champs de vecteurs (champs électrique, magnétique, gravitationnel,...). Le champ, qui peut être naïvement défini en un point comme la force que ressentirait un objet de "charge unité" placé en ce point, est en fait une entité physique non-matérielle, emplissant l'espace, et qui transmet de proche en proche les interactions. Le concept de champ donne ainsi une interprétation locale, par un objet local (déterminé en chaque point), des interactions "à distance". Champs et lignes de force (lignes de champ) sont des concepts duaux, les champs sont l'ensemble des vecteurs tangents aux lignes de forces et réciproquement. A cette dualité, il en existe une seconde avec l'intervention de la notion de potentiel. Le potentiel est à l'énergie ce qu'est le champ à la force. C'est l'entité qui permet d'interpréter localement les échanges d'énergie (via les forces agissant à distance) entre objets distants, c'est à dire le travail des forces, les échanges allant dans "le sens" des différences de potentiels. Les potentiels peuvent être analysés à travers les objets géométriques étendus que sont les surfaces équipotentielles. Pour résumer, les interactions à distance sont caractérisées par la double dualité force/énergie + ponctuel/étendu :

$$\begin{array}{ccc} \text{champs} & \leftrightarrow & \text{lignes de champs} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{potentiels} & \leftrightarrow & \text{surfaces équipotentielles} \end{array}$$

L'analyse mathématique montre que les potentiels ne sont pas univoquement définis, ainsi ces entités ne sont pas considérées comme physiques mais comme de simples intermédiaires de calcul (on verra que l'on peut discuter ce point). La substance physique (l'essence) - au sens d'Aristote - est décrite par le champ, parfaitement défini, et pas par le potentiel qui peut être changé (en suivant une certaine règle mathématique) sans changer les effets expérimentaux attendus. Cette invariance des propriétés physiques sous ces changements - appelée invariance de jauge - était considérée comme un "accident" en électromagnétisme. Mais la recherche d'une description des interactions nucléaires, a montrée qu'en réalité, il s'agit du concept fondamental de la théorie.

1.2 Géométrie

1.2.1 Rappels de géométrie vectorielle

Définition 1 (Champs scalaires). *Les fonctions de l'espace \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) sont appelées champs scalaires.*

Définition 2 (Champs de vecteurs). *Un champ de vecteurs est une application de l'espace \mathbb{R}^3 vu comme un ensemble de points, vers \mathbb{R}^3 vu comme un espace vectoriel². C'est donc une application qui à un point de l'espace associe un vecteur de l'espace.*

On notera les champs de vecteurs :

$$\vec{A}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \vec{A}(x, y, z) \end{array}$$

Il ne faut pas confondre les notions de vecteur "libre", de vecteur "pointé" et de champ de vecteurs. Un vecteur (au sens mathématique, ici on adjoint l'adjectif libre) est un objet qui indique une direction et une amplitude. Il n'a pas de position dans l'espace et peut être translaté en n'importe quel point. Un vecteur "pointé" dispose de plus d'un point d'application. En physique cela correspond à une force de contact, à la vitesse d'une particule ponctuelle, etc... Ce vecteur n'existe qu'en un point de l'espace. Un champ de vecteurs existe en tout point de l'espace, mais contrairement au vecteur libre, sa direction et sa norme varie suivant le point considéré. Un champ de vecteurs peut être assimilé à un ensemble infini de vecteurs pointés (un vecteur pointé par point de l'espace).

Les champs de vecteurs héritent de la structure d'espace vectoriel³ de \mathbb{R}^3 , on peut ainsi définir la somme de deux champs de vecteurs (loi de composition interne) :

$$(\vec{A} + \vec{B})(x, y, z) = \vec{A}(x, y, z) + \vec{B}(x, y, z)$$

2. le champ de vecteurs peut aussi dépendre du temps

3. les champs scalaires remplaçant \mathbb{R} , l'ensemble des champs des vecteurs ne forme pas stricto-sensus un espace vectoriel mais ce que l'on appelle un module

et la multiplication d'un champ de vecteur par un champ scalaire (loi de composition externe) :

$$(f \cdot \vec{A})(x, y, z) = f(x, y, z)\vec{A}(x, y, z)$$

les lois satisfaisant aux axiomes de la structure d'espace vectoriel. On ajoute de plus une troisième loi (seconde loi de composition interne), le produit vectoriel :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B})(x, y, z) = \vec{A}(x, y, z) \wedge \vec{B}(x, y, z) = \begin{pmatrix} A_y(x, y, z)B_z(x, y, z) - A_z(x, y, z)B_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z)B_x(x, y, z) - A_x(x, y, z)B_z(x, y, z) \\ A_x(x, y, z)B_y(x, y, z) - A_y(x, y, z)B_x(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Définition 3 (Surface (ou ligne) de niveau). *Soit $f : \mathbb{R}^3(\text{ou } 2) \rightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire de l'espace (ou du plan). On appelle surface (ou ligne) de niveau, les surfaces (ou lignes) définies comme ensembles de solutions des équations du type*

$$f(x, y, z) = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Une surface ou une ligne de niveau est donc l'ensemble des points associés à la même valeur λ du champ scalaire. Cela correspond par exemple aux lignes de niveau d'un plan géographique (le champ scalaire représentant l'altitude ou le potentiel gravitationnel). Si le champ scalaire est un potentiel, on parle de surfaces (ou de lignes) équipotentielles.

Définition 4 (Lignes de champ). *Soit $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. On appelle ligne de champ, les courbes tangentes en tout point au champ de vecteurs. \mathcal{C} d'équations paramétriques $(x(s), y(s), z(s))$, $s \in \mathbb{R}$ est une ligne de champ si et seulement si*

$$\forall s, \quad \vec{u}(s) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} \end{pmatrix}_{(x(s), y(s), z(s))} \propto \vec{A}(x(s), y(s), z(s))$$

Les lignes de champ sont en quelque sorte une représentation des "courants" dans le champ de vecteurs. On peut faire une analogie avec l'hydrodynamique, si le champ de vecteurs représente le courant d'une rivière, la ligne de champ passant par un point X représente le trajet d'un objet flottant passant par X et emporté par la rivière.

Définition 5 (Gradient). *On appelle gradient d'un champ scalaire de classe \mathcal{C}^1 , f , le champ de vecteurs*

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Le gradient de f mesure au point considéré, "la direction de plus grande pente" du champ scalaire, c'est à dire la direction dans laquelle le champ varie le plus.

Définition 6 (Rotationnel). *On appelle rotationnel d'un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 , \vec{A} , le champ de vecteurs*

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

Le rotationnel mesure la tendance du champ \vec{A} à tourner autour d'un axe. Ainsi, dans l'analogie hydrodynamique, le rotationnel repère les tourbillons du courant.

Définition 7 (Divergence). *On appelle divergence d'un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 , \vec{A} , le champ scalaire :*

$$\text{div}\vec{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z$$

Le divergence mesure la tendance du champ \vec{A} à pointer en direction (ou à l'opposé suivant son signe) d'un point. La divergence repère les sources (divergence positive) ou les puits (divergence négative) du champ. Dans l'analogie hydrodynamique, une source serait une chute d'eau tombant dans la rivière, et un puits serait un trou dans le sol dans lequel l'eau de la rivière s'échapperait.

Définition 8 (Circulation). On appelle circulation d'un champ de vecteurs \vec{A} le long d'une courbe \mathcal{C} d'équations paramétriques $(x(s), y(s), z(s))$, $s \in [0, 1]$, la quantité

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 \left(A_x(x(s), y(s), z(s)) \frac{dx}{ds} + A_y(x(s), y(s), z(s)) \frac{dy}{ds} + A_z(x(s), y(s), z(s)) \frac{dz}{ds} \right) ds$$

La circulation mesure "l'influence" du champ \vec{A} le long de la courbe \mathcal{C} , au sens où si \mathcal{C} est une portion de ligne de champ alors la circulation de \vec{A} le long de \mathcal{C} est maximale, alors que si \mathcal{C} est orthogonale en tout point aux lignes de champs, la circulation sera nulle (attention, une circulation nulle n'implique pas que \mathcal{C} est perpendiculaire en tout point aux lignes de champs). Dans l'analogie hydrolique, si \mathcal{C} est la trajectoire d'une barque, la circulation du champ est le travail des forces de courant, c'est à dire (au signe près) l'énergie dépensée en s'opposant au courant pour suivre la trajectoire \mathcal{C} .

Définition 9 (Flux). On appelle flux d'un champ de vecteurs \vec{A} à travers une surface \mathcal{S} , la quantité

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Omega} \vec{A}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv$$

où (u, v) est un système de coordonnées sur la surface \mathcal{S} , $\vec{\ell}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ sont les coordonnées dans l'espace du point de coordonnée (u, v) sur \mathcal{S} , $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine de (u, v) , $\vec{n}(u, v)$ est le vecteur normal à \mathcal{S} au point de coordonnées (u, v) défini par

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial v}$$

Le flux mesure la quantité de champ de vecteurs traversant la surface \mathcal{S} . On notera que le vecteur de surface :

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial u} du \wedge \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial v} dv$$

a pour norme l'aire d'un élément infinitésimal de surface, c'est à dire le produit d'un élément de longueur infinitésimal dans la direction u : $\frac{\partial \vec{\ell}}{\partial u} du$; par un élément de longueur infinitésimal dans la direction v : $\frac{\partial \vec{\ell}}{\partial v} dv$.

Exemple : Vecteur de surface sur une sphère

Le système de coordonnées sur la sphère est donné par (θ, ϕ) (qui joue le rôle de (u, v)), avec $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Pour une sphère de rayon R on a

$$\vec{\ell}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \sin \phi \cos \theta \\ R \sin \phi \sin \theta \\ R \cos \phi \end{pmatrix}$$

d'où

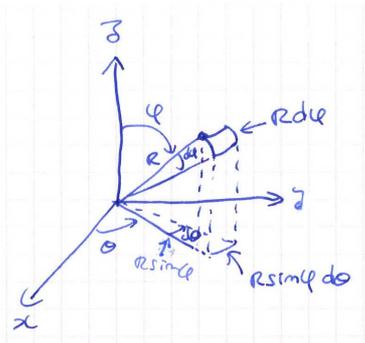
$$\frac{\partial \vec{\ell}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \sin \theta \\ R \sin \phi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = R \sin \phi \vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \vec{\ell}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} R \cos \phi \cos \theta \\ R \cos \phi \sin \theta \\ -R \sin \phi \end{pmatrix} = R \vec{e}_\phi$$

on rappelle que $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \end{pmatrix}$; $\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial \theta} d\theta \wedge \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial \phi} d\phi \\ &= R^2 \sin \phi d\theta d\phi \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\phi \\ &= R^2 \sin \phi d\theta d\phi \vec{e}_r \end{aligned}$$

C'est bien la formule que l'on peut obtenir directement en étudiant un élément infinitésimal de surface sphérique :



1.2.2 Parité, pseudovecteurs et pseudoscalaires

Les vecteurs peuvent être utilisés pour indiquer le sens d’une rotation (par la règle de la main droite). Ainsi si dans le plan (x, y) on transforme un vecteur \vec{A} en vecteur \vec{B} par rotation, le vecteur $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ va indiquer le sens de celle-ci, droite (directe, sens inverse des aiguilles d’une montre) si \vec{C} est dans le même sens que \vec{e}_z , gauche (indirect, sens des aiguilles d’une montre) si \vec{C} est dans le sens de $-\vec{e}_z$ (la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ étant supposée directe). Ceci définit également une orientation sur une surface. Étant donnée une surface \mathcal{S} , un vecteur normal à la surface va orienter celle-ci (c’est à dire définir le sens naturel de la rotation sur la surface). On se donne deux vecteurs tangents non-colinéaires à \mathcal{S} , $\vec{A} \wedge \vec{B}$ définit une orientation (l’autre étant définie par $\vec{B} \wedge \vec{A}$).

On appelle parité, l’opération \mathcal{P} qui consiste à renverser les axes du système de coordonnées $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \rightarrow (-\vec{e}_x, -\vec{e}_y, -\vec{e}_z)$. Par définition $\mathcal{P}(\vec{A}) = -\vec{A}$. Or

$$\mathcal{P}(\vec{A}) \wedge \mathcal{P}(\vec{B}) = -\vec{A} \wedge (-\vec{B}) = \vec{A} \wedge \vec{B} \neq -\vec{C}$$

on a donc

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= \vec{C} \\ \mathcal{P}(\vec{A}) \wedge \mathcal{P}(\vec{B}) &\neq \mathcal{P}(\vec{C}) \end{aligned}$$

Les opérations \wedge et \mathcal{P} ne commutent donc pas (le résultat dépend de l’ordre dans lequel elles sont effectuées). Le problème est que $\mathcal{P}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{P}(\vec{B})$ est une rotation avec le même axe orienté que $\vec{A} \rightarrow \vec{B}$. Si on veut que les vecteurs de rotation et d’orientation soient bien définis indépendamment de la parité, on doit introduire un nouveau type de vecteurs qui ne changent pas de signe sous \mathcal{P} .

Définition 10 (Pseudovecteurs). On appelle pseudovecteur (ou bivecteur) un vecteur géométrique rendu invariant sous parité.

Bien que désuète, on utilisera par souci de clarté la notation \overleftrightarrow{A} pour les pseudovecteurs (sachant que hormis leur comportement sous parité, un pseudovecteur se comporte comme un vecteur). On notera donc que le produit vectoriel, n’est plus à proprement parlé une loi de composition interne car il associe à deux vecteurs, un pseudovecteur :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \overleftrightarrow{C}$$

Pour la même raison, le rotationnel (qui est un produit vectoriel avec $\vec{\nabla}$) transforme un champ de vecteurs, en un champ de pseudovecteurs :

$$\text{rot} \vec{A} = \overleftrightarrow{D}$$

On rappelle que le produit mixte associé à trois vecteurs, le scalaire :

$$|\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}| = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

On remarque donc que

$$|\mathcal{P}(\vec{A}), \mathcal{P}(\vec{B}), \mathcal{P}(\vec{C})| = -|\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}|$$

Ainsi le produit mixte est un scalaire qui change de signe sous parité, on introduit alors la nouvelle définition

Définition 11 (Pseudoscalaires). *On appelle pseudoscalaire une quantité scalaire qui change de signe sous parité.*

Ainsi le produit mixte de trois champs de vecteurs est un champ pseudoscalaire.

Remarque : le “produit scalaire” entre un pseudovecteur et un vecteur est un pseudoscalaire, or comme tout pseudovecteur peut s’écrire comme une somme de produits vectorielles, un produit scalaire d’un vecteur et d’un pseudovecteur est toujours une somme de produit mixte. En réalité, il s’agit là de la bonne définition du produit mixte, à savoir une loi qui associe à un pseudovecteur et à un vecteur un pseudoscalaire. Pour résumer :

– Produit scalaire :

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{S} \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\mapsto \vec{A} \cdot \vec{B} \\ \mathbb{PV} \times \mathbb{PV} &\rightarrow \mathbb{S} \\ (\overset{\curvearrowright}{A}, \overset{\curvearrowright}{B}) &\mapsto \overset{\curvearrowright}{A} \cdot \overset{\curvearrowright}{B} \end{aligned}$$

– Produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{PV} \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\mapsto \vec{A} \wedge \vec{B} = \overset{\curvearrowright}{C} \end{aligned}$$

– Produit mixte :

$$\begin{aligned} \mathbb{PV} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{PS} \\ (\overset{\curvearrowright}{A}, \vec{B}) &\mapsto \overset{\curvearrowright}{A} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

Pour des raisons qui deviendront plus claires par la suite, la divergence est restreinte aux pseudovecteurs, c’est donc le produit mixte de $\overset{\curvearrowright}{\nabla}$ et d’un pseudovecteur, ce qui en fait donc un pseudoscalaire. Pour résumer, on a la chaîne suivante : (les champs sont supposés de classe C^2)

$$0 \rightarrow \mathbb{S} \xrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}} \mathbb{V} \xrightarrow{\overset{\curvearrowright}{\text{rot}}} \mathbb{PV} \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{PS} \rightarrow 0$$

avec la propriété que l’action de deux opérateurs successifs est nulle :

$$\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \overset{\curvearrowright}{0} \quad \text{div} \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} = 0$$

Les pseudovecteurs étant des vecteurs que l’on considère “artificiellement” comme invariants sous parité, il peut être utile de pouvoir associer à un vecteur \vec{A} , un pseudovecteur de mêmes composantes mais supposé invariant sous \mathcal{P} . On notera ce pseudovecteur $*\vec{A} \equiv \overset{\curvearrowright}{A}$. Réciproquement, on notera $\overset{\curvearrowright}{A} \equiv *\vec{A}$, et de même pour les scalaires et les pseudoscalaires. $*$ est appelé star-opérateur de Hodge, $*\vec{A}$ est appelé dual de Hodge de \vec{A} .

Ce dernier opérateur permet de définir le laplacien :

Définition 12 (Laplacien). *Soit f un champ scalaire de classe C^2 , on appelle laplacien de f le champ scalaire :*

$$\Delta f = *\text{div} * \overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Soit \vec{A} un champ de vecteurs de classe C^2 , on appelle laplacien (vectoriel) de \vec{A} le champ de vecteurs :

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} * \text{div} * \vec{A} - *\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} * \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

Afin d’interpréter le laplacien, commençons par considérer un champ scalaire f sur la droite, satisfaisant à l’équation suivante :

$$\frac{df}{dt} = g(t)$$

où g représente “l’environnement” du champ f . Soit h au voisinage de 0, on a alors

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)h + \mathcal{O}(h^2)$$

d'où

$$f(t+h) = f(t) + g(t)h + \mathcal{O}(h^2)$$

on voit donc que le champ f se propage suivant les t croissants sous l'action de l'environnement. Ainsi la valeur de f en un point t ne dépendra que de la valeur de f en un point à gauche de t et de l'environnement. L'équation $\frac{df}{dt} = g(t)$ est une équation de propagation de f unidirectionnelle. Typiquement en physique, il s'agit d'une propagation temporelle : la valeur du champ à l'instant présent dépend de son passé mais pas de son avenir.

Considérons maintenant un champ scalaire f sur la droite, mais satisfaisant à l'équation :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = g(x)$$

Soit toujours h au voisinage de 0 :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Afin d'éliminer f' on considère également le développement

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

En additionnant les deux équations, on trouve

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + g(x)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

d'où

$$f(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} - g(x)\frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

On voit ici que f se propage à la fois de gauche à droite et de droite à gauche. Ainsi la valeur de f en un point x dépendra des valeurs de f en deux points, l'un à gauche et l'autre à droite de x , ainsi que de l'environnement. Typiquement, il s'agit d'une propagation spatiale : la valeur du champ dépend de ce qui se passe à gauche et à droite⁴.

Le laplacien est la généralisation à trois dimensions de ce concept, l'équation

$$\Delta f = g(x, y, z)$$

est l'équation de propagation spatiale du champ f lorsque l'environnement du champ (les sources du champ) sont décrites par g . Cette interprétation est aussi visible à travers l'interprétation des opérateurs vectoriels. $\Delta f = g \iff * \operatorname{div} * \overrightarrow{\operatorname{grad}} f = g$, ainsi g mesure les sources du champ $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$. Si $g(x, y, z) = \begin{cases} g_0 & \text{si } (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$ pointent dans la direction (ou la direction opposée si $g_0 > 0$) de (x_0, y_0, z_0) . Or $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$ indique la direction de plus grande pente de f , c'est à dire la direction dans laquelle irait un objet dont la propagation dans l'espace suivrait la fonction f .

Propriété 1 (Règles de Leibniz). *Soit f et g deux champs scalaires de classe \mathcal{C}^2 , \vec{A} et \vec{B} deux champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 , et \vec{A} un champ de pseudovecteurs de classe \mathcal{C}^1 , alors*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(fg) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} f g + f \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(f\vec{A}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \wedge \vec{A} + f \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \\ \operatorname{div}(f\vec{A}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \vec{A} + f \operatorname{div} \vec{A} \\ \operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \\ \Delta(fg) &= \Delta f g + 2 \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} g + f \Delta g \end{aligned}$$

Preuve : Laissez en exercice ■

4. on remarquera qu'au lieu de préciser la valeur du champ en un point à gauche et un point à droite, on peut aussi donner la valeur du champ et de sa dérivée en un point à gauche

1.2.3 Formulation locale/différentielle vs globale/intégrale

Les différents objets introduits dans le paragraphe précédent, champs de (pseudo)scalaires/(pseudo)vecteurs, sont associés à des objets géométriques et à des quantités physiques différentes.

- En un point (x, y, z) , un champ scalaire f définit un scalaire (un nombre) $f(x, y, z)$ (invariant sous parité). Les champs scalaires sont donc associés aux points (dimension géométrique 0), et on s'attend à ce qu'un champ scalaire physique soit dimensionné en L^0 .
- Considérons un champ de vecteurs \vec{A} . Sa circulation sur un chemin orienté \mathcal{C}

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

donne une quantité physique correctement définie, car $\vec{A} \cdot d\vec{\ell}$ est invariant par parité. Par contre le flux d'un champ de vecteurs ne donne pas une quantité physique. Les champs de vecteurs sont donc associés aux courbes orientées (dimension géométrique 1), et on s'attend à ce qu'un champ de vecteurs physique soit dimensionné en L^{-1} pour compenser la dimension du vecteur de longueur infinitésimal $d\vec{\ell}$.

- Soit un champ de pseudovecteurs \overleftarrow{A} . Sa circulation n'est pas bien définie, par contre son flux à travers une surface orientée \mathcal{S} , l'est parfaitement

$$\iint_{\mathcal{S}} \overleftarrow{A} \cdot d\overleftarrow{S}$$

Les champs de pseudovecteurs sont associés aux surfaces (dimension géométriques 2), et on s'attend à ce qu'un champ de pseudovecteurs physique soit dimensionné en L^{-2} pour compenser la dimension du pseudovecteur de surface infinitésimale $d\overleftarrow{S}$.

- Enfin, un champ pseudoscalaire f ne définit pas en point une quantité invariante par parité. Par contre, l'intégration de f sur un volume orienté \mathcal{V} est invariante :

$$\iiint_{\mathcal{V}} f d\tau$$

en effet, l'élément de volume infinitésimal $d\tau$ est défini (en coordonnées cartésiennes) comme le volume d'un cube élémentaire dont les côtés sont infinitésimaux, soit

$$d\tau = |d\vec{x}, d\vec{y}, d\vec{z}| = (d\vec{x} \wedge d\vec{y}) \cdot d\vec{z}$$

$d\tau$ est donc un pseudoscalaire. Les champs pseudoscalaires sont donc associés aux volumes (dimension géométrique 3), et s'attend à ce qu'un champ de pseudoscalaires physique soit dimensionné en L^{-3} .

On voit que l'on peut associer aux différents champs, des formes différentielles. En coordonnées cartésiennes on a

- pour un champ de vecteurs \vec{A} :

$$\vec{A} \cdot d\vec{\ell} = A_x(x, y, z)dx + A_y(x, y, z)dy + A_z(x, y, z)dz$$

- pour un champ de pseudovecteurs \overleftarrow{A} :

$$\overleftarrow{A} \cdot d\overleftarrow{S} = A_x(x, y, z)d\vec{y} \wedge d\vec{z} + A_y(x, y, z)d\vec{z} \wedge d\vec{x} + A_z(x, y, z)d\vec{x} \wedge d\vec{y}$$

- pour un champ de pseudoscalaires f :

$$f d\tau = f(x, y, z)(d\vec{x} \wedge d\vec{y}) \cdot d\vec{z} = f(x, y, z)|d\vec{x}, d\vec{y}, d\vec{z}|$$

avec les cas particuliers des différentielles totales exactes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\vec{\ell} = \partial_x f dx + \partial_y f dy + \partial_z f dz = df$$

$$\overleftarrow{\text{rot}}\vec{A} \cdot d\overleftarrow{S} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)d\vec{y} \wedge d\vec{z} + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)d\vec{z} \wedge d\vec{x} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)d\vec{x} \wedge d\vec{y}$$

$$\overleftarrow{\text{div}}\vec{A} d\tau = (\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z)|d\vec{x}, d\vec{y}, d\vec{z}|$$

Théorème 1 (Théorèmes de Stokes). • Soit un champ scalaire f de classe \mathcal{C}^1 et un chemin orienté \mathcal{C} , d'extrémité initiale (x_0, y_0, z_0) et d'extrémité finale (x_1, y_1, z_1) . Alors

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0)$$

- Soit un champ de vecteurs \vec{A} de classe \mathcal{C}^1 et une surface orientée \mathcal{S} ayant pour bord la courbe fermée orientée \mathcal{C} . Alors

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

- Soit un champ de pseudovecteurs \overleftarrow{A} de classe \mathcal{C}^1 et un volume orienté \mathcal{V} ayant pour bord la surface fermée orientée \mathcal{S} . Alors

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div} \overleftarrow{A} d\tau = \oiint_{\mathcal{S}} \overleftarrow{A} \cdot d\vec{S}$$

Preuve : Le cas du champ scalaire est trivial (intégrale numérique simple $\int_{f(x_0, y_0, z_0)}^{f(x_1, y_1, z_1)} df$).

Cas du champ de vecteurs : on transforme d'abord l'intégrale géométrique en une intégrale numérique double. Soit (u, v) un système de coordonnées sur \mathcal{S} , et Ω le domaine de (u, v) :

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Omega} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot \overleftarrow{n} du dv$$

où $\overleftarrow{n}(u, v)$ est le vecteur normal à \mathcal{S} au point de coordonnées (u, v) . On note $\vec{X}(u, v) = (x(u, v); y(u, v); z(u, v))$ la paramétrisation de \mathcal{S} . Rappelons que $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}$ sont des vecteurs tangents à la surface et que donc

$$\overleftarrow{n} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}$$

d'où

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot \overleftarrow{n} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)(\partial_u y \partial_v z - \partial_u z \partial_v y) + \dots$$

En développant toutes les expressions, en ajoutant des éléments neutres du type $\partial_z A_z \partial_u z \partial_v z - \partial_z A_z \partial_u z \partial_v z$, puis en regroupant les termes comme suit :

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial A_z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

on obtient

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot \overleftarrow{n} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}$$

Supposons dans un premier temps que Ω soit un pavé $\blacksquare = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$. On cherche alors à calculer

$$\iint_{\blacksquare} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} \right) du dv$$

Par intégration par parties, on a

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} du = \left[\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} \right]_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} \vec{A} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u \partial v} du$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} \right) du dv &= \int_{v_1}^{v_2} \left[\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} \right]_{u_1}^{u_2} dv - \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \vec{A} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u \partial v} du dv \\ &\quad - \int_{u_1}^{u_2} \left[\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} \right]_{v_1}^{v_2} du + \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \vec{A} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u \partial v} du dv \\ &= \int_{v_1}^{v_2} \left[\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} \right]_{u_1}^{u_2} dv - \int_{u_1}^{u_2} \left[\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} \right]_{v_1}^{v_2} du \end{aligned}$$

La circulation de \vec{A} sur le bord du pavé est donnée par

$$\begin{aligned} \oint_{\downarrow\uparrow\uparrow} \vec{A} \cdot d\vec{X} &= \int_{\square} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} du + \int_{\square\uparrow} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} dv + \int_{\square} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} du + \int_{\downarrow\uparrow\uparrow} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} dv \\ &= \left[\int_{u_1}^{u_2} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} du \right]_{v_1} + \left[\int_{v_1}^{v_2} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} dv \right]_{u_2} - \left[\int_{u_1}^{u_2} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} du \right]_{v_2} - \left[\int_{v_1}^{v_2} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} dv \right]_{u_1} \end{aligned}$$

Ce qui prouve que

$$\iint_{\blacksquare} \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\overset{\curvearrowright}{S} = \oint_{\downarrow\uparrow\uparrow} \vec{A} \cdot d\vec{X}$$

Dans le cas où Ω n'est pas un pavé, on recouvre Ω par une réunion de petits pavés. Le résultat est alors vrai pour la réunion des petits pavés (les contributions des arêtes communes à deux pavés s'annulant : $\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow$, il ne reste que les contributions du bord). Et par conséquent, le résultat est vrai à la limite où le nombre de pavés tend vers l'infini, avec une taille des pavés qui tend vers zéro, et avec la réunion des pavés qui tend vers Ω .

Une démonstration similaire peut être faite pour le cas du champ de pseudovecteurs. ■

On remarquera, que comme un chemin fermé \mathcal{C} n'a pas d'extrémités, et qu'une surface fermée \mathcal{S} n'a pas de bord, on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad \oiint_{\mathcal{S}} \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\overset{\curvearrowright}{S} = 0$$

Ces deux propriétés, sont les versions intégrales des propriétés $\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \overset{\curvearrowright}{0}$ et $\text{div} \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} = 0$, en effet par le théorème de Stokes

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overset{\curvearrowright}{S} &= \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} = 0 \\ \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} d\tau &= \oiint_{\mathcal{S}} \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\overset{\curvearrowright}{S} = 0 \end{aligned}$$

C'est donc le passage des formes locales (différentielles) aux formes globales (intégrales) qui relie les différents champs aux objets géométriques :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{scalaires} & \xrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}} & \text{vecteurs} & \xrightarrow{\overset{\curvearrowright}{\text{rot}}} & \text{pseudovecteurs} & \xrightarrow{\text{div}} & \text{pseudoscalaires} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longleftarrow & \text{points} & \xleftarrow{\partial} & \text{chemins} & \xleftarrow{\partial} & \text{surfaces} & \xleftarrow{\partial} & \text{volumes} & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

le symbole ∂ signifiant ici "bord".

Théorème 2 (Lois de conservation). • *Un champ scalaire f de classe \mathcal{C}^1 est constant si $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0} \iff f(x, y, z) = f(x', y', z') \forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.*

- *Un champ de vecteur \vec{A} de classe \mathcal{C}^1 est dit irrotationnel si $\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} = \overset{\curvearrowright}{0} \iff \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 0$ pour tout chemin fermé \mathcal{C} .*
- *Un champ de pseudovecteurs $\overset{\curvearrowright}{A}$ de classe \mathcal{C}^1 est dit conservatif si $\text{div} \overset{\curvearrowright}{A} = 0 \iff \oiint_{\mathcal{S}} \overset{\curvearrowright}{A} \cdot d\overset{\curvearrowright}{S} = 0$ pour toute surface fermée \mathcal{S} .*

Preuve : Le premier cas est trivial.

Pour le deuxième cas, on utilise le théorème de Stokes.

$$\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} = \overset{\curvearrowright}{0} \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\overset{\curvearrowright}{S} = 0$$

où \mathcal{S} est une surface ayant \mathcal{C} pour bord. Réciproque : on suppose que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \vec{\ell} = 0$$

pour tout chemin fermé \mathcal{C} , donc par le théorème de Stokes

$$\iint_{\mathcal{S}} \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\overset{\curvearrowright}{S} = 0$$

pour toute surface ouverte \mathcal{S} . C'est en particulier vrai pour la surface $[x, x+h] \times [y, y+h]$ avec $h \rightarrow 0$ et où (x, y, z) est un point arbitraire de l'espace. D'où

$$\iint_{[x, x+h] \times [y, y+h]} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iff \left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right]_{(x, y, z)} = 0$$

De même pour les surfaces $[y, y+h] \times [z, z+h]$ et $[x, x+h] \times [z, z+h]$. On déduit que $\forall (x, y, z)$, $\left[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right]_{(x, y, z)} = 0$.

La démonstration pour le troisième cas est tout à fait similaire. ■

En résumé :

<i>local / différentiel / microscopique</i>	<i>global / intégral / macroscopique</i>
champ scalaire f	valeur du champ en un point $f(x, y, z)$
champ de vecteurs \vec{A}	circulation le long d'un chemin $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$
champ de pseudovecteurs $\overrightarrow{\vec{A}}$	flux à travers une surface $\iint_S \overrightarrow{\vec{A}} \cdot d\vec{S}$
champ pseudoscalaire f	intégrale sur un volume $\iiint_V f d\tau$
$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$	$\oint_C \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{\ell} = 0$
$\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$	$\oiint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0$
$\overrightarrow{\text{grad}} f = 0$	f constant
$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0}$	$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 0$
$\text{div} \overrightarrow{\vec{A}} = 0$	$\oiint_S \overrightarrow{\vec{A}} \cdot d\vec{S} = 0$

Les notions qui ont été introduites ici, champ de (pseudo)scalaire/(pseudo)vecteurs, produit scalaire, produit vectoriel/mixte, opérateurs différentiels ($\overrightarrow{\text{grad}}$, $\overrightarrow{\text{rot}}$, div), intégration des champs, dualité de Hodge, théorème de Stokes, se généralisent en dehors de la géométrie vectorielle, et forment la géométrie différentielle.

1.3 Équations des champs stationnaires

1.3.1 Lois des champs et des déplacements dans le vide

Les propriétés électromagnétiques sont décrites par une série de champs qui ont déjà été rencontrés dans les cours antérieurs :

- **La densité de charge électrique** ρ : champ pseudoscalaire décrivant la densité volumique de charges électriques ($C.m^{-3}$).
- **La densité de courant électrique** \overrightarrow{j} : champ de pseudovecteurs décrivant la densité surfacique d'intensité électrique ($A.m^{-2}$).
- **Le potentiel électrique** V : champ scalaire décrivant le potentiel de l'interaction électrique (V).
- **Le potentiel magnétique** \vec{A} : champ de vecteurs décrivant le potentiel de l'interaction magnétique ($Wb.m^{-1}$).
- **Le champ électrique** \vec{E} : champ de vecteurs décrivant l'interaction électrique ($V.m^{-1}$).
- **Le champ magnétique** $\overrightarrow{\vec{B}}$: champ de pseudovecteurs décrivant l'interaction magnétique ($Wb.m^{-2}$).
- **Le déplacement électrique** $\overrightarrow{\vec{D}}$: champ de pseudovecteurs dual de \vec{E} ($C.m^{-2}$).
- **Le déplacement magnétique** \vec{H} : champ de vecteurs dual de \vec{B} ($A.m^{-1}$).

Petit rappel sur les unités électromagnétiques :

- le Coulomb (C) est l'unité de charge électrique, la charge électrique étant la mesure du couplage de la matière avec le champ électrique, cf. force électrostatique $\vec{F}_e = q\vec{E}$.

- l’Ampère (A) est l’unité d’intensité du courant électrique, c’est la quantité de charges transportées par unité de temps. La charge transportée par unité de temps par la distance parcourue ($A.m$) mesure le couplage de la matière avec le champ magnétique, cf. force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.
- le Volt (V) est l’unité de tension électrique et de force électromotrice. La force électromotrice d’un générateur mesure la propension de celui-ci à mettre en mouvement des électrons. La tension appliquée aux bornes d’une branche de circuit, induit un courant dans la branche dont l’intensité est limité par la résistance de la branche suivant la loi d’Ohm $U = Ri$.
- le Weber (Wb) est l’unité de flux magnétique et d’induction magnétique. L’induction magnétique mesure la propension d’un aimant en mouvement à créer du courant électrique dans un circuit, la force électromotrice de création du courant étant reliée au flux par $e = -\frac{d\phi}{dt}$. Le flux magnétique à travers une maille de circuit électrique, induit un courant dans la maille dont l’intensité est limité par le coefficient d’auto-induction suivant la loi $\phi = Li$.

Dans le vide, les champs duaux sont définis à partir de l’opérateur de Hodge et des constantes fondamentales ϵ_0 et μ_0 (pour des raisons de dimension physique ; $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$) :

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 * \vec{E} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} * \vec{B} \end{aligned}$$

	Électrique	magnétique
densité	ρ	\vec{j}
potentiel	V	\vec{A}
champ	\vec{E}	\vec{B}
déplacement	\vec{D}	\vec{H}

Ces différents champs sont reliés par des équations fondant la physique de l’électromagnétisme.

Principe 1 (Équations de répartition des potentiels). • Équation du potentiel électrique : équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{* \rho}{\epsilon_0} = 0$$

• Équation du potentiel magnétique :

$$\vec{\Delta} \vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}} * \text{div} * \vec{A} + \mu_0 * \vec{j} = \vec{0}$$

Principe 2 (Équations structurelles).

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}} V \\ \vec{B} &= \text{rot} \vec{A} \end{aligned}$$

Principe 3 (Équations fondamentales). • Loi de Faraday, forme locale :

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

forme globale : pour tout chemin fermé \mathcal{C}

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

• Conservativité du champ magnétique, forme locale :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

forme globale : pour toute surface fermée \mathcal{S}

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Théorème de Gauss, forme locale :

$$\operatorname{div} \overleftrightarrow{D} = \rho$$

forme globale : pour toute surface fermée \mathcal{S} délimitant un volume \mathcal{V}

$$\oint_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{D} \cdot d\overleftrightarrow{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau$$

- Théorème d'Ampère, forme locale :

$$\operatorname{rot} \overleftrightarrow{H} = \overleftrightarrow{j}$$

forme globale : pour tout chemin fermé \mathcal{C} délimitant une surface \mathcal{S}

$$\oint_{\mathcal{C}} \overleftrightarrow{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{j} \cdot d\overleftrightarrow{S}$$

Les relations entre les différents champs, peuvent être représentées à l'aide des diagrammes de Tonti :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{-*\epsilon_0\Delta} & \rho \\ \begin{array}{c} \overrightarrow{\text{grad}} \\ \downarrow \end{array} & & \uparrow \text{div} \\ \vec{E} & \xrightarrow{\epsilon_0*} & \overleftrightarrow{D} \\ \\ \vec{A} & \xrightarrow{-*\frac{1}{\mu_0}\Delta + *\frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{grad}}*\text{div}*} & \overleftrightarrow{j} \\ \begin{array}{c} \overleftrightarrow{\text{rot}} \\ \downarrow \end{array} & & \uparrow \overleftrightarrow{\text{rot}} \\ \overleftrightarrow{B} & \xrightarrow{\frac{1}{\mu_0}*} & \vec{H} \end{array}$$

Interprétation des équations fondamentales :

- Théorème de Gauss : les sources du champ électrique sont les charges électriques \iff les lignes de champ électrique ont pour extrémités les charges électriques.
- Théorème d'Ampère : le champ magnétique a tendance à tourner autour des lignes de courant électrique \iff les lignes de champ magnétique s'enroulent autour des lignes de courant électrique.
- Conservativité du champ magnétique : il n'existe pas de source isolée ou/et ponctuelle de champ magnétique, i.e. pas de monopôles magnétiques \iff les lignes de champ magnétique sont fermées ou infinies (pas d'extrémités).
- Loi de Faraday : le champ électrique ne peut tourner autour d'un point \iff les lignes de champ électrique ne sont jamais fermées.

Les relations structurelles s'interprètent ainsi : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \iff$ les lignes de champ électrique sont orthogonales aux surfaces équipotentielles électriques. $\overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{\text{rot}}\vec{A} \iff$ les lignes de potentiel magnétique tournent autour des lignes de champ magnétique.

Les différentes relations ne sont pas indépendantes. La loi de Faraday et la conservativité du champ magnétique découlent des équations structurelles :

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V &\Rightarrow \overleftrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\overleftrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{grad}}V = \overleftrightarrow{0} \\ \overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{\text{rot}}\vec{A} &\Rightarrow \operatorname{div} \overleftrightarrow{B} = \operatorname{div} \overleftrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = 0 \end{aligned}$$

Les équations structurelles sont donc plus fondamentales que les lois de Faraday et de conservativité de \overleftrightarrow{B} . Les équations des potentiels dérivent des équations structurelles et des théorèmes de Gauss et d'Ampère :

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V &\Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0}\overleftrightarrow{D} = -*\overrightarrow{\text{grad}}V \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0}\operatorname{div} \overleftrightarrow{D} = -\operatorname{div} *\overrightarrow{\text{grad}}V \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0}*\rho = -\Delta V \\ \overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{\text{rot}}\vec{A} &\Rightarrow \mu_0\vec{H} = *\overleftrightarrow{\text{rot}}\vec{A} \Rightarrow \mu_0\overleftrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \overleftrightarrow{\text{rot}}*\overleftrightarrow{\text{rot}}\vec{A} \Rightarrow \mu_0*\overleftrightarrow{j} = \overrightarrow{\text{grad}}*\operatorname{div}*\vec{A} - \overleftrightarrow{\Delta}\vec{A} \end{aligned}$$

Distributions de charges particulières :

Considérons une charge ponctuelle q se trouvant un point x_* d'un axe (Ox) . On s'intéresse à la question de

la densité linéique de charge de l'axe. Considérons une partition de l'axe $\{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$. On suppose que $x_* \in]x_i, x_{i+1}[$. En première approximation, on a

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}[\text{ avec } j \neq i \\ \frac{q}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[\end{cases}$$

On pose $\lambda(x) = q\Delta_i(x)$ avec

$$\Delta_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}[\text{ avec } j \neq i \\ \frac{1}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[\end{cases}$$

Dans une intégration avec une fonction quelconque f , on a en utilisant la même partition et la formule des sommes de Riemann :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\lambda(x)dx &\simeq \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} f(x_j) \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ \frac{q}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } i = j \end{cases} \times (x_{j+1} - x_j) \\ &\simeq qf(x_i) \end{aligned}$$

avec $x_{j_{\min}} = a$ et $x_{j_{\max}} = b$. En particulier on retrouve bien la charge totale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)dx = q$$

En faisant tendre le pas de la partition $\max(x_{j+1} - x_j)$ vers 0, on trouve que $\lambda(x) = q\delta(x - x_*)$, où $\delta(x - x_*)$ joue le rôle de $\Delta_i(x)$ quand le pas de la partition tend vers zéro, avec la propriété suivante :

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_*)dx = f(x_*)$$

La chose $\delta(x - x_*)$ ne peut en aucun cas être une fonction, c'est ce que l'on appelle une distribution. La théorie rigoureuse des distributions n'entre pas de le cadre de ce cours, on prendra pour définition de δ la relation intégrale précédente. δ s'appelle la distribution de Dirac.

Une charge ponctuelle se trouvant à la position $(x_*, y_*, z_*) \in \mathbb{R}^3$ conduit donc à une densité volumique de charge :

$$\rho(x, y, z) = q\delta(x - x_*)\delta(y - y_*)\delta(z - z_*)$$

avec pour tout champ scalaire f :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\rho(x, y, z)dxdydz = qf(x_*, y_*, z_*)$$

On peut de plus introduire des distributions de Dirac géométriques, soit \mathcal{C} un chemin dans \mathbb{R}^3 (paramétré par s) et \mathcal{S} une surface (paramétrée par (u, v)), on définit les distributions $\delta_{\mathcal{C}}(x, y, z)$ et $\delta_{\mathcal{S}}(x, y, z)$ par

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\delta_{\mathcal{C}}(x, y, z)dxdydz = \int_{\mathcal{C}} f(x(s), y(s), z(s))ds$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\delta_{\mathcal{S}}(x, y, z)dxdydz = \iint_{\mathcal{S}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))dudv$$

Par exemple si \mathcal{C} est la droite d'équation $\begin{cases} x = x_* \\ y = y_* \end{cases}$, on a

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\delta_{\mathcal{C}}(x, y, z)dxdydz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_*, y_*, z)dz$$

Les distributions de Dirac permettent d'exprimer les répartitions ponctuelles, linéiques et surfaciques de charges ou de courants comme des densités volumiques ; ce qui permet d'écrire les formes locales des

théorèmes de Gauss et d'Ampère. Ainsi pour une charge ponctuelle q au point (x_*, y_*, z_*) la forme locale du théorème de Gauss s'écrit

$$\text{div} \vec{D} = q \delta(x - x_*) \delta(y - y_*) \delta(z - z_*)$$

Remarque :

On fera souvent l'hypothèse que ρ (ou \vec{j}) est à support compact, c'est à dire qu'il existe un point (x_0, y_0, z_0) et une distance r_* tels que en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) centrées sur (x_0, y_0, z_0) on a

$$r > r_* \Rightarrow \rho(r, \theta, \phi) = 0$$

Cette hypothèse est physiquement raisonnable : elle signifie en effet qu'aucun objet chargé physiquement réel ne s'étend jusqu'à l'infini. Dans ce cas le potentiel et le champ tendent vers 0 respectivement comme $1/r$ et $1/r^2$ (de loin, $r \gg r_*$, l'objet chargé sera approximativement ponctuel). Il peut arriver néanmoins, quand on s'intéresse à des distances très courtes tout en étant très proche de l'objet ($r \ll r_*$) que l'on considère l'objet comme infini. Mais ceci n'est qu'une idéalisation simplificatrice de certains calculs et ne constitue en aucun cas une réalité physique.

Exemple : Charges ponctuelles et lignes de courant

Charge ponctuelle q au point (x_0, y_0, z_0) :

$$\text{div} \vec{D} = q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

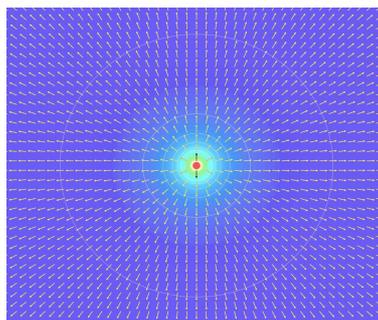
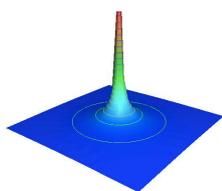
Ligne de courant d'intensité I suivant la droite parallèle à (Oz) passant par le point $(x_0, y_0, 0)$:

$$\text{rot} \vec{H} = I \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) * \vec{e}_z$$

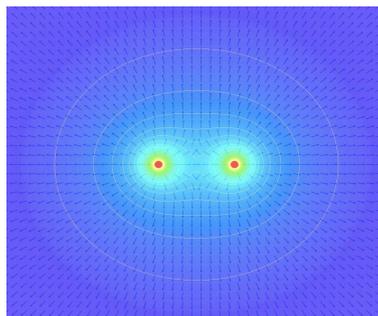
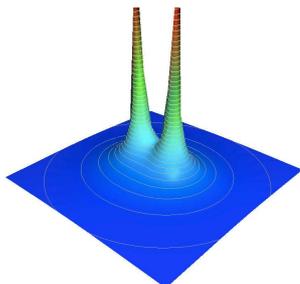
Spire de courant d'intensité I dans le plan $z = z_0$, de centre $(0, 0)$ et de rayon r_0 :

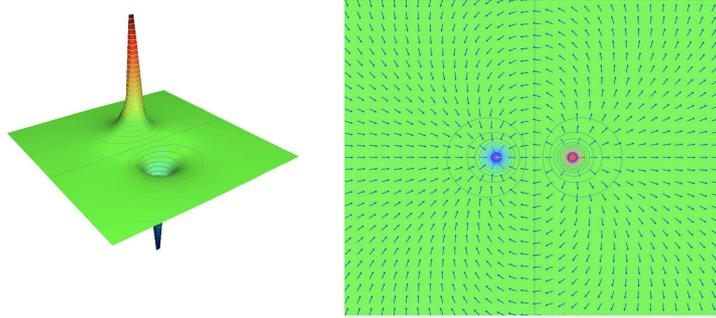
$$\text{rot} \vec{H} = I \delta(z - z_0) \delta(r - r_0) * \vec{e}_\theta$$

Lignes de champ et surfaces équipotentielles électriques pour une charge ponctuelle :

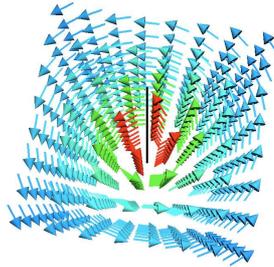


Lignes de champ et surfaces équipotentielles électriques pour deux charges ponctuelles :

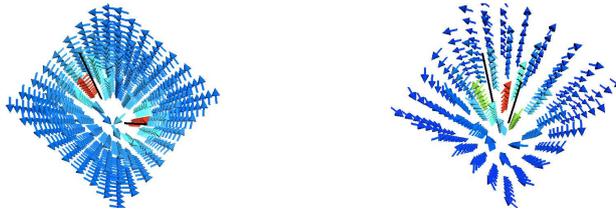




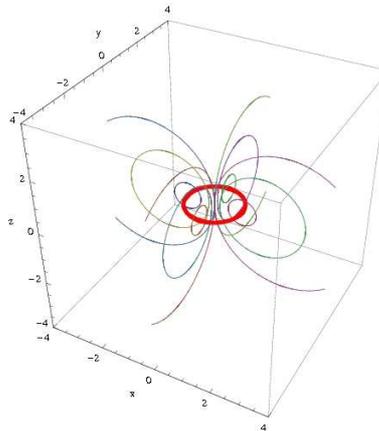
Champ magnétique pour un fil rectiligne de courant :



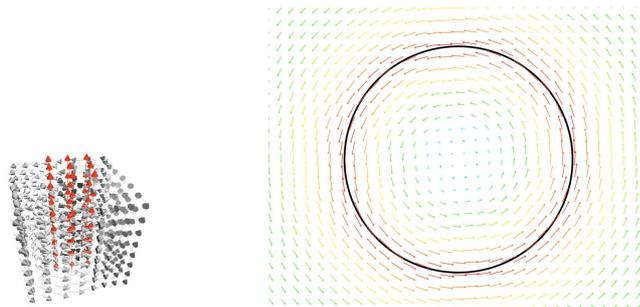
Champ magnétique pour deux fils rectilignes de courant :



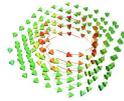
Lignes (non-orientées) de champ magnétique pour une spire de courant :



Champ et potentiel vecteur magnétique pour un solénoïde infini :

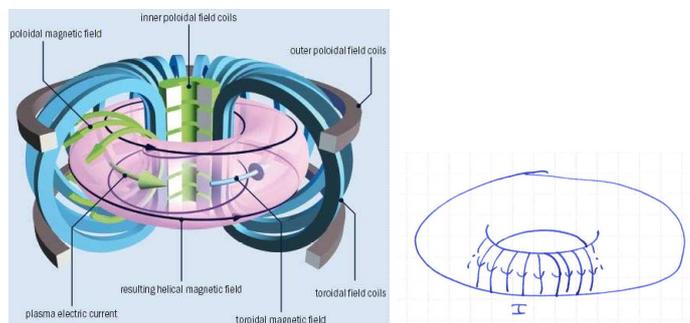


Champ magnétique pour une bobine toroïdale :

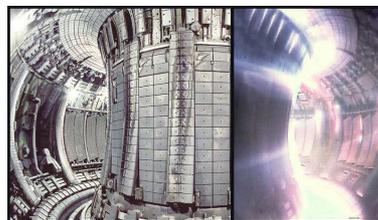


Exemple : Les tokamaks

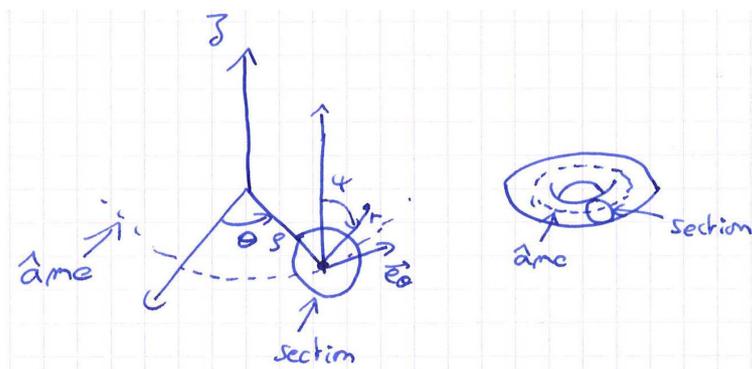
Un tokamak est un instrument de physique nucléaire servant à réaliser des fusions de noyaux atomiques (par exemple le réacteur expérimental ITER à Cadarache). Un tokamak se présente sous la forme d'une chambre en forme de tore sur laquelle sont serties des bobines (le terme tokamak est l'abréviation russe de "chambre toroïdale avec bobines magnétiques").



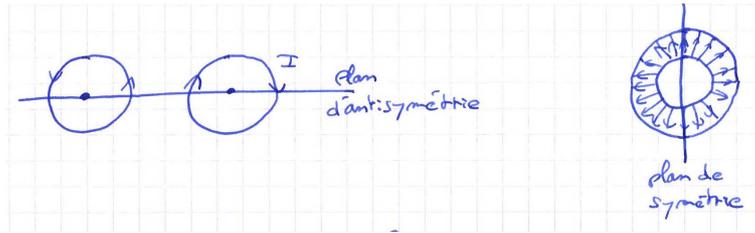
Les noyaux atomiques forment un plasma dans la chambre (un gaz de particules chargées électriquement) chauffé à très haute température pour que la fusion nucléaire se réalise.



Le courant I parcourant les spires entourant la chambre génère un champ magnétique (dit toroïdal) ayant pour rôle de confiner le plasma au voisinage de l'âme du tore (le cercle "central"). De plus un courant suivant l'âme du tore au sein du plasma de particules chargées, génère un champ magnétique secondaire (dit poloïdal).



On cherche le champ toroïdal \vec{H}_t au voisinage de l'âme. Le plan horizontal incluant l'âme du tore est plan d'antisymétrie alors que les plans verticaux incluant une section sont plans de symétrie.



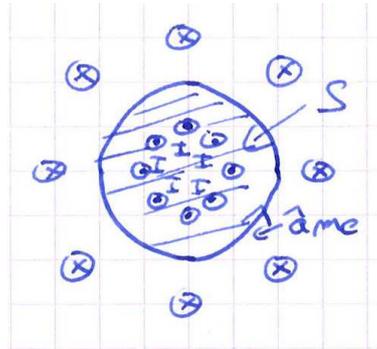
On en déduit que \vec{H}_t appartient au plan de l'âme et est perpendiculaire au plan de section, d'où

$$\vec{H}_t = H_0 \vec{e}_\theta$$

\vec{H}_t ne dépend pas de θ par symétrie de rotation. Plus précisément, si \mathcal{C} est l'âme du tore, par le théorème d'Ampère, on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H}_t \cdot d\vec{\ell} = NI$$

où N est le nombre de spires entourant la chambre toroïdale (chaque spire traverse une fois le disque \mathcal{S} délimité par l'âme).



D'où

$$\vec{H}_t = \frac{NI}{2\pi\rho} \vec{e}_\theta$$

où ρ est le rayon de l'âme. Le champ toroïdal confine bien les particules car si une particule "tente" de s'éloigner de l'âme ($\vec{v} = v\vec{e}_r$), alors la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_t = qvB_0\vec{e}_r \wedge * \vec{e}_\theta = -qvB_0\vec{e}_\psi$ incurve sa trajectoire de telle sorte que celle-ci s'enroule autour de l'âme.

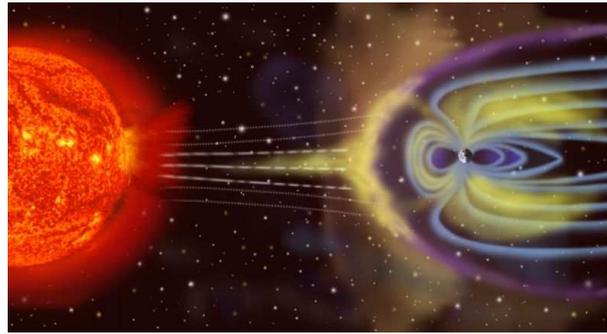
Le champ poloïdal est tel que $\vec{H}_p \propto \vec{e}_\psi$ (exemple de la spire de courant). ■

Exemple : La magnétosphère terrestre

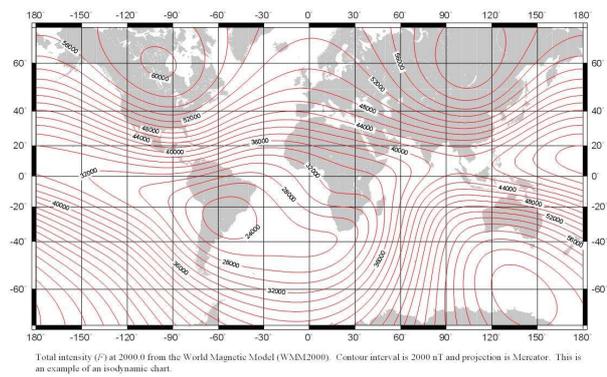
D'un point de vue magnétique la Terre peut être considérée en première approximation comme un énorme aimant, dont le champ magnétique est similaire au champ produit par une boucle de courant d'axe incliné de 11 degrés par rapport à l'axe de rotation terrestre. Ce champ est engendré par les mouvements du noyau métallique liquide de la planète.



Mais le champ magnétique terrestre est balayé par le vent solaire, i.e. un flux de particules chargées en provenance du Soleil. Le champ magnétique terrestre dévie ces particules qui ne peuvent pas pénétrer dans l'atmosphère (sauf au niveau des pôles magnétiques, ce qui est à l'origine du phénomène des aurores polaires). Les particules déviées forment alors des courants de particules chargées avec une sorte d'ombre de particules projetée derrière la face nocturne de la Terre. Ceci déforme le champ magnétique terrestre, à la fois confiné dans la zone d'ombre et cherchant à tourner autour des lignes de courant (n.b. le champ tourne principalement autour du noyau terrestre qui est la source dominante, les courants de particules solaires n'étant que des perturbations).



En réalité le champ magnétique terrestre présente une grande complexité. Tout d'abord les pôles dérivent sur la surface de la Terre à une vitesse moyenne de 55 km/an. D'autre part, comme le montre la carte des lignes de niveau de l'intensité du champ magnétique terrestre :



montre une région au large du Brésil de fort affaiblissement du champ par rapport au modèle dipolaire. Ce phénomène appelé *anomalie de l'atlantique sud* est apparue lentement au cours des deux derniers siècles écoulés.

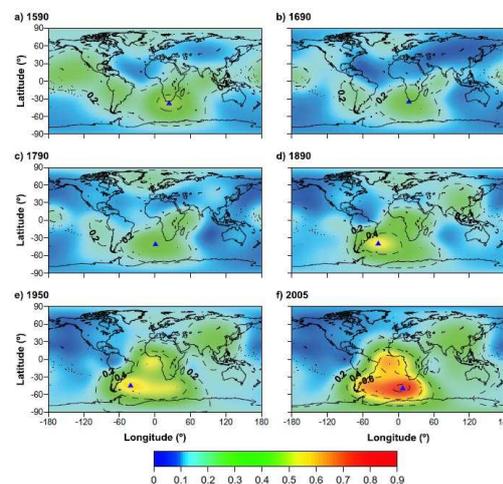


Fig. 5 – The non-dipole/total (NPT) field ratio, showing the drift of the non-dipole field anomaly presently in the South Atlantic. Note the increase in intensity and influence area of the non-dipole field.

Ce phénomène est sans doute lié à l'inversion périodique de la polarité terrestre, en moyenne tous les 250 000 ans (mais la dernière inversion date de 780 000 ans). Cette inversion de la polarité ne se déroule pas par une migration des pôles d'un hémisphère à l'autre en passant par l'équateur. Des pôles secondaires apparaissent en grand nombre, les pôles principaux perdant en intensité jusqu'à que le champ magnétique soit très affaibli, puis le nombre de pôles diminue et de nouveaux pôles principaux apparaissent mais avec une polarité inverse des précédents. Les géophysiciens pensent qu'en moyenne le processus d'inversion se déroule en 6 000 ans (ce qui est très faible à l'échelle géologique), avec une première phase de 2 500 ans de champ faible instable, 1 000 ans d'inversion avec multitudes de pôles, puis à nouveau 2 500 ans de champ faible instable. L'anomalie de l'atlantique sud est supposée être un premier pôle secondaire annonçant que la Terre a entamé un tel processus d'inversion de son champ magnétique. Ce qui pourrait être confirmé par le fait que depuis l'an 2000, l'intensité du champ magnétique terrestre a

chutée de 30%.

Le champ magnétique terrestre nous protège des particules du vent solaire hautement énergétique, si l'affaiblissement du champ magnétique pour une inversion de polarité se confirme cela pourrait avoir à courts termes de graves conséquences pour les télécommunications et à longs termes pour la santé publique (le flux de particules de vent solaire est équivalent à un rayonnement radio-actif). ■

1.3.2 Symétries et champs

Définition 13 (Plans de symétrie et d'anti-symétrie). Soit ρ une densité de charge électrique et \vec{j} une densité de courant. Un plan P est dit plan de symétrie de la densité ρ (resp. \vec{j}) si celle-ci reste inchangée par la symétrie miroir par rapport à P . P est dit plan d'antisymétrie si la densité est changée en $-\rho$ (resp. $-\vec{j}$) par la symétrie miroir par rapport à P .

Propriété 2. Soit P un plan de symétrie de la densité ρ . Soit $\vec{D} = \vec{D}_{\parallel} + \vec{D}_{\perp}$ le déplacement électrique où \vec{D}_{\parallel} est la composante de \vec{D} parallèle au plan P et \vec{D}_{\perp} est la composante orthogonale. Alors sous la réflexion \mathcal{P} par rapport au plan P , on a

$$\mathcal{P}\rho = \rho \Rightarrow \mathcal{P}\vec{D} = \vec{D}_{\parallel} - \vec{D}_{\perp}$$

Soit P un plan d'antisymétrie de la densité ρ . Soit $\vec{D} = \vec{D}_{\parallel} + \vec{D}_{\perp}$ le déplacement électrique où \vec{D}_{\parallel} est la composante de \vec{D} parallèle au plan P et \vec{D}_{\perp} est la composante orthogonale. Alors sous la réflexion \mathcal{P} par rapport au plan P , on a

$$\mathcal{P}\rho = -\rho \Rightarrow \mathcal{P}\vec{D} = -\vec{D}_{\parallel} + \vec{D}_{\perp}$$

Soit P un plan de symétrie de la densité \vec{j} . Soit $\vec{H} = \vec{H}_{\parallel} + \vec{H}_{\perp}$ le déplacement magnétique où \vec{H}_{\parallel} est la composante de \vec{H} parallèle au plan P et \vec{H}_{\perp} est la composante orthogonale. Alors sous la réflexion \mathcal{P} par rapport au plan P , on a

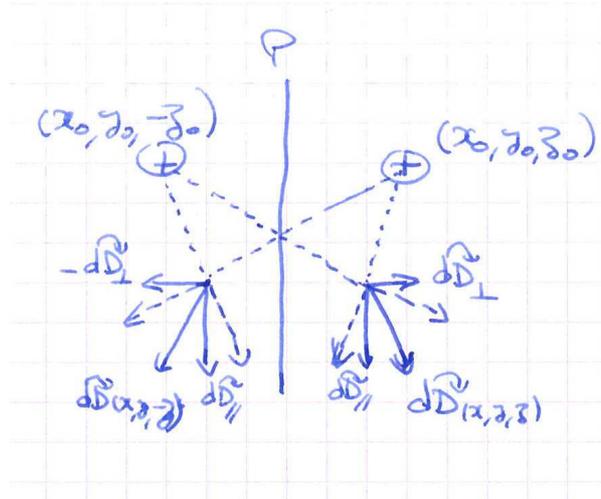
$$\mathcal{P}\vec{j} = \vec{j} \Rightarrow \mathcal{P}\vec{H} = -\vec{H}_{\parallel} + \vec{H}_{\perp}$$

Soit P un plan d'antisymétrie de la densité \vec{j} . Soit $\vec{H} = \vec{H}_{\parallel} + \vec{H}_{\perp}$ le déplacement magnétique où \vec{H}_{\parallel} est la composante de \vec{H} parallèle au plan P et \vec{H}_{\perp} est la composante orthogonale. Alors sous la réflexion \mathcal{P} par rapport au plan P , on a

$$\mathcal{P}\vec{j} = -\vec{j} \Rightarrow \mathcal{P}\vec{H} = \vec{H}_{\parallel} - \vec{H}_{\perp}$$

Preuve : Soit P un plan de symétrie de ρ . On choisit le système de coordonnées cartésien de sorte que $(Oxy) = P$ et tel que $(Oz) \perp P$. Soit un point (x_0, y_0, z_0) . $\mathcal{P}\rho = \rho \iff \rho(x_0, y_0, -z_0) = \rho(x_0, y_0, z_0)$. On considère $d\vec{D}(x, y, z)$ et $d\vec{D}(x, y, -z)$ les déplacements électriques aux points (x, y, z) et $(x, y, -z)$ créés par la charge $\rho(x_0, y_0, z_0)d\tau$ au point (x_0, y_0, z_0) et par la charge $\rho(x_0, y_0, z_0)d\tau$ au point $(x_0, y_0, -z_0)$ symétrique par rapport à P . Un schéma montre que

$$d\vec{D}_{\parallel}(x, y, -z) = d\vec{D}_{\parallel}(x, y, z) \quad d\vec{D}_{\perp}(x, y, -z) = -d\vec{D}_{\perp}(x, y, z)$$



Par superposition des champs en sommant sur toutes les sources :

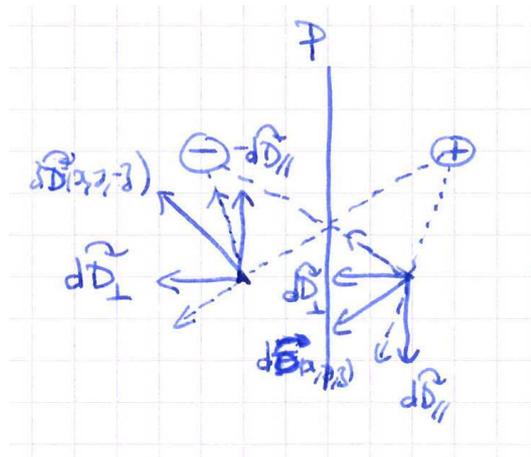
$$\int_{x_0=-\infty}^{+\infty} \int_{y_0=-\infty}^{+\infty} \int_{z_0=0}^{+\infty} d\check{D}_{\parallel}(x, y, -z) = \int_{x_0=-\infty}^{+\infty} \int_{y_0=-\infty}^{+\infty} \int_{z_0=0}^{+\infty} d\check{D}_{\parallel}(x, y, z)$$

$$\int_{x_0=-\infty}^{+\infty} \int_{y_0=-\infty}^{+\infty} \int_{z_0=0}^{+\infty} d\check{D}_{\perp}(x, y, -z) = - \int_{x_0=-\infty}^{+\infty} \int_{y_0=-\infty}^{+\infty} \int_{z_0=0}^{+\infty} d\check{D}_{\perp}(x, y, z)$$

$$\iff \check{D}_{\parallel}(x, y, -z) = \check{D}_{\parallel}(x, y, z) \quad \check{D}_{\perp}(x, y, -z) = -\check{D}_{\perp}(x, y, z)$$

Soit P un plan d'antisymétrie de ρ . $\mathcal{P}\rho = -\rho \iff \rho(x_0, y_0, -z_0) = -\rho(x_0, y_0, z_0)$. Un schéma montre que

$$d\check{D}_{\parallel}(x, y, -z) = -d\check{D}_{\parallel}(x, y, z) \quad d\check{D}_{\perp}(x, y, -z) = d\check{D}_{\perp}(x, y, z)$$



et par superposition des champs en sommant sur toutes les sources, le résultat est démontré pour le déplacement électrique total.

Des raisonnements tout à fait similaires peuvent être conduits pour les déplacements magnétiques. ■

Propriété 3. Le déplacement électrique \check{D} en un point (x, y, z) appartient à tous les plans de symétrie et est orthogonal à tous les plans d'antisymétrie de la densité de charge ρ passant par ce point.
Le déplacement magnétique \check{H} en un point (x, y, z) appartient à tous les plans d'antisymétrie et est orthogonal à tous les plans de symétrie de la densité de courant \check{j} passant par ce point.

Preuve : Ceci découle directement de la propriété précédente appliquée aux champs ayant pour point d'application un point de P . ■

On en déduit que si ρ présente une symétrie sphérique, alors le champ \vec{D} est radial, i.e. $\vec{D} = D(r) * \vec{e}_r$ (où (r, θ, ϕ) est un système de coordonnées sphériques centrées sur le centre de symétrie de ρ). De même si ρ présente une symétrie cylindrique, alors le champ \vec{D} est radial ; et si \vec{j} présente une symétrie cylindrique alors \vec{H} est orthoradial, i.e. $\vec{H} = H(r)\vec{e}_\theta$ (où (r, θ, z) est un système de coordonnées cylindriques centré sur l'axe de symétrie de \vec{j}).

1.3.3 Invariance de jauge

Comme on l'a vu, les équations structurelles impliquent les équations fondamentales des champs, et si on ajoute les équations fondamentales des déplacements, on obtient les équations de propagation spatiale des potentiels. Néanmoins, la structure physique décrite par ces équations présente un degré de liberté "arbitraire" car le choix des potentiels n'est pas fixé de manière univoque. En effet considérons les transformations suivantes :

$$V'(x, y, z) = V(x, y, z) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{A}'(x, y, z) = \vec{A}(x, y, z) + \overrightarrow{\text{grad}}\chi(x, y, z), \quad \chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

les champs électrique et magnétique sont invariants sous cette transformation

$$\vec{E}' = -\overrightarrow{\text{grad}}V' = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \overrightarrow{\text{grad}}k = -\overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{E}$$

$$\vec{B}' = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}' = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{grad}}\chi = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{B}$$

Les nouveaux potentiels définissent donc les mêmes champs, et satisfont donc aux mêmes équations de propagation que les potentiels initiaux. Rien ne permet de fixer les valeurs de k et de χ . Un choix particulier est appelé choix de jauge, les transformations de (V, \vec{A}) vers (V', \vec{A}') sont appelées transformations de jauge, l'invariance de (\vec{E}, \vec{B}) sous ces transformations est appelée invariance de jauge ; et l'ensemble porte le nom de symétrie de jauge. La symétrie de jauge est en fait la structure la plus fondamentale. En effet, prenons comme postulat de l'électricité, que la transformation $V \rightarrow V + k$ laisse invariante les mesures physiques. Il est clair que l'on peut définir une quantité indépendante du choix de jauge par $V(\vec{X} + \lambda\vec{u}) - V(\vec{X})$ (où $\vec{X} = (x, y, z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et \vec{u} est un vecteur quelconque). Mais cette quantité dépend du point X et de la translation $\lambda\vec{u}$, on obtient une quantité ne dépendant plus que de X (et de la direction \vec{u}) en faisant tendre λ vers 0 :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{V(\vec{X} + \lambda\vec{u}) - V(\vec{X})}{\lambda} = \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \vec{u}$$

$\overrightarrow{\text{grad}}V$ est donc la quantité naturelle ne dépendant que du point considéré, indépendante du choix de jauge et dérivant de V . Avec le choix de signe approprié, on retrouve $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$. De même pour le magnétisme. En résumé

$$V \simeq V + k \implies \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \implies \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0} \\ \text{div}\vec{D} = \rho \end{array} \right\} \implies \Delta V + \frac{* \rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\vec{A} \simeq \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\chi \implies \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} \implies \left. \begin{array}{l} \text{div}\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \vec{j} \end{array} \right\} \implies \Delta \vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}} * \text{div} * \vec{A} + \mu_0 * \vec{j} = \vec{0}$$

La théorie de l'électromagnétisme a donc deux postulats, d'une part la forme de la symétrie de jauge, et d'autre part les théorèmes de Gauss et d'Ampère. Les théories des autres interactions (nucléaire faible, nucléaire forte, grand unifiée, etc) sont construites sur ce même modèle.

Le fait que les potentiels soient définis à un changement de jauge près, conduit à penser que dans la dualité de description potentiels/champs, ce sont les champs qui sont porteurs du sens physique (de l'essence de l'électromagnétisme), les potentiels n'étant que des intermédiaires de calcul. Cette posture, adoptée d'ailleurs par la très grande majorité des physiciens, se tient puisque épistémologiquement parlant, il est plus satisfaisant que les entités physiques à caractère ontologique soient parfaitement et univoquement définies. Une entité qui dépend d'un choix arbitraire du physicien ne semble pas pouvoir donner une description objective

et réaliste⁵ de la nature. Mais comme on l'a vu, ce choix arbitraire est structurellement plus fondamental que les équations des champs. Vu que les transformations de jauge ne sont pas à proprement parlé des objets⁶, on peut adopter la posture consistant à considérer que les objets sur lesquels ils portent, les potentiels, sont les porteurs du sens physique. On verra que l'effet Aharonov-Bohm apporte des arguments en faveur de cette posture⁷.

Remarquons qu'il est possible de construire à partir de V et \vec{A} des quantités qui sont définies de manière univoque. La différence de potentiel entre deux points ou *tension* (mesurée en V) :

$$U((x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2)) = V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1)$$

et la circulation du potentiel sur un chemin fermé ou *boucle de Wilson* (mesurée en Wb) :

$$w(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Ces deux entités sont invariantes sous changement de jauge :

$$U'((x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2)) = (V(x_2, y_2, z_2) + k) - (V(x_1, y_1, z_1) + k) = U((x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2))$$

$$w'(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}}\chi \cdot d\vec{\ell} = w(\mathcal{C})$$

mais ces quantités sont non-locales (car définies sur plusieurs points). Remarque : pour des raisons qui apparaîtront plus claires dans la suite, on définit généralement la boucle de Wilson par

$$W(\mathcal{C}) = e^{-i\hbar^{-1}e \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}$$

(\hbar étant la constante de Planck et e la charge électrique élémentaire).

Le choix de jauge étant arbitraire, celui-ci est fixé par commodité de calcul (certains choix simplifient le calcul, l'expression analytique, ou donnent une meilleure précision dans les simulations numériques car mieux adaptés à la méthode d'approximation). En électrostatique, on choisit généralement (quand c'est possible), la jauge pour laquelle le potentiel s'annule en l'infini (on rappelle que ce choix est arbitraire). En magnétostatique, on adopte souvent le choix dit de **jauge de Coulomb**, pour lequel $*\text{div} * \vec{A} = 0$. Ce choix est possible, car si $*\text{div} * \vec{A} \neq 0$, alors on pose χ solution de l'équation

$$\Delta\chi + *\text{div} * \vec{A} = 0$$

alors $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\chi$ vérifie

$$*\text{div} * \vec{A}' = *\text{div} * \vec{A} + *\text{div} * \overrightarrow{\text{grad}}\chi = *\text{div} * \vec{A} + \Delta\chi = 0$$

Le choix de la jauge de Coulomb a l'avantage de simplifier l'équation de propagation du potentiel :

$$\vec{\Delta}\vec{A} + \mu_0 * \overset{\curvearrowright}{j} = \vec{0} \quad \text{avec le choix de la jauge de Coulomb } *\text{div} * \vec{A} = 0$$

et de la rendre similaire à l'équation de Poisson.

5. ces deux termes étant utilisés ici dans leur sens philosophique, le *réalisme objectiviste* consistant en la croyance en l'existence d'une réalité en soi, accessible et composée d'objets

6. dans le cadre du *réalisme structural*, la réalité en soi n'est pas constituée d'objets, seules les structures sont réelles. Une interprétation physique faite dans ce cadre induirait immédiatement que la symétrie de jauge est en elle-même la seule réalité physique. Ce point de vue est peu populaire, la grande majorité des physiciens sont des réalistes objectivistes.

7. remarque : l'argument naïf souvent invoqué pour justifier que les champs sont physiques et pas les potentiels, à savoir qu'ils seraient mesurables expérimentalement, est faux. Aucun dispositif expérimental ne mesure directement un champ, la seule et unique quantité qui soit directement mesurable est la force. Les dispositifs mesurant le champ électrique mesurent en réalité la force électrique s'appliquant à une charge connue. À partir de cette mesure primaire, on obtient le champ par une reconstruction mathématique $\vec{E} = \vec{F}/q$, on peut faire de même pour le potentiel même si la reconstruction est plus compliquée

1.3.4 Champs et potentiels en fonction des sources et conditions aux interfaces

Proposition 1. Soit ρ une distribution volumique continue de charges électriques à support compact. La solution de l'équation de Poisson $\Delta V + \frac{*p}{\epsilon_0} = 0$ avec le choix de jauge d'annulation du potentiel en l'infini est

$$V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x, y, z) d\tau}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

La solution de l'équation $\text{div} \vec{D} = \rho$ est

$$\vec{D}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{* \rho(x, y, z) \overrightarrow{XX_0} d\tau}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}$$

où $\overrightarrow{XX_0} = \begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \\ z_0 - z \end{pmatrix}$.

Proposition 2. Soit \vec{j} une distribution surfacique de courant à support compact. La solution de l'équation $\vec{\Delta} \vec{A} + \mu_0 * \vec{j} = 0$ est

$$\vec{A}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(x, y, z) d\tau}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

expression du potentiel magnétique avec le choix de la jauge de Coulomb. La solution de l'équation $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ est

$$\vec{H}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{* \vec{j}(x, y, z) \wedge \overrightarrow{XX_0} d\tau}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}$$

où $\overrightarrow{XX_0} = \begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \\ z_0 - z \end{pmatrix}$.

Les solutions des équations sont plus compliquées quand les distributions ne sont pas continues, exemple une distribution ρ_{int} à l'intérieur d'une surface fermée \mathcal{S} , une distribution ρ_{ext} à l'extérieur et une distribution surfacique σ à l'interface. La résolution de l'équation de Poisson et de son analogue dans le cas général de même quand de le cas particulier de distributions continues, nécessite des outils de la théorie des équations aux dérivées partielles (fonctions de Green, distributions, intégration dans le plan complexe) hors de portée de ce cours. Lorsque les problèmes se compliquent (en particulier pour l'électromagnétisme dans des matériaux, suite du cours), il faut utiliser une méthode d'approximation appelée *méthode des éléments finis* également hors de portée de ce cours (cette méthode est basée sur les liens entre la nature de champs (scalaires, vectoriels, pseudovectoriels ou pseudoscalaires) et les objets géométriques (points, chemins, surfaces, volumes)). Dans les cas où le problème présente un haut degré de symétrie (sphérique, cylindrique, toroïdale), l'utilisation directe des formes intégrales des théorèmes de Gauss et d'Ampère constitue une résolution rapide du problème.

Propriété 4 (Condition de passage aux interfaces du champ électrique). Soit une surface orientée \mathcal{S} présentant une densité surfacique de charges σ . Soit \vec{n} le vecteur normal à \mathcal{S} en un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$, de direction cohérente avec l'orientation de \mathcal{S} . Soient \vec{E}_1, \vec{D}_1 et \vec{E}_2, \vec{D}_2 les champs et déplacements électriques dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0) de part et d'autre de \mathcal{S} (\vec{E}_2 se trouvant du côté pointé par \vec{n}). Alors

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n} = \vec{0}$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma(x_0, y_0, z_0)$$

Autrement dit, la composante tangentielle de \vec{E} se conserve au passage à l'interface, mais la composante normale de \vec{D} est discontinue.

Preuve : Soit \vec{u} un vecteur unitaire parallèle à S au niveau de (x_0, y_0, z_0) . Soit un chemin $ABCD$ consistant en un rectangle tel que $[AB]$ et $[CD]$ soient de part et d'autre de S , tel que (x_0, y_0, z_0) soit le centre de $ABCD$ et tel que \vec{AB} soit parallèle à \vec{u} . On suppose de plus que $AB = CD = h$ et que $BC = DA = h^2$ avec $h \rightarrow 0$. Par la loi de Faraday, on a

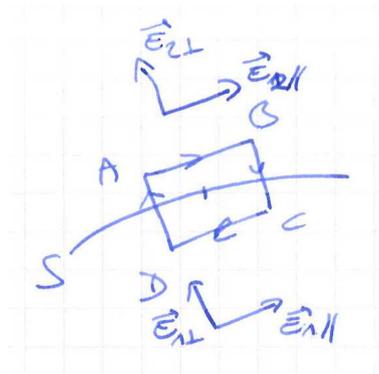
$$\oint_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

or

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{AB} \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} - \int_{DC} \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \vec{E}_{1\parallel}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}h - \vec{E}_{2\parallel}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}h + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

avec $\vec{E}_{1\parallel}$ la projection de \vec{E}_1 sur le plan tangent à S en (x_0, y_0, z_0) . On réitère le calcul précédent avec un rectangle $ABCD$ tel que \vec{AB} soit parallèle à \vec{v} . On a alors $\vec{E}_{1\parallel}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{v}h - \vec{E}_{2\parallel}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{v}h = \mathcal{O}(h^2)$. (\vec{u}, \vec{v}) formant une base sur le plan tangent à S on en déduit que

$$\vec{E}_{1\parallel}(x_0, y_0, z_0) = \vec{E}_{2\parallel}(x_0, y_0, z_0)$$



Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que les faces $ABCD$ et $EFGH$ soient de part et d'autre de S et tel que (x_0, y_0, z_0) soit le centre de $ABCDEFGH$. On suppose de plus les aires suivantes : $A(ABCD) = A(EFGH) = h$ et $A(ABEF) = A(BCGF) = A(DCGH) = A(ADHE) = h^2$, avec $h \rightarrow 0$. Par le théorème de Gauss, on a

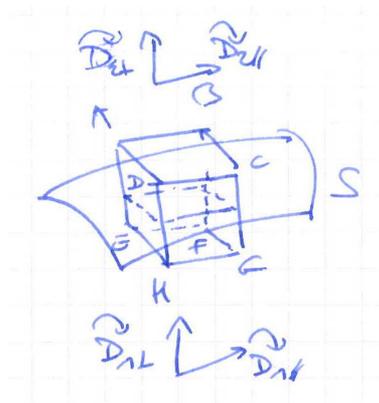
$$\oiint_{ABCDEFGH} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{S \cap ABCDEFGH} \sigma dS$$

or

$$\begin{aligned} \iint_{S \cap ABCDEFGH} \sigma dS &= \sigma(x_0, y_0, z_0)h + \mathcal{O}(h^2) \\ \oiint_{ABCDEFGH} \vec{D} \cdot d\vec{S} &= D_{2\perp}(x_0, y_0, z_0)h - D_{1\perp}(x_0, y_0, z_0)h + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

où $D_{1\perp}$ est la projection de \vec{D}_1 sur la droite orthogonale à S en (x_0, y_0, z_0) . D'où

$$D_{2\perp}(x_0, y_0, z_0) - D_{1\perp}(x_0, y_0, z_0) = \sigma(x_0, y_0, z_0)$$





Propriété 5 (Condition de passage aux interfaces du champ magnétique). *Soit une nappe de courant \mathcal{S} de densité surfacique $\vec{\mathcal{I}}$. Soit \vec{n} un vecteur normal à \mathcal{S} en un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Soient \vec{B}_1, \vec{H}_1 et \vec{B}_2, \vec{H}_2 les champs et déplacements magnétiques dans un voisinage de (x_0, y_0, z_0) de part et d'autre de \mathcal{S} (\vec{H}_2 se trouvant du côté pointé par \vec{n}). Alors*

$$\begin{aligned} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} &= 0 \\ (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{n} &= \vec{\mathcal{I}}(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

Autrement dit, la composante normale de \vec{B} se conserve au passage par l'interface, mais la composante tangentielle de \vec{H} est discontinue.

Preuve : Démonstration similaire à la précédente en utilisant la conservativité de \vec{B} et le théorème d'Ampère. ■

1.3.5 Énergies électrostatique et magnétostatique

L'énergie potentielle d'une particule ponctuelle de charge q plongée dans un potentiel électrique V est

$$W(x, y, z) = qV(x, y, z)$$

que l'on peut voir comme le travail nécessaire pour amener la particule de l'infini à la position (x, y, z) (on a choisi le potentiel nul en l'infini). Soit n charges ponctuelles $(q_i)_{i=1, \dots, N}$, l'énergie potentielle de la charge q_i est

$$W_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

r_{ij} étant la distance entre la charge q_i et la charge q_j . L'énergie potentielle totale due aux interactions mutuelles du système de charges est donc

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

(la sommation est telle que les termes infinis d'auto-interaction soient éliminés, et telle que chaque interaction ne soit comptée qu'une seule fois). On peut réécrire W sous la forme

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i, j; i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

où on compte deux fois les interactions mutuelles, d'où la division par deux.

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i) \quad V(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}$$

Pour une distribution de charge continue ρ à support compact, on voit par analogie que

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(x, y, z) V(x, y, z) d\tau$$

En utilisant l'équation de Poisson, on a

$$W = -\frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \epsilon_0 * \Delta V \times V d\tau = -\frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \epsilon_0 \operatorname{div} * \overrightarrow{\operatorname{grad}} V \times V d\tau$$

or par la règle de Liebniz $\operatorname{div}(*\vec{E}V) = \operatorname{div}(*\vec{E}) \times V + *\vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$, on a (intégration par parties)

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}(V * \vec{E}) d\tau - \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \epsilon_0 * \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} V d\tau$$

mais par le théorème de Stokes

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}(V * \vec{E}) d\tau = \lim_{r \rightarrow +\infty} \oint_{S_r} V * \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où S_r est une sphère de rayon de r . Vu que V décroît vers zéro comme $1/r$ et que E décroît vers zéro comme $1/r^2$ (du fait de la compacité du support de ρ), cette dernière quantité est nulle. On en déduit que

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

De la même façon, en partant de l'énergie potentielle magnétique d'une particule de charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un potentiel magnétique \vec{A} :

$$W(x, y, z) = q\vec{v} \cdot \vec{A}(x, y, z)$$

on a l'énergie potentielle totale d'une distribution de courant à support compact :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{H} \cdot \vec{B} d\tau \end{aligned}$$

Chapitre 2

Électrostatique et magnétostatique dans les milieux matériels

2.1 Dipôles et moments dipolaires

Définition 14 (Moment dipolaire électrique). Soit deux charges fixes $-q$ et $+q$ placées respectivement aux points A et B de l'espace. On appelle moment dipolaire électrique associé au dipôle AB , le vecteur :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{AB}$$

L'introduction du moment dipolaire permet d'écrire facilement l'expression du potentiel électrique en un point quelconque M de l'espace :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2}$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire dans la direction du centre O du segment $[AB]$ vers le point M et r est la distance OM .

Preuve : On note $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, $r_+ = \|\overrightarrow{BM}\|$, $r_- = \|\overrightarrow{AM}\|$ et $d = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$. Dans le choix de jauge où le potentiel s'annule en l'infini on a

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

or

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_+} &= \frac{1}{\|\overrightarrow{BM}\|} \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\|\overrightarrow{BO}\|^2 + \|\overrightarrow{OM}\|^2 + 2\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OM}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 - \frac{r}{q}\vec{p} \cdot \vec{u}}} \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{qr} + \frac{d^2}{r^2}}} \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{2qr} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \right) \end{aligned}$$

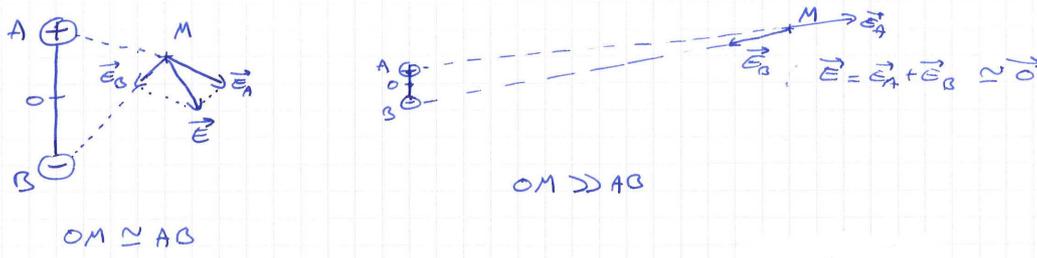
de même

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_-} &= \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 + \frac{r}{q}\vec{p} \cdot \vec{u}}} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{2qr^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Le moment dipolaire mesure le champ électrique "résiduel" du dipôle neutre AB . En effet, si le point M est proche de AB au sens où la longueur OM est du même ordre que la longueur AB , $V(M)$ sera de l'ordre de q/r ; on distingue les deux charges et l'effet de celles-ci (la résultante de la somme des champs électriques n'est pas nulle, sauf dans le plan de symétrie). Par contre si M est loin de AB , $OM \gg AB$, $V(M) \simeq 0$; on ne distingue plus les deux charges, qui de loin semblent sur le même point. L'angle entre la droite portant le champ électrique de A et celle de B étant très faible, la résultante des champs électriques est quasi nulle. On voit donc, que l'influence d'un dipôle ne dépend pas seulement de sa charge mais aussi de sa longueur, est donc de son moment dipolaire.



Une quantité similaire peut être définie dans le cas du magnétisme :

Définition 15 (Moment dipolaire magnétique). Soit une boucle de courant d'intensité I et de vecteur surface \vec{S} ($\|\vec{S}\|$ est l'aire du disque délimité par la boucle de courant et \vec{S} est normal à la surface dans la direction indiquant le sens du courant). On appelle moment dipolaire magnétique associé à la boucle de courant, le vecteur :

$$\vec{\mu} = I\vec{S}$$

Le potentiel magnétique en un point quelconque M s'écrit alors

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire dans la direction du centre O de la boucle vers le point M et r est la distance OM .

Si on applique un champ électrique extérieur \vec{E} sur un dipôle AB , la force résultante est nulle :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = -q\vec{E} + q\vec{E} = \vec{0}$$

mais par contre le moment des forces ne l'est pas

$$\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = q(-\vec{OA} + \vec{OB}) \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Le moment des forces étant minimal quand \vec{E} et \vec{p} sont alignés, les forces s'exerçant sur le dipôle tendent à orienter celui-ci dans la direction du champ électrique extérieur.

De la même façon, soit un champ magnétique extérieur \vec{B} appliqué à une boucle de courant \mathcal{C} , la résultante des forces est nulle :

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{C}} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} IRB_z \cos \theta \\ IRB_z \sin \theta \\ -IR(B_x \cos \theta + B_y \sin \theta) \end{pmatrix} d\theta = \vec{0}$$

où $d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta$ dans un système de coordonnées cartésiennes dont le plan (Oxy) se confond avec le plan de la boucle \mathcal{C} , θ est une coordonnée curviligne sur la boucle orientée suivant le sens du courant, et R le rayon de la boucle. Par contre le moment des forces n'est pas nul :

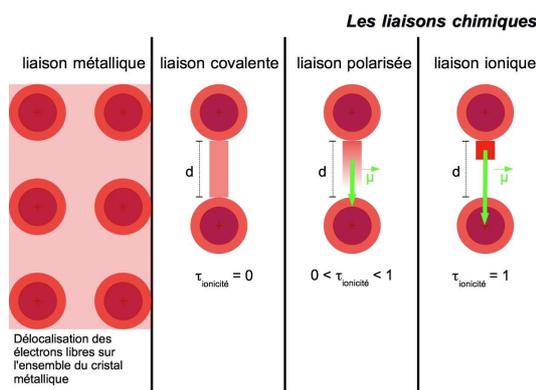
$$\vec{M} = \int_{\mathcal{C}} R \vec{e}_R \wedge (I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

Les forcent tendent à aligner l'axe de la boucle de courant dans la direction du champ magnétique extérieur.

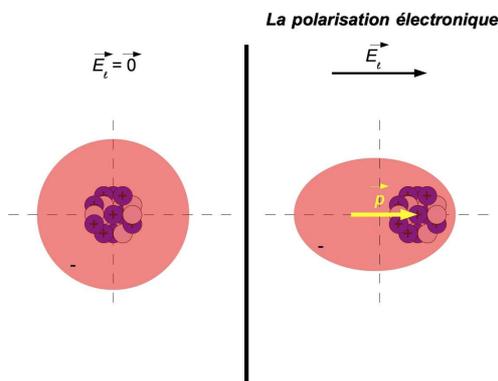
2.2 Propriétés électriques des matériaux

Dans ce chapitre, on considère un milieu matériel diélectrique dans lequel se trouve “plongé” des charges électriques. La différence essentielle entre l'électromagnétisme dans un milieu matériel par rapport au vide, est que les charges électriques sources du champ vont être entourées d'atomes constitués de particules électriquement chargées, celles-ci vont réagir au champ électrique produit par les sources et induire leur propre champ.

2.2.1 La polarisation



Soit un atome neutre du diélectrique voyant le champ électrique local \vec{E}_l . Ce champ est la superposition du champ extérieur (produit par les sources) et du champ produit par les autres atomes du diélectrique. L'action de \vec{E}_l va déformer l'atome, le nuage électronique se déformant dans la direction opposée à \vec{E}_l et le noyaux se déplaçant un peu dans la direction de \vec{E}_l . Il s'en suit la création d'un moment dipolaire électrique induit par \vec{E}_l .



L'amplitude de la déformation, et donc la longueur du dipôle, augmentant avec l'intensité du champ local, on peut modéliser la réaction de l'atome par un moment dipolaire proportionnel à \vec{E}_l :

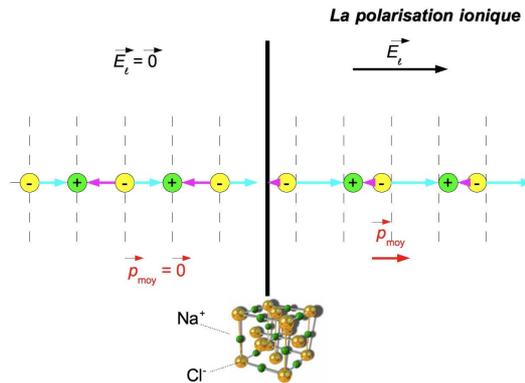
$$\vec{p} = \alpha_e \vec{E}_l$$

Le coefficient de proportionnalité α_e est appelé polarisabilité électronique de l'atome, et peut être assimilé au volume de déformation de celui-ci. Ainsi plus un atome est gros, plus il se déformera facilement et plus le moment dipolaire induit sera grand.

L'ensemble des atomes du milieu se trouve alors polarisés sous l'action du champ électrique extérieur ; chaque “point” du milieu (chaque élément de volume infinitésimal $d\tau$) est alors caractérisé par un moment dipolaire $d\vec{p}$ somme des moments dipolaires des atomes contenus dans $d\tau$. Le milieu tout entier est alors rempli d'un champ de densité volumique de moment dipolaires électriques $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$ appelé champ de polarisation (ou

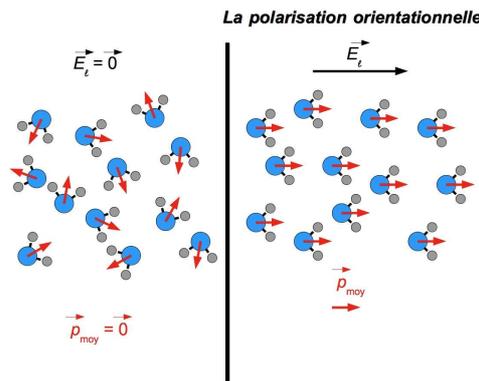
simplement polarisation). Le phénomène est appelé polarisation électronique de la matière, et est présent dans tout les milieux diélectriques.

Considérons que le milieu diélectrique est constitué par un cristal ionique, c'est à dire un agencement régulier d'ions positifs et d'ions négatifs, exemple : le sel (chlorure de sodium) Na^+Cl^- (cristal à mailles cubiques, avec alternance des ions sodium et chlorure sur les nœuds). Le champ électrique local va avoir pour effet de déformer les liaisons du cristal, les liaisons $+ -$ (dans le sens de \vec{E}_l) vont se contracter alors que les liaisons $- +$ vont se dilater. Il en résulte l'apparition d'un moment dipolaire électrique associé à chaque liaison, $\vec{p} = \alpha_i \vec{E}_l$, où α_i est appelé polarisabilité ionique.



Le milieu présente alors dans son ensemble un phénomène de polarisation ionique. Ce phénomène se produit également dans des molécules présentant une liaison ionique. La polarisation ionique existe donc aussi pour les cristaux, les liquides et les gaz composés de telles molécules.

Enfin du fait de leur géométrie particulière, certaines molécules présentent un moment dipolaire électrique permanent (exemple la molécule d'eau), un milieu constitué de telles molécules est dit polaire. Dans un gaz ou un liquide, du fait de l'orientation aléatoire des molécules aucune polarisation macroscopique n'est présente. Mais sous l'action d'un champ électrique extérieur, les dipôles vont avoir tendance à s'orienter dans la direction du champ et induire un champ de polarisation macroscopique dit orientationnel.



2.2.2 Excitation électrique

Soit ρ une distribution volumique de charges à support borné, plongée dans un milieu matériel (supposé infini). On note \vec{E} le champ électrique et \vec{P} la polarisation du milieu réponse à \vec{E} . Le potentiel électrique total est la somme du potentiel électrique induit par les charges externes ρ et du potentiel induit par la polarisation.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{P} \cdot \vec{u}}{r^2} d\tau$$

r étant la distance entre le point d'intégration et (x, y, z) , \vec{u} est un vecteur unitaire pointant de la direction du point d'intégration vers (x, y, z) . On remarque que

$$\overrightarrow{\text{grad}}(1/r) = \frac{\vec{u}}{r^2}$$

le gradient étant calculé avec le point d'intégration comme variable $((x, y, z))$ est fixe dans le calcul du gradient), d'où

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \overset{\curvearrowright}{P} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(1/r) d\tau$$

par application de la règle de Leibniz, on a

$$\text{div} \left(\frac{\overset{\curvearrowright}{P}}{r} \right) = \frac{\text{div} \overset{\curvearrowright}{P}}{r} + \overset{\curvearrowright}{P} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(1/r)$$

d'où

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \text{div} \left(\frac{\overset{\curvearrowright}{P}}{r} \right) d\tau - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{div} \overset{\curvearrowright}{P}}{r} d\tau$$

on applique le théorème de Stokes et en supposant que $\overset{\curvearrowright}{P}$ s'annule en l'infini comme $1/r^2$ (puisque \vec{E} s'annule en l'infini comme $1/r^2$), on a

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \text{div} \left(\frac{\overset{\curvearrowright}{P}}{r} \right) d\tau = \lim_{r \rightarrow +\infty} \oint_{S_r} \frac{\overset{\curvearrowright}{P} \cdot d\vec{S}}{r} = 0$$

où S_r est une sphère de rayon r centrée sur (x, y, z) . D'où

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho - \text{div} \overset{\curvearrowright}{P}}{r} d\tau$$

Par analogie avec l'équation de Poisson, on a

$$\Delta V + * \frac{\rho - \text{div} \overset{\curvearrowright}{P}}{\epsilon_0} = 0$$

(ici le Laplacien a pour variable (x, y, z) le point où l'on "regarde" le potentiel). Or $\Delta V = * \text{div} * \overrightarrow{\text{grad}} V = - * \text{div} * \vec{E}$, on a donc

$$\text{div} * \vec{E} = \frac{\rho - \text{div} \overset{\curvearrowright}{P}}{\epsilon_0}$$

ou encore

$$\text{div}(\epsilon_0 * \vec{E} + \overset{\curvearrowright}{P}) = \rho$$

par comparaison avec le théorème de Gauss dans le vide, on voit que le champ de vecteurs $\overset{\curvearrowright}{D}$ n'est plus simplement proportionnel à \vec{E} mais prend on compte la réponse du milieu diélectrique au champ extérieur. C'est pour cela que $\overset{\curvearrowright}{D}$ porte le nom d'excitation électrique.

Principe 4 (Équations structurelles et fondamentales dans un milieu diélectrique). • *Équation structurelle :*

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

• *Relation constitutive :*

$$\overset{\curvearrowright}{D} = \epsilon_0 * \vec{E} + \overset{\curvearrowright}{P}$$

- Loi de Faraday, forme locale :

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

forme globale : pour tout chemin fermé \mathcal{C}

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Théorème de Gauss, forme locale

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

forme globale : pour toute surface fermée \mathcal{S} délimitant un volume \mathcal{V}

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau$$

La théorie électrostatique dans un milieu diélectrique est donc tout à fait similaire à la théorie dans le vide mais avec une expression non-triviale de l'excitation électrique \vec{D} . En particulier les conditions de passage aux interfaces restent les mêmes.

Le problème maintenant est d'exprimer \vec{P} en fonction de \vec{E} . On a vu qu'au niveau microscopique l'origine de la polarisation est le champ électrique local, superposition du champ externe et du champ issu de la polarisation des atomes environnants. Ainsi la relation entre \vec{P} et \vec{E} peut être très compliquées (d'ordre tensorielle). Mais on s'intéressera souvent à des milieux particuliers où la réaction du milieu est simple.

Définition 16 (MLHI). On dit d'un milieu diélectrique qu'il est linéaire, homogène et isotrope (en abrégé MLHI), si

$$\vec{P}(\vec{x}) = \epsilon_0 \chi * \vec{E}(\vec{x})$$

où χ est appelée susceptibilité électrique.

- Un milieu est dit non-linéaire si χ est une fonction de $E = \|\vec{E}\|$, i.e. $\vec{P}(\vec{x}) = \epsilon_0 \chi(E(\vec{x})) * \vec{E}(\vec{x})$.
- Un milieu est dit anisotrope si $[\chi]$ est une matrice 3×3 symétrique, i.e. $\vec{P}(\vec{x}) = \epsilon_0 [\chi] \vec{E}(\vec{x})$ (* devient le produit matriciel).
- Un milieu est dit inhomogène si χ est une fonction de \vec{x} , i.e. $\vec{P}(\vec{x}) = \epsilon_0 \chi(\vec{x}) * \vec{E}(\vec{x}) = \epsilon_0 \int \int_{\mathbb{R}^3} \chi(\vec{x} - \vec{x}') \vec{E}(\vec{x}') d\vec{x}'$ où * est appelé produit de convolution.

Dans un MLHI on a

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) * \vec{E}$$

Définition 17 (Permittivité électrique). La permittivité électrique d'un MLHI de susceptibilité χ est la quantité :

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)$$

on appelle $\epsilon_r = 1 + \chi$ permittivité relative du milieu.

On notera de plus que dans un MLHI le théorème de Gauss peut s'écrire :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

ainsi le champ électrique est réduit d'un facteur $\frac{\epsilon_0}{\epsilon}$ par rapport à ce qu'il serait dans le vide. Ceci est du au fait que le champ extérieur génère une polarisation atomique dont le champ s'oppose à sa cause.

Enfin, on a l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{* \rho}{\epsilon} = 0$$

et par conséquent l'énergie électrostatique dans MLHI s'écrit toujours :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

2.2.3 Milieux paraélectriques

On s'intéresse maintenant à des milieux dont les molécules présentent des moments dipolaires permanents. En plus de la réponse diélectrique (polarisations électronique et éventuellement ionique), ces milieux vont présenter une polarisation orientationnelle. Le champ électrique externe a tendance à orienter dans sa direction les moments dipolaires permanents alors que l'agitation thermique a tendance à les désorienter. Soit \vec{p} le moment dipolaire permanent d'une molécule, alors le champ de polarisation est

$$\vec{P} = np \langle \cos \theta \rangle_T * \vec{u}$$

où n est la densité volumique de molécules, \vec{u} est un vecteur unitaire dans la direction du champ externe, $\vec{u} = \frac{\vec{E}_{ext}}{\|\vec{E}_{ext}\|}$, et $\langle \cos \theta \rangle_T$ est la moyenne du cosinus de l'angle entre \vec{p} et \vec{E}_{ext} prise sur toutes les molécules lorsque le gaz se trouve à la température T .

Le calcul précis de $\langle \cos \theta \rangle_T$ nécessite des outils de thermodynamique statistique (cf. fin de paragraphe), néanmoins on peut imaginer le comportement de $\langle \cos \theta \rangle_T$ en fonction de T . Lorsque $T \rightarrow +\infty$, l'agitation thermique domine sur le champ électrique externe et l'orientation des molécules va être aléatoire. On va donc trouver autant de molécules faisant un angle θ avec \vec{E}_{ext} que de molécules faisant un angle $\theta + \frac{\pi}{2}$, si bien que la moyenne est nulle. Lorsque $T \rightarrow 0$, le champ externe domine sur l'agitation thermique et toutes les molécules sont orientées suivant \vec{E}_{ext} .

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \langle \cos \theta \rangle_T = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \langle \cos \theta \rangle_T = 1$$

Dans un milieu paraélectriques, en l'absence de champ électrique externe, l'agitation thermique induit une désorientation des molécules quelque soit la température. Pour des températures pas trop proches de $0K$, les matériaux paraélectriques sont caractérisés par la loi de Curie :

$$\chi(T) = \frac{C}{T}$$

La démonstration de ces propriétés est donnée ci-dessous.

Preuve : On commence par calculer l'expression de l'énergie d'interaction d'un dipôle électrique avec un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} . On note A et B les positions des charges $-q$ et q .

$$\mathcal{E} = q(V_{ext}(B) - V_{ext}(A))$$

Or la longueur $AB = \frac{p}{q}$ étant petite (\vec{p} moment dipolaire électrique) on peut écrire

$$\begin{aligned} V_{ext}(B) &= V_{ext}(A + \frac{\vec{p}}{q}) \\ &= V_{ext}(A) + \frac{1}{q} \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V_{ext|A} + \mathcal{O}(p^2/q^2) \\ &= V_{ext}(A) - \frac{1}{q} \vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}(A) + \mathcal{O}(p^2/q^2) \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$ (en négligeant les corrections d'ordre 2).

On considère un moment dipolaire particulier \vec{p} en interaction avec le thermostat de température T constitué des autres moments dipolaires. La norme de \vec{p} étant constante mais pas son orientation, l'espace de phase accessible est constitué uniquement de l'ensemble des orientations (θ, ϕ) (repère sphérique dont la direction \vec{e}_z s'identifie avec la direction de \vec{E}_{ext}) – l'énergie \mathcal{E} (l'Hamiltonien du système) ne dépendant que de θ et ϕ , il n'y a pas de moments conjugués. Étant dans le cas de la distribution canonique, on calcule la fonction de partition du système :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{\beta p E_{ext} \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} e^{\beta p E_{ext} \cos \theta} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \left[-\frac{e^{\beta p E_{ext} \cos \theta}}{\beta p E_{ext}} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2\pi}{\beta p E_{ext}} (e^{\beta p E_{ext}} - e^{-\beta p E_{ext}}) \\ &= \frac{4\pi}{\beta p E_{ext}} \sinh(\beta p E_{ext}) \end{aligned}$$

d'où la distribution d'états

$$d\mu(\theta, \phi) = \frac{\beta p E_{ext}}{4\pi \sinh(\beta p E_{ext})} e^{\beta p E_{ext} \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi$$

On calcule alors la moyenne de $\cos \theta$:

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle &= \frac{\beta p E_{ext}}{4\pi \sinh(\beta p E_{ext})} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{\beta p E_{ext} \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{\beta p E_{ext}}{2 \sinh(\beta p E_{ext})} \int_0^{\pi} e^{\beta p E_{ext} \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\beta p E_{ext}}{2 \sinh(\beta p E_{ext})} \left(\left[-\cos \theta \frac{e^{\beta p E_{ext} \cos \theta}}{\beta p E_{ext}} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin \theta \frac{e^{\beta p E_{ext} \cos \theta}}{\beta p E_{ext}} d\theta \right) \\ &= \frac{\beta p E_{ext}}{2 \sinh(\beta p E_{ext})} \left(\frac{e^{\beta p E_{ext}} + e^{-\beta p E_{ext}}}{\beta p E_{ext}} - \frac{1}{\beta p E_{ext}} \left[-\frac{e^{\beta p E_{ext} \cos \theta}}{\beta p E_{ext}} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\tanh(\beta p E_{ext})} - \frac{1}{\beta p E_{ext}} \\ &= \frac{1}{\tanh\left(\frac{p E_{ext}}{k_B T}\right)} - \frac{k_B T}{p E_{ext}} \end{aligned}$$

où k_B est la constante de Boltzmann.

On pose $x = \frac{p E_{ext}}{k_B T}$, $T \rightarrow 0 \iff x \rightarrow +\infty$ et $T \rightarrow +\infty \iff x \rightarrow 0$; et on étudie la fonction

$$\langle \cos \theta \rangle(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \langle \cos \theta \rangle(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (1 + e^{-2x})}{e^x (1 - e^{-2x})} = 1$$

Pour étudier la fonction au voisinage de $x = 0$ on procède à un développement limité :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

d'où

$$\begin{aligned} (e^x - e^{-x})^{-1} &= \left(2x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2x} \left(1 + \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3) \right) \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{x}{12} + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned}$$

et

$$e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x} &= \left(\frac{1}{2x} - \frac{x^2}{12} + \mathcal{O}(x^2) \right) (2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)) - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2) - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x}{3} + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned}$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \langle \cos \theta \rangle(x) = 0$.

On retrouve bien les propriétés attendues, $\lim_{T \rightarrow 0} \langle \cos \theta \rangle = 1$ et $\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \cos \theta \rangle = 0$.

On a de plus l'expression de la polarisation

$$P = np \langle \cos \theta \rangle = \epsilon_0 \chi E_{ext}$$

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{pE_{ext}}{3k_B T} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

d'où

$$\chi(T) = \frac{np^2}{3k_B \epsilon_0} \frac{1}{T} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

On retrouve bien la loi de Curie avec pour constante de Curie du matériau $C = \frac{np^2}{3k_B \epsilon_0}$. ■

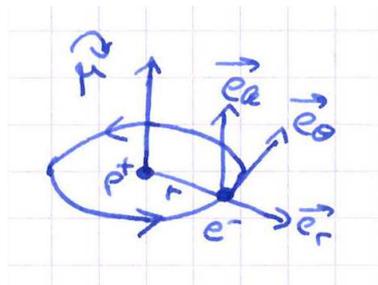
Remarque : il existe aussi des milieux ferroélectriques qui présentent à basse température une polarisation spontanée même en l'absence de champ électrique externe. Cette polarisation est due à une très forte interaction entre les dipôles des différentes molécules. Le champ électrique induit par le moment dipolaire d'une molécule va chercher à orienter dans sa direction les moments dipolaires des molécules voisines. Si l'interaction est très forte, ceux-ci vont s'orienter dans sa direction et à leur tenter d'orienter les moments dipolaires des molécules voisines. Ainsi si l'agitation thermique n'est pas trop forte, les molécules vont spontanément s'orienter sous l'effet de leurs interactions mutuelles. Ceci nécessite une structure cristalline particulière pour favoriser ces interactions comme dans l'oxyde ferroélectrique $BaTiO_3$ (le centre de symétrie des charges négatives et celui des charges positives ne sont pas confondus au niveau de la maille cristalline). Le polarisation spontanée est alors suivant un axe de symétrie du cristal. La température au dessus de laquelle la polarisation spontanée disparaît sous l'effet de l'agitation thermique, est appelée température de Curie T_C . À des températures un peu plus élevées que T_C , les matériaux ferroélectriques sont caractérisés par la loi de Curie-Weiss :

$$\chi(T) = \frac{C}{T - T_C}$$

Dans certains cristaux la polarisation spontanée est si rigide qu'il est impossible de la changer sensiblement par application d'un champ électrique (elle n'est sensible qu'à la température). De tels cristaux sont dit pyroélectriques.

2.3 Propriétés magnétiques des matériaux

2.3.1 L'aimantation



On considère un électron se déplaçant autour d'un noyau que l'on va décrire par une théorie classique. La trajectoire classique de l'électron est donc un cercle de rayon r , constituant un boucle de courant d'intensité $I = \frac{e}{\tau}$, τ étant la période de révolution de l'électron et e la charge électrique élémentaire. Le moment magnétique de la boucle est alors

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{\tau} \pi r^2 * \vec{e}_k$$

avec un repère cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_k)$ orienté suivant la trajectoire de l'électron (le signe moins dans l'expression de $\vec{\mu}$ vient du fait que le courant est en sens inverse du déplacement de l'électron). Soit \vec{j} le moment cinétique orbital de l'électron :

$$\vec{j} = r \vec{e}_r \wedge m_e \vec{v} = m_e v r * \vec{e}_k$$

$\vec{v} = v \vec{e}_\theta$ étant la vitesse de l'électron et m_e sa masse. Comme $\tau = \frac{2\pi r}{v}$, on a

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{j} \quad \gamma = -\frac{e}{2m_e}$$

γ est appelé rapport gyromagnétique classique.

L'électron possède en plus du moment cinétique orbital, un moment cinétique intrinsèque d'origine purement

quantique (et relativiste) appelé spin $\overset{\curvearrowright}{S}$, tel que $\|\overset{\curvearrowright}{S}\| = \frac{\hbar}{2}$, \hbar étant la constante de Planck. On a alors un moment magnétique associé :

$$\overset{\curvearrowright}{\mu}_s = -\frac{e}{m_e} \overset{\curvearrowright}{S}$$

La quantité $\beta = \|\overset{\curvearrowright}{\mu}_s\| = \frac{\hbar e}{2m_e}$ est appelée magnéton de Bohr.

Un atome va donc présenter un moment cinétique total $\overset{\curvearrowright}{j}_t$ "somme" des moments orbitaux et des spins de ses électrons (la somme des moments cinétiques suit une règle purement quantique), qui permet de définir un moment magnétique total :

$$\overset{\curvearrowright}{\mu}_t = g\gamma \overset{\curvearrowright}{j}_t$$

où la constante g appelée facteur de Landé, caractérise l'état quantique de l'atome. Si on fait agir un champ magnétique externe, les moments magnétiques de chaque atome du milieu vont alors avoir tendance à s'orienter suivant la direction de ce champ. Il en résulte un champ de densité volumique de moments magnétiques

$$\vec{M} = n * \overset{\curvearrowright}{\mu}_t \langle \cos \theta \rangle_T$$

où n est la densité volumique d'atomes et $\langle \cos \theta \rangle_T$ est la moyenne de l'angle entre $\overset{\curvearrowright}{\mu}_t$ et le champ magnétique externe lorsque la température du milieu est T . \vec{M} est appelé champ d'aimantation (ou simplement aimantation). Un milieu où le moment cinétique total de ces atomes n'est pas nul, et qui présente donc une aimantation d'orientation en réaction d'un champ magnétique externe, est dit paramagnétique.

Les milieux dont les atomes sont de moment cinétique total nul, sont dit diamagnétiques, ils présentent une autre réaction au champ magnétique externe (celle-ci est également présente dans les milieux paramagnétiques, mais d'intensité négligeable par rapport à l'aimantation d'orientation). Soit $\overset{\curvearrowright}{B}_l$ le champ magnétique local superposition du champ magnétique externe et du champ des autres atomes. Sous l'action de $\overset{\curvearrowright}{B}_l$, le moment cinétique orbital $\overset{\curvearrowright}{j}$ de l'électron subit un mouvement de précession. En effet l'équation du mouvement est

$$\frac{d\overset{\curvearrowright}{j}}{dt} = \overset{\curvearrowright}{M}$$

où $\overset{\curvearrowright}{M}$ est le moment de la force magnétique. Or $\overset{\curvearrowright}{M} = \overset{\curvearrowright}{\mu} \wedge \overset{\curvearrowright}{B}_l$ et on a vu que $\overset{\curvearrowright}{\mu} = \gamma \overset{\curvearrowright}{j} = -\frac{e}{2m_e} \overset{\curvearrowright}{j}$. L'équation du mouvement se réduit donc à

$$\frac{d\overset{\curvearrowright}{j}}{dt} = -\frac{e}{2m_e} \overset{\curvearrowright}{j} \wedge \overset{\curvearrowright}{B}_l$$

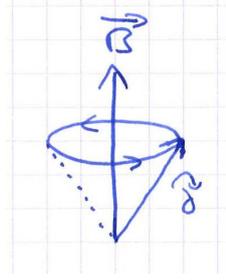
Soit un repère cartésien $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que $\overset{\curvearrowright}{B}_l$ indique la direction de z ($\overset{\curvearrowright}{B}_l = B_l * \vec{e}_z$), on a alors

$$\begin{cases} \frac{dj_x}{dt} = -\frac{eB_l}{2m_e} j_y \\ \frac{dj_y}{dt} = \frac{eB_l}{2m_e} j_x \end{cases}$$

En dérivant ces équations, on trouve

$$\begin{cases} \frac{d^2 j_x}{dt^2} + \left(\frac{eB_l}{2m_e}\right)^2 j_x = 0 \\ \frac{d^2 j_y}{dt^2} + \left(\frac{eB_l}{2m_e}\right)^2 j_y = 0 \end{cases}$$

$\overset{\curvearrowright}{j}$ est donc soumis à un mouvement de précession autour de $\overset{\curvearrowright}{B}_l$ à la fréquence $\omega = \frac{eB_l}{2m_e}$. Ce phénomène est appelé précession de Larmor.



Cette précession induit une boucle de courant d'intensité $I = \frac{e\omega}{2\pi}$ et donc un moment magnétique

$$\overset{\curvearrowright}{\mu} = -\frac{e^2\rho^2}{4m_e}\overset{\curvearrowright}{B}_l$$

où ρ est le rayon du cercle de précession. Soit $d\overset{\curvearrowright}{\mu}$ la somme des moments dipolaires magnétiques des atomes se trouvant dans un élément de volume infinitésimal $d\tau$, on peut alors définir un vecteur aimantation du milieu $\vec{M} = \frac{d\overset{\curvearrowright}{\mu}}{d\tau}$.

2.3.2 Excitation magnétique

Soit $\overset{\curvearrowright}{j}$ une distribution de courants à support compact, plongée dans un milieu matériel. On note $\overset{\curvearrowright}{B}$ le champ magnétique et \vec{M} l'aimantation du milieu réponse à $\overset{\curvearrowright}{B}$. Le potentiel magnétique total est la somme du potentiel magnétique induit par les courants externes $\overset{\curvearrowright}{j}$ et du potentiel induit par l'aimantation.

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\overset{\curvearrowright}{j}}{r} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{M} \wedge \vec{u}}{r^2} d\tau$$

r étant la distance entre le point d'intégration et (x, y, z) , \vec{u} est un vecteur unitaire pointant de la direction du point d'intégration vers (x, y, z) . On remarque que

$$\overrightarrow{\text{grad}}(1/r) = \frac{\vec{u}}{r^2}$$

le gradient étant calculé avec le point d'intégration comme variable ((x, y, z) est fixe dans le calcul du gradient), d'où

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\overset{\curvearrowright}{j}}{r} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{M} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}(1/r) d\tau$$

par application de la règle de Leibniz, on a

$$\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \left(\frac{\vec{M}}{r} \right) = \frac{\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{M}}{r} + \overrightarrow{\text{grad}}(1/r) \wedge \vec{M}$$

d'où

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\overset{\curvearrowright}{j}}{r} d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \left(\frac{\vec{M}}{r} \right) d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{M}}{r} d\tau$$

on applique le théorème de Stokes et en supposant que \vec{M} s'annule en l'infini comme $1/r^2$ (puisque $\overset{\curvearrowright}{B}$ s'annule en l'infini comme $1/r^2$), on a

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \left(\frac{\vec{M}}{r} \right) d\tau = \lim_{r \rightarrow +\infty} \oint_{S_r} \frac{d\vec{S} \wedge \vec{M}}{r} = 0$$

où S_r est une sphère de rayon r centrée sur (x, y, z) . D'où

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\overset{\curvearrowright}{j} + \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{M}}{r} d\tau$$

On a par analogie avec l'équation du potentiel magnétique

$$\Delta \vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}} * \text{div} * \vec{A} + \mu_0 * (\overset{\curvearrowright}{j} + \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{M}) = \vec{0}$$

(ici le Laplacien a pour variable (x, y, z) le point où l'on "regarde" le potentiel). Or $\Delta \vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}} * \text{div} * \vec{A} = - * \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} * \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A} = - * \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} * \overset{\curvearrowright}{B}$, on a donc

$$\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} * \overset{\curvearrowright}{B} = \mu_0 (\overset{\curvearrowright}{j} + \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{M})$$

ou encore

$$\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu_0} * \overset{\curvearrowright}{B} - \vec{M} \right) = \overset{\curvearrowright}{j}$$

par comparaison avec le théorème d'Ampère dans le vide, on voit que le champ de vecteurs \vec{H} n'est plus simplement proportionnel à $\overset{\curvearrowright}{B}$ mais prend on compte la réponse du milieu diamagnétique ou paramagnétique au champ extérieur. C'est pour cela que \vec{H} s'appelle excitation magnétique.

Principe 5 (Équations structurelles et fondamentales dans un milieu dia/paramagnétique). • *Équation structurelle :*

$$\overset{\curvearrowright}{B} = \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{A}$$

- *Relation constitutive :*

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} * \overset{\curvearrowright}{B} - \vec{M}$$

- *Conservativité du champ magnétique, forme locale :*

$$\text{div} \overset{\curvearrowright}{B} = 0$$

forme globale : pour toute surface fermée \mathcal{S}

$$\oint_{\mathcal{S}} \overset{\curvearrowright}{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- *Théorème d'Ampère, forme locale*

$$\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{H} = \overset{\curvearrowright}{j}$$

forme globale : pour tout chemin fermé \mathcal{C} délimitant une surface \mathcal{S}

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \overset{\curvearrowright}{j} \cdot d\vec{S}$$

Propriété 6. Dans un milieu linéaire, on a

$$\vec{M} = \kappa \vec{H}$$

où κ est appelée susceptibilité magnétique.

Propriété 7. Dans un milieu linéaire et homogène, la susceptibilité magnétique ne dépend pas de la position dans le milieu.

Propriété 8. Dans un milieu linéaire est isotrope, la susceptibilité magnétique ne dépend pas de la direction de \vec{H}

Dans un MLHI, on a

$$\mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = * \overset{\curvearrowright}{B}$$

Définition 18 (Perméabilité magnétique). La perméabilité magnétique d'un MLHI de susceptibilité κ est la quantité :

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi)$$

on appelle $\mu_r = 1 + \chi$ perméabilité relative du milieu.

On notera de plus que dans un MLHI le théorème d'Ampère peut s'écrire :

$$\text{rot} \ * \ \vec{B} = \mu \ \vec{j}$$

et que l'énergie magnétostatique est toujours

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{H} \cdot \vec{B} \, d\tau$$

Propriété 9. Dans les milieux diamagnétiques on a $\kappa < 0$ et donc \vec{M} et \vec{H} antiparallèles, alors que dans les milieux paramagnétiques $\kappa > 0$ et \vec{M} et \vec{H} sont parallèles et de même sens.

Le diamagnétisme est du à la précession de l'orbite électronique autour du champ magnétique local. Cette précession se fait dans le sens du champ magnétique et induit donc un courant dans le sens opposé qui va créer un champ contraire. Alors que dans le paramagnétisme les moments cinétiques s'orientent dans le même sens que le champ magnétique local.

Les milieux paramagnétiques sont caractérisés par une loi de Curie :

$$\kappa(T) = \frac{C}{T}$$

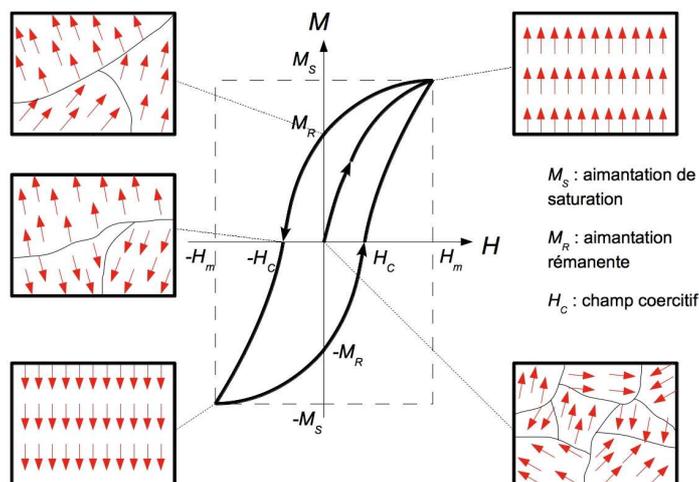
valide pour des températures T pas trop proches de $0K$.

2.3.3 Ferromagnétisme

Les matériaux ferromagnétiques sont des cristaux tels que les interactions entre les spins des atomes voisins sont suffisamment fortes pour qu'à basse température, elles maintiennent une orientation cohérente et donc une aimantation persistante (l'interaction entre spins est décrite par l'énergie $E = -J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ où J est une constante appelée intégrale d'échange dont le calcul est purement quantique). En appliquant un fort champ magnétique au matériau, on oriente tout les moments cinétiques dans la même direction, lorsqu'on coupe le champ externe, les interactions mutuelles maintiennent l'aimantation (si elles dominent sur l'agitation thermique).

L'aimantation ne peut dépasser une certaine valeur M_s appelée aimantation à saturation, même en augmentant le champ extérieur. M_s correspond à la situation où tous les moments cinétiques sont orientés dans la même direction. Lorsqu'on considère un milieu ferromagnétique d'aimantation initiale nulle, en appliquant un champ externe croissant \vec{H} , on voit l'aimantation M augmenter quasi-linéairement de 0 quand $H = 0$ à M_s quand H atteint H_m la valeur minimal du champ à appliquer pour obtenir une saturation. Ensuite si on fait décroître H , puis croître avec un champ inversé, puis à nouveau décroître et ainsi de suite, $M(H)$ va former une courbe d'hystérésis. Cette courbe coupe l'axe M à la valeur M_r appelé aimantation rémanente (c'est l'aimantation qui subsiste lorsque le champ externe est coupé) et coupe l'axe H à la valeur H_c appelé champ coercitif, et qui est le champ externe à appliquer pour masquer l'aimantation persistante.

Le cycle d'hystérésis des matériaux ferromagnétiques



On notera que l'aimantation nulle correspond à une multitude de petites régions d'orientation cohérente, appelées domaines de Weiss, mais non-orientées entre elles. L'augmentation de l'aimantation totale se fait par réorientation des domaines de Weiss, de sorte que deux domaines contigus fusionnent quand ils se retrouvent avec la même orientation (la taille moyenne des domaines de Weiss augmente donc). À l'inverse, la désaimantation se traduit par le fractionnement des domaines de Weiss. Les interfaces entre deux domaines sont appelés murs de Bloch.

L'aimantation permanente disparaît au delà d'une certaine température T_C , dite température de Curie. Au delà, le matériaux se comporte comme un paramagnétique avec une loi de Curie-Weiss :

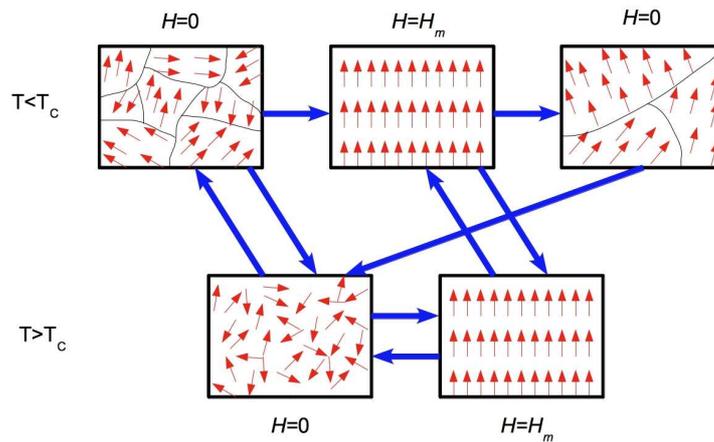
$$\kappa(T) = \frac{C}{T - T_C}$$

Cette loi peut être justifiée de la façon suivante : Le champ local est de la forme $\vec{H}_l = \vec{H}_{ext} + \lambda\vec{M}$, où $\lambda\vec{M}$ est le champ crée par les moments magnétiques des molécules environnantes, λ est une constante. En appliquant la loi du Curie au champ local :

$$\vec{M} = \frac{C}{T} \vec{H}_l = \frac{C}{T} (\vec{H}_{ext} + \lambda\vec{M}) \Rightarrow \vec{M} = \frac{C}{T - C\lambda} \vec{H}_{ext}$$

on retrouve la loi de Curie-Weiss en posant $T_C = C\lambda$.

La transition de phase ferromagnétique paramagnétique



On notera néanmoins que les matériaux ferromagnétiques sont non-linéaires, la susceptibilité magnétique dépendant de la norme de \vec{H} :

$$\vec{M} = \kappa(T, H)\vec{H}$$

Chapitre 3

Dynamique des champs électromagnétiques

3.1 Equations de Maxwell

3.1.1 Les équations de Maxwell et courants de déplacement

Faraday réalise en 1831 une expérience démontrant que les champs électriques et magnétiques ne sont pas indépendants si ceux-ci ne sont pas statiques. Il remarqua l'apparition d'un courant électrique dans un circuit \mathcal{C} placé dans un champ magnétique temporellement variable. Les observations expérimentales de Faraday montraient une relation entre le flux $\Phi(t)$ du champ magnétique à travers la surface \mathcal{S} délimitée par le circuit et la force électromotrice $\mathcal{F}(t)$ le long du circuit :

$$\mathcal{F} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

avec

$$\mathcal{F} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

et

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

D'où

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

et en utilisant le théorème de Stokes

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

Ce qui conduit à la loi de Faraday complète :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Les équations fondamentales de l'électromagnétisme avec la loi de Faraday complète ne sont pas compatibles entre elles dans le cas où les sources ne sont pas statiques. La loi fautive est le théorème d'Ampère. En effet si $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ alors

$$\text{div} \vec{j} = \text{div} \text{rot} \vec{H} = 0$$

Or la relation de continuité des charges et des courants est

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

traduisant simplement le fait que les sources de courants ($\text{div } \overset{\curvearrowright}{j}$) sont des déplacements de charges ($\partial_t \rho$). Maxwell remarquera qu'en utilisant le théorème de Gauss, la loi de continuité pouvait être réécrite :

$$\begin{aligned}\text{div } \overset{\curvearrowright}{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \overset{\curvearrowright}{D} &= 0 \\ \text{div} \left(\overset{\curvearrowright}{j} + \frac{\partial \overset{\curvearrowright}{D}}{\partial t} \right) &= 0\end{aligned}$$

Maxwell modifia alors le théorème d'Ampère pour être compatible avec cette relation :

$$\text{rot } \overset{\curvearrowright}{H} = \overset{\curvearrowright}{j} + \frac{\partial \overset{\curvearrowright}{D}}{\partial t}$$

La théorie de l'électromagnétisme est alors complète, ses équations fondamentales portant désormais le nom d'équations de Maxwell.

Principe 6 (Équations de Maxwell (équations fondamentales)). • *Équation de Faraday :*

$$\text{rot } \overset{\curvearrowright}{E} = - \frac{\partial \overset{\curvearrowright}{B}}{\partial t}$$

- *Conservativité du champ magnétique :*

$$\text{div } \overset{\curvearrowright}{B} = 0$$

- *Équation de Gauss :*

$$\text{div } \overset{\curvearrowright}{D} = \rho$$

- *Équation de Maxwell-Ampère :*

$$\text{rot } \overset{\curvearrowright}{H} = \overset{\curvearrowright}{j} + \frac{\partial \overset{\curvearrowright}{D}}{\partial t}$$

Les équations constitutives $\overset{\curvearrowright}{D} = \epsilon_0 * \overset{\curvearrowright}{E} + \overset{\curvearrowright}{P}$ et $\overset{\curvearrowright}{H} = \frac{1}{\mu_0} * \overset{\curvearrowright}{B} - \overset{\curvearrowright}{M}$ restent inchangées.

Exemple : Les milieux conducteurs

On considère un MLHI dont les charges électriques excédentaires (en pratique des électrons) sont libres de s'y déplacer. Sous l'action d'un champ électrique $\overset{\curvearrowright}{E}$ les charges libres se déplacent (emportées le long des lignes de champ) formant des courants électriques :

$$\overset{\curvearrowright}{j} = \sigma * \overset{\curvearrowright}{E}$$

où la conductivité du milieu σ mesure la "facilité" des électrons à se déplacer dans le milieu, ou inversement la résistivité $\frac{1}{\sigma}$ mesure la résistance du milieu au passage des charges. L'équation de la conduction est une version locale de la loi d'Ohm $U = RI$.

Considérons un milieu dans lequel à la date $t = 0$ se trouvent des charges électriques libres excédentaires (toutes de même signe) suivant une densité volumique de charges ρ . Aucun champ électrique externe n'est appliqué au milieu. Sous l'effet de la répulsion électrostatique, c'est à dire sous l'effet de leur propre champ électrique, les charges vont s'éloigner les unes des autres en formant des courants $\overset{\curvearrowright}{j} = \sigma * \overset{\curvearrowright}{E}$. D'après l'équation de continuité des charges et des courants on a

$$\begin{aligned}\text{div } \overset{\curvearrowright}{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 &\iff \sigma \text{div } * \overset{\curvearrowright}{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ &\iff \frac{\sigma}{\epsilon} \text{div } \overset{\curvearrowright}{D} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ &\iff \frac{\sigma}{\epsilon} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ &\iff \rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}\end{aligned}$$

On voit donc qu'en tout point du milieu la densité de charge baisse. 70% des charges ont quittées le voisinage d'un point en un temps $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$. Le milieu n'est pas infini, si on suppose de plus que celui-ci est isolé, les charges qui migrent en essayant de quitter le milieu vont s'accumuler à sa surface. Ceci

explique pourquoi un conducteur en équilibre ne porte des charges électriques qu'en surface. Le temps caractéristique de migration des charges τ est faible dans les milieux conducteurs ($\sigma \gg \epsilon$), la migration des charges étant plus rapide dans les milieux qui résistent peu au déplacement de celles-ci. Par contre la migration est plus lente dans les milieux de forte permittivité $\epsilon \gg \sigma$ (diélectriques et paraélectriques à faible température), le temps caractéristique de la migration est très grand. Ceci s'explique par le fait que la polarisation du milieu s'oppose au champ électrique qui la fait naître. ■

Principe 7 (Équations structurelles).

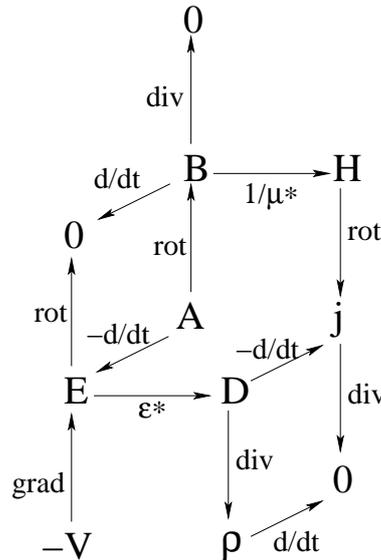
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

La nouvelle équation structurelle est posée pour être compatible avec la loi de Faraday complète :

$$\text{rot} \vec{E} = -\text{rot} \overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \text{rot} \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Les relations entre les différents champs peuvent être résumées par le diagramme de Tonti :



Exemple : Les courants de Foucault

On considère un champ magnétique \vec{B} constant mais non-uniforme dans le référentiel \mathcal{R} , de potentiel vecteur magnétique \vec{A} . Soit un objet conducteur en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} . Soit M un point de l'objet. L'objet étant en mouvement, celui-ci voit changer \vec{A} en fonction du changement de sa position dans \mathcal{R} . Vu du point M , on a donc

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(x(t), y(t), z(t))$$

où $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ est la loi horaire de M . On suppose qu'il n'y a aucune charge excédentaire dans le conducteur (ainsi on peut poser $V = 0$ dans le conducteur). Vu du point M dans le conducteur, on a alors

$$\vec{E}(M) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} v_z \right)$$

où $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ est la vitesse de M . Soit σ la conductivité de conducteur, on a alors un courant dans l'objet, qui au niveau du point M est

$$\vec{j}(M) = \sigma * \vec{E}(M) = -\sigma * \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} v_z \right)$$

Ainsi dans un corps conducteur en mouvement par rapport à un champ magnétique constant non-uniforme, apparaissent des courants électriques. Ces courants sont appelés courants de Foucault. Sur le point M , il s'exerce alors une force magnétique :

$$d\vec{F}(M) = \overset{\curvearrowright}{j}(M)d\tau \wedge \overset{\curvearrowright}{B}(M)$$

où $d\tau$ est un volume infinitésimal. Dans certains cas cette force s'oppose au mouvement qui a fait naître les courants de Foucault. On peut donc utiliser ce phénomène comme système de freinage (on trouve ainsi des systèmes de freinage magnétique sur les poids lourds où le disque de frein tourne dans l'entrefer d'une électro-aimant).

On obtient un phénomène similaire de courants de Foucault, en faisant varier dans le temps un champ magnétique baignant un conducteur fixe. Une des applications peut alors être l'utilisation de l'effet Joule conséquence des courants de Foucault (c'est le principe des plaques de cuisson à induction). ■

Proposition 3 (Équations des potentiels). *Dans un MLHI, on a*

$$\Delta V + * \frac{\partial \operatorname{div} * \vec{A}}{\partial t} + \frac{* \rho}{\epsilon} = 0$$

$$\vec{\Delta} \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(* \operatorname{div} * \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \mu * \overset{\curvearrowright}{j} = \vec{0}$$

avec $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{(1+\chi_e)(1+\chi_m)}}$, χ_e et χ_m étant respectivement les susceptibilités électriques et magnétiques du milieu.

Preuve :

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}V - \partial_t \vec{A} &\Rightarrow \frac{1}{\epsilon} \overset{\curvearrowright}{D} = - * \overrightarrow{\operatorname{grad}}V + * \partial_t \vec{A} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div} \overset{\curvearrowright}{D} = -\operatorname{div} * \overrightarrow{\operatorname{grad}}V - \partial_t \operatorname{div} * \vec{A} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\epsilon} * \rho = -\Delta V - * \partial_t \operatorname{div} * \vec{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\curvearrowright}{B} = \overset{\curvearrowright}{\operatorname{rot}} \vec{A} &\Rightarrow \mu \vec{H} = * \overset{\curvearrowright}{\operatorname{rot}} \vec{A} \\ &\Rightarrow \mu \overset{\curvearrowright}{\operatorname{rot}} \vec{H} = \overset{\curvearrowright}{\operatorname{rot}} * \overset{\curvearrowright}{\operatorname{rot}} \vec{A} \\ &\Rightarrow \mu * \overset{\curvearrowright}{j} + \mu * \partial_t \overset{\curvearrowright}{D} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} * \operatorname{div} * \vec{A} - \vec{\Delta} \vec{A} \\ &\Rightarrow \mu * \overset{\curvearrowright}{j} - \mu \epsilon \partial_t (\overrightarrow{\operatorname{grad}}V + \partial_t \vec{A}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} * \operatorname{div} * \vec{A} - \vec{\Delta} \vec{A} \end{aligned}$$

■

3.1.2 Invariance de jauge des équations de Maxwell

Les transformations de jauge doivent être modifiées pour tenir compte de la structure dynamique de l'électromagnétisme. En particulier, le choix de jauge n'est plus indépendant entre V et \vec{A} puisque \vec{E} dérive de ces deux potentiels. Soit $\chi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de l'espace et du temps (de classe \mathcal{C}^2), et soient les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} V'(x, y, z, t) &= V(x, y, z, t) - \frac{\partial}{\partial t} \chi(x, y, z, t) \\ \vec{A}'(x, y, z, t) &= \vec{A}(x, y, z, t) + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \chi(x, y, z, t) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\overrightarrow{\operatorname{grad}}V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}V + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\partial_t \chi - \partial_t \vec{A} - \partial_t \overrightarrow{\operatorname{grad}}\chi = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}V - \partial_t \vec{A} = \vec{E} \\ \overset{\curvearrowright}{B}' &= \overset{\curvearrowright}{\operatorname{rot}} \vec{A}' = \overset{\curvearrowright}{\operatorname{rot}} \vec{A} + \overset{\curvearrowright}{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \chi = \overset{\curvearrowright}{\operatorname{rot}} \vec{A} = \overset{\curvearrowright}{B} \end{aligned}$$

Le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) est donc invariant sous cette transformation de jauge sur les potentiels (V, \vec{A}) . La discussion tenue en statique peut être étendue ici en dynamique : les deux postulats fondamentaux de l'électromagnétisme sont d'une part la symétrie de jauge, d'autre part les loi de Gauss et de Maxwell-Ampère.

$$\left. \begin{array}{l} V \simeq V - \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A} \simeq \vec{A} + \text{grad} \chi \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} B = 0 \\ \text{div} D = \rho \\ \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Comme dans le cas statique, une boucle de Wilson $w(\mathcal{C}, t) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A}(x, y, z, t) \cdot d\vec{\ell}$ (ou $W(\mathcal{C}, t) = e^{-i \oint_{\mathcal{C}} \vec{A}(x, y, z, t) \cdot d\vec{\ell}}$) constitue un invariant de jauge non-local, construit à partir du potentiel magnétique et qui pourrait être l'objet porteur de sens physique à la place du champ magnétique \vec{B} . Notons qu'il n'y a plus en dynamique d'équivalent de la boucle de Wilson pour le potentiel électrique (en statique il s'agissait de la tension). La raison en est que pour trouver un tel équivalent il faudrait considérer des chemins fermés dans l'**espace-temps**, chemins qui à un moment donné "remontent le temps". De tels chemins n'ayant pas de sens physique, il n'y a pas d'équivalent physique à la boucle de Wilson pour le potentiel électrique.

Le choix de jauge est totalement arbitraire, mais deux cas particuliers sont assez souvent utilisés. Un choix de jauge souvent utilisé en MLHI est la **jauge de Lorenz** qui est telle que

$$*\text{div} * \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

À partir d'un choix de jauge arbitraire, on procède au changement de jauge tel que

$$\Delta \chi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \left(*\text{div} * \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

Les potentiels $V' = V - \partial_t \chi$ et $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \chi$ vérifient alors $*\text{div} * \vec{A}' + \frac{1}{v^2} \partial_t V' = 0$. Notons que la jauge de Lorenz correspond en fait à une classe de choix de jauge, on peut en effet modifier le choix $V'' = V' - \partial_t \lambda$ et $\vec{A}'' = \vec{A}' + \text{grad} \lambda$, avec V'' et \vec{A}'' satisfaisant toujours à la condition de Lorenz si

$$\Delta \lambda - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = 0$$

Ceci constitue un choix de jauge à l'intérieur de la jauge de Lorenz.

Dans la jauge de Lorenz, les équations de propagation des potentiels deviennent :

$$\begin{aligned} \Delta V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{* \rho}{\epsilon} \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu * \vec{j} \end{aligned}$$

Les équations du type $\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = g$ sont des équations de propagation spatio-temporelle dite équation d'onde. Afin de simplifier la discussion, considérons le cas homogène à une dimension, c'est à dire l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$. Cette dernière équation peut être transformée comme suit ¹ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x, t) &= 0 \\ \iff \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

On procède au changement de variables $a = x - vt$ et $b = x + vt$, on a alors

$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} f(a, b) = 0$$

1. on rappelle que l'on se place dans le cadre d'un MLHI donc v est indépendant de (x, y, z, t)

Équation dont la solution est de la forme :

$$f(a, b) = f_1(a) + f_2(b)$$

où $f_{1/2}$ sont des fonctions arbitraires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 . En revenant aux variables initiales :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \iff f(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Le premier terme $f_1(x - vt)$ correspond à une onde se propageant vers les x croissants à la vitesse v (appelée onde progressive) et le seconde terme $f_2(x + vt)$ correspond à une onde se propageant vers les x décroissants à la vitesse v (appelée onde rétrograde).

Ainsi, on voit dans la jauge de Lorenz, que les potentiels peuvent être assimilés à des ondes se propageant à la vitesse $v = \frac{c}{\sqrt{(1+\chi_e)(1+\chi_m)}} = \frac{c}{n}$ ($n = \sqrt{(1+\chi_e)(1+\chi_m)}$ est l'indice optique du MLHI). Dans le vide, les perturbations électromagnétiques se propagent donc à la vitesse finie c .

Un autre choix de jauge souvent utilisé est la **jauge de Coulomb** que l'on a déjà rencontrée, pour laquelle $*\text{div} * \vec{A} = 0$. On rappelle qu'à partir d'un choix de jauge arbitraire tel $*\text{div} * \vec{A} \neq 0$, on retrouve la jauge de Coulomb en procédant à un changement de jauge tel que

$$\Delta \chi + *\text{div} * \vec{A} = 0$$

Dans la jauge de Coulomb les équations de propagation des potentiels prennent la forme (on considère toujours le MLHI) :

$$\Delta V = -\frac{*\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu * \overset{\curvearrowright}{j} + \frac{1}{v^2} \text{grad} \frac{\partial V}{\partial t}$$

On remarquera que si \vec{A} se propagent toujours à la vitesse v , V semble se propager à une vitesse infinie. Ce comportement qui semble non-physique vient du fait que contrairement à la jauge de Lorenz, la jauge de Coulomb ne découple pas les équations des potentiels électrique et magnétique (cf. second membre de l'équation de \vec{A}). Il est dangereux de considérer les phénomènes électriques et magnétiques séparément, ceux-ci étant intimement liés en dynamique.

3.1.3 Énergie électromagnétique

Pour un MLHI, les raisonnements suivis en statique peuvent être aisément généralisés, ce qui conduit au résultat suivant :

Proposition 4. *Dans un MLHI, la densité volumique d'énergie électromagnétique est donnée par :*

$$w = \frac{1}{2} \left(\vec{E} \cdot \overset{\curvearrowright}{D} + \overset{\curvearrowright}{B} \cdot \vec{H} \right)$$

Le principe de conservation de l'énergie donne dans le cas particulier de l'électromagnétisme, le résultat suivant :

Théorème 3 (Théorème de Poynting). *La densité d'énergie électromagnétique w est soumise dans un MLHI à la loi de conservation :*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} \overset{\curvearrowright}{S} = -\overset{\curvearrowright}{j} \cdot \vec{E}$$

où

$$\overset{\curvearrowright}{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

est appelé vecteur de Poynting.

Preuve : Dans un MLHI on a

$$w = \frac{1}{2} * (\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

d'où

$$\begin{aligned} \partial_t w &= * \epsilon \partial_t \vec{E} \cdot \vec{E} + * \mu \partial_t \vec{H} \cdot \vec{H} \\ &= \partial_t \overleftarrow{D} \cdot \vec{E} + \partial_t \overleftarrow{B} \cdot \vec{H} \\ &= (\overleftarrow{\text{rot}} \vec{H} - \overleftarrow{j}) \cdot \vec{E} - \overleftarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{H} \\ &= \overleftarrow{\text{rot}} \vec{H} \cdot \vec{E} - \overleftarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{H} - \overleftarrow{j} \cdot \vec{E} \\ &= \text{div}(\vec{H} \wedge \vec{E}) - \overleftarrow{j} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

■

Le vecteur de Poynting est le flux d'énergie électromagnétique, c'est à dire la quantité d'énergie électromagnétique circulant par unité de surface et par unité de temps. Il indique la direction de propagation du flux d'énergie.

3.2 Ondes électromagnétiques

3.2.1 Propagation des ondes électromagnétiques dans un MLHI non-dispersif

On s'intéresse ici à la propagation du champ électromagnétique dans un MLHI. Pour ce faire, on considère les équations de Maxwell et le calcul suivant :

$$\begin{aligned} * \overleftarrow{\text{rot}} * \overleftarrow{\text{rot}} \vec{E} &= - * \overleftarrow{\text{rot}} * \frac{\partial \overleftarrow{B}}{\partial t} \\ &= - * \partial_t \overleftarrow{\text{rot}}(\mu \vec{H}) \\ &= -\mu * \frac{\partial}{\partial t} \left(\overleftarrow{j} + \frac{\partial \overleftarrow{D}}{\partial t} \right) \\ &= -\mu * \frac{\partial \overleftarrow{j}}{\partial t} - \mu * \frac{\partial^2 \overleftarrow{D}}{\partial t^2} \\ &= -\mu * \frac{\partial \overleftarrow{j}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} * \overleftarrow{\text{rot}} * \overleftarrow{\text{rot}} \vec{E} &= \overrightarrow{\text{grad}} * \text{div} * \vec{E} - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} \\ &= \frac{1}{\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}} * \text{div} \overleftarrow{D} - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} \\ &= \frac{1}{\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}} \rho - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} \end{aligned}$$

d'où

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu * \frac{\partial \overleftarrow{j}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}} \rho$$

De même pour le champ magnétique :

$$\begin{aligned} * \overleftarrow{\text{rot}} * \overleftarrow{\text{rot}} \vec{H} &= * \overleftarrow{\text{rot}} * \overleftarrow{j} + * \overleftarrow{\text{rot}} * \frac{\partial \overleftarrow{D}}{\partial t} \\ &= * \overleftarrow{\text{rot}} * \overleftarrow{j} + \epsilon * \partial_t \overleftarrow{\text{rot}} \vec{E} \\ &= * \overleftarrow{\text{rot}} * \overleftarrow{j} - \epsilon * \frac{\partial^2 \overleftarrow{B}}{\partial t^2} \\ &= * \overleftarrow{\text{rot}} * \overleftarrow{j} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

et

$$*\overset{\curvearrowright}{\text{rot}} * \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} \vec{H} = \overrightarrow{\text{grad}} * \text{div} * \vec{H} - \vec{\Delta} \vec{H} = -\vec{\Delta} \vec{H}$$

d'où

$$\vec{\Delta} \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = - * \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} * \overset{\curvearrowright}{j}$$

Proposition 5 (Équations de propagation des champs). *Dans un MLHI, on a*

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu * \frac{\partial \overset{\curvearrowright}{j}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}} \rho$$

$$\vec{\Delta} \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = - * \overset{\curvearrowright}{\text{rot}} * \overset{\curvearrowright}{j}$$

avec

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{(1+\chi_e)(1+\chi_m)}} = \frac{c}{n}$$

χ_e et χ_m étant les susceptibilités du MLHI et n son indice optique.

Le champ électromagnétique est donc soumis à une équation d'onde. Dans le cas général le champ électromagnétique est la superposition d'ondes progressives et rétrogrades se propageant dans le MLHI à la vitesse $\frac{c}{n}$.

Considérons la propagation du champ électromagnétique dans un MLHI sans sources extérieures :

$$\begin{cases} \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \vec{\Delta} \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases}$$

Pour simplifier la discussion supposons la propagation à une dimension et considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

où $u(x, t)$ est une composante de \vec{E} ou de \vec{H} (u pourrait être également une composante de \vec{A} ou V). On a déjà montré que $u(x, t)$ est la superposition d'une solution progressive et d'une solution rétrograde, et il n'est pas difficile de voir qu'une solution possible est

$$u_k(x, t) = ae^{ik(x-vt)} + be^{-ik(x+vt)}$$

avec $k \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{C}$. Ce que l'on peut réécrire

$$u_k(x, t) = ae^{i(kx - \omega(k)t)} + be^{-i(kx + \omega(k)t)}$$

avec $\omega(k) = kv = \frac{k\epsilon}{n} = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}}$. On montre en réalité que la solution générale de l'équation d'onde est de la forme :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

avec $s(k) \in \mathbb{C}$ et $\omega(k) = |k|v$. La solution $u(x, t)$ étant complexe, le champ physique est supposé être $\Re u(x, t)$. Néanmoins, on ne mesure jamais ce champ, les instruments de mesure (l'œil en particulier) sont sensibles à l'intensité du champ qui est $I(x, t) = |u(x, t)|^2$ (la phase du champ $\arg u(x, t)$ ne peut être mise en évidence que dans une figure d'interférences, cf. cours d'optique physique). On peut donc représenter les champs par des fonctions à valeurs complexes. k est appelé nombre d'onde et ω pulsation de l'onde. La fréquence d'oscillation temporelle de l'onde est $f = \frac{\omega}{2\pi}$ (donc la période d'oscillation est $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$). La longueur d'onde (période spatiale) est $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

En revenant au problème à 3 dimensions, on peut donc écrire :

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{e}(\vec{k}) e^{i(\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x})} dk_x dk_y dk_z$$

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{h}(\vec{k}) e^{i(\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x})} dk_x dk_y dk_z$$

avec $\vec{x} = (x, y, z)$ et

$$\omega(\vec{k}) = \frac{\|\vec{k}\|c}{n} = \frac{\|\vec{k}\|}{\mu\epsilon}$$

\vec{k} est appelé vecteur d'onde (il indique la direction de propagation de l'onde) et $\|\vec{k}\|$ nombre d'onde. Les notations complexes nécessitent de redéfinir le vecteur de Poynting (flux d'énergie) et la densité d'énergie afin d'obtenir des quantités réelles :

$$w = \frac{1}{2} \left(\vec{E} \cdot \overleftrightarrow{D}^* + \vec{B} \cdot \overleftrightarrow{H}^* \right)$$

$$\overleftrightarrow{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}^*$$

Les ondes monochromatiques (ne présentant qu'une fréquence unique ω) peuvent être représentées par des ondes planes :

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{\mathcal{E}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \overleftrightarrow{D}(\vec{x}, t) = \overleftrightarrow{\mathcal{D}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \vec{\mathcal{H}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \overleftrightarrow{B}(\vec{x}, t) = \overleftrightarrow{\mathcal{B}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

Mais l'onde plane n'est qu'une approximation sur de petites distances (on notera qu'une onde plane n'est pas physique car elle transporte une énergie infinie). Elle joue néanmoins le rôle d'onde fondamentale car toute onde peut être décomposée en une somme continue d'ondes planes.

On s'intéresse maintenant aux contraintes entre la direction de propagation $\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$ et la direction des champs \vec{E} et \vec{H} pour des ondes planes. Des équations de Maxwell, on tire :

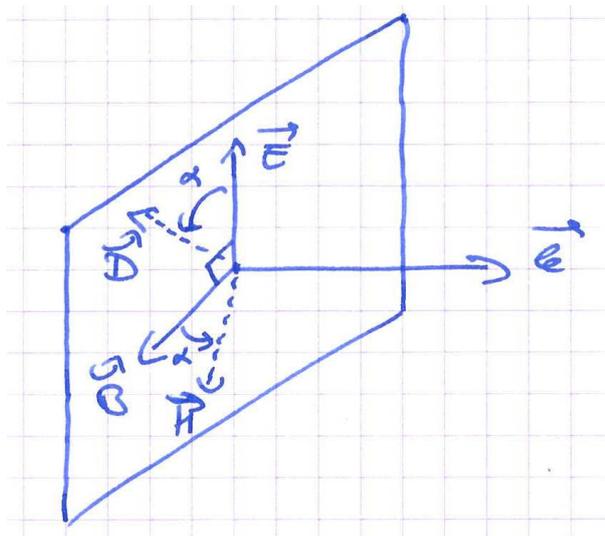
$$\text{div} \overleftrightarrow{D} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

$$\text{div} \overleftrightarrow{H} = 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \overleftrightarrow{B}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}} = -i\omega \overleftrightarrow{\mathcal{B}}$$

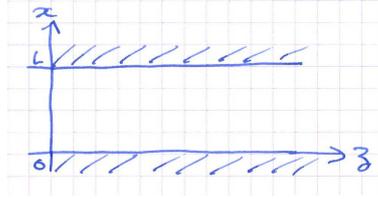
$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \overleftrightarrow{D}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{H}} = i\omega \overleftrightarrow{\mathcal{D}}$$

On en déduit donc que les champs \vec{E} , \vec{H} , \overleftrightarrow{D} et \overleftrightarrow{B} sont dans le plan orthogonal à la direction de propagation \vec{k} (on dit que l'onde électromagnétique est transverse) et que de plus \vec{E} et \overleftrightarrow{B} d'une part et \overleftrightarrow{D} et \vec{H} d'autre part sont orthogonaux (ceci reste vrai dans un milieu non-linéaire où \vec{E} et \overleftrightarrow{D} d'une part et \vec{H} et \overleftrightarrow{B} d'autre part ne sont pas colinéaires). La direction \mathcal{E} est appelée **direction de polarisation** de l'onde.



Exemple : Guide d'onde à une dimension

On injecte une onde monochromatique de fréquence ω dans un guide "plan" ayant pour axe principal (Oz) et pour axe transverse (Ox).



On suppose que les interfaces entre le cœur et la gaine du guide $x = 0$ et $x = L$ constituent des miroirs parfaits (c'est une grosse approximation car cela revient à poser l'indice optique de la gaine comme l'infini, mais cela simplifie considérablement le problème). On suppose que la direction de polarisation de l'onde est \vec{e}_x . $\vec{E} = E\vec{e}_x$ vérifie l'équation

$$\Delta E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$E|_{x=0} = E|_{x=L} = 0$$

Ces conditions aux limites sont cohérentes avec l'hypothèse du miroir parfait. v est la vitesse de la lumière dans le cœur du guide. Compte-tenu du fait que la propagation est libre dans la direction z , on peut écrire

$$E(x, z, t) = E_0(x)e^{i(\omega t - kz)}$$

où k est le nombre d'onde qu'il faut déterminer, ainsi que la fonction $E_0(x)$. On notera que le guide n'est pas un milieu homogène, l'indice optique n'étant pas le même dans le cœur et dans la gaine. En injectant cette fonction dans l'équation de propagation, on trouve

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - k^2 \right) E_0(x) = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, qu'il est facile de résoudre, mais dont la solution dépend de k par rapport à $\frac{\omega}{v}$.

- Premier cas $k = \frac{\omega}{v}$: l'équation caractéristique est alors $r^2 = 0$ et on a

$$E_0(x) = \lambda x + \mu \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Avec les conditions aux limites :

$$E_0(0) = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

$$E_0(L) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$E = 0$, il n'y a pas de propagation, ce cas n'est pas possible.

- Deuxième cas $k > \frac{\omega}{v}$: l'équation caractéristique est alors $r^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}$ et on a

$$E_0(x) = \lambda e^{\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}x} + \mu e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Avec les conditions aux limites :

$$E_0(0) = 0 \Rightarrow \mu = -\lambda$$

$$E_0(L) = 0 \Rightarrow \lambda(e^{\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}L} - e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}L}) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

À nouveau $E = 0$, cette solution n'est pas possible.

- Troisième cas $k < \frac{\omega}{v}$: l'équation caractéristique est alors $r^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}$ et on a

$$E_0(x) = \lambda \sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - k^2}x\right) + \mu \cos\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - k^2}x\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Avec les conditions aux limites :

$$E_0(0) = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

$$E_0(L) = 0 \Rightarrow \lambda \sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - k^2}L\right) = 0$$

Cette condition est vérifiée si $\lambda = 0$ (ce qui ne nous intéresse pas) ou si

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - k^2} L = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Cette dernière condition définit les modes de propagation de l'onde dans le guide :

$$k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} \quad 0 < n < \frac{\omega L}{\pi v}$$

Les fibres optiques fonctionnent suivant des principes similaires (avec la différence de la symétrie circulaire dans le plan (x, y) et une gaine qui n'est pas un miroir parfait). ■

3.2.2 Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux dispersifs

Définition 19 (Milieu dispersif). *Un milieu est dit dispersif lorsque sa permittivité électrique (et donc son indice optique) dépend de la fréquence ω de l'onde électromagnétique.*

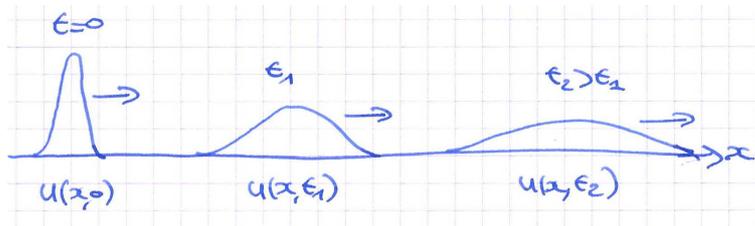
En réalité tous les milieux sont dispersifs, car la polarisabilité des atomes dépend de la fréquence du champ extérieur. Dans un tel milieu, on a donc

$$\omega(k) = kv_p(k) = \frac{kc}{n(k)}$$

avec

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(k) e^{i(\omega(k)t - kx)} dk$$

$v_p(k) = \frac{\omega(k)}{k}$ est appelée vitesse de phase, c'est toujours la vitesse de propagation de l'onde monochromatique de fréquence $\omega = kv_p(k)$. Dans le paquet d'ondes $u(x, t)$, les ondes de fréquences différentes se propagent à des vitesses différentes. Ainsi le paquet d'ondes va se déformer en se dispersant spatialement.



Supposons que $s(k)$ forme un pic étroit autour d'une valeur k_0 , on a alors

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0)$$

D'où

$$u(x, t) \simeq \frac{e^{i(\omega(k_0)t - \frac{d\omega}{dk}|_{k_0} k_0)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(k) e^{i(\frac{d\omega}{dk}|_{k_0} kt - xk)} dk$$

Globalement, le paquet d'ondes se déplace à la vitesse :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

appelée vitesse de groupe. C'est la vitesse du signal et la vitesse du transport de l'énergie. Par un changement de variable, on montre que

$$v_g(\omega) = \frac{c}{n_{eff}(\omega)}$$

où l'indice optique effectif du milieu est

$$n_{eff}(\omega) = n(\omega) + \frac{dn}{d\omega} \omega$$

3.2.3 Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux dissipatifs

On considère un MLHI pour lequel la conduction peut être modélisée par l'équation

$$\vec{j} = \sigma * \vec{E}$$

où σ est la conductivité du milieu. L'équation de propagation du champ électrique est alors :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Considérons une onde monochromatique :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y, z) e^{i\omega t}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E}_0 + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{E}_0 &= i\mu\sigma\omega \vec{E}_0 \\ \Leftrightarrow \Delta \vec{E}_0 + (\mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega) \vec{E}_0 &= 0 \end{aligned}$$

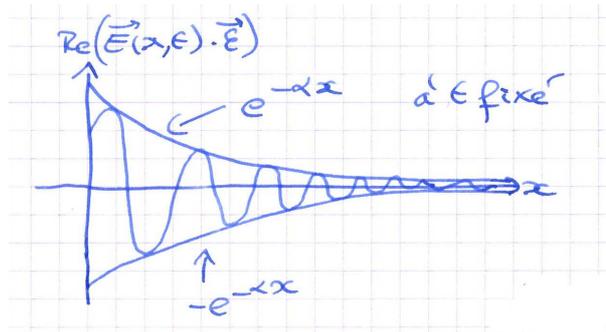
Si on cherche la partie spatiale comme une onde plane $\vec{E}_0 = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, on trouve

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega$$

k est donc complexe, et on pose $\vec{k} = (\beta - i\alpha)\vec{n}$ (où \vec{n} est un vecteur unitaire dans la direction de propagation). On a alors

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{\mathcal{E}} e^{-\alpha\vec{n}\cdot\vec{x}} e^{i(\omega t - \beta\vec{n}\cdot\vec{x})}$$

α étant positif, l'onde s'atténue avec sa propagation.



Exemple : Cas d'un conducteur $\sigma \gg \epsilon\omega$

On alors

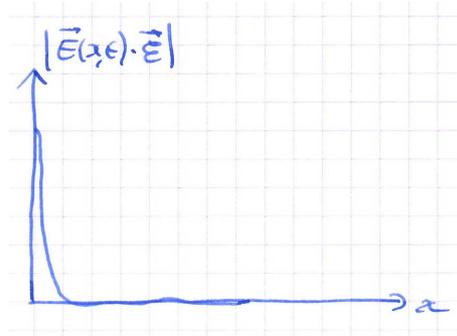
$$k^2 \simeq -i\mu\omega\sigma$$

et donc

$$k \simeq \sqrt{\mu\sigma\omega} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} - i\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}$$

D'où

$$|\vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\mathcal{E}}| \simeq e^{-\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \vec{n}\cdot\vec{x}}$$



Les ondes électromagnétiques ne se propagent donc pas dans un milieu conducteur. ■

3.3 Électromagnétisme et relativité

3.3.1 Incompatibilité de l'électromagnétisme avec la mécanique newtonienne

Considérons un référentiel galiléen K et un autre référentiel K' en mouvement de translation uniforme à la vitesse v_e par rapport à K dans la direction x . La transformation de Galilée nous donne

$$x' = x - v_e t$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v_e} \frac{\partial}{\partial t}$$

Soit u satisfaisant à l'équation d'onde homogène (dans le vide) dans le référentiel K' (dans la direction x) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial (x')^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

par changement de variables, si u satisfait à l'équation précédente alors dans K elle satisfait à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{1}{v_e} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \left(\frac{1}{v_e^2} - \frac{1}{c^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

u ne satisfait donc pas à l'équation d'onde dans K . L'équation d'onde n'est pas invariante par changement de référentiel galiléen. Le principe de Galilée (les lois de la mécanique sont invariantes par changement de référentiel galiléen) ne semble pas s'étendre aux lois de l'électromagnétisme. Cela suggère trois interprétations possibles :

1. Les équations de Maxwell sont fausses, les bonnes équations sont invariantes par changement de référentiel galiléen et le principe de Galilée s'étend à l'électromagnétisme. Cette possibilité est difficilement défendable compte-tenu du succès des équations Maxwell pour expliquer et prédire les phénomènes électromagnétiques expérimentaux.
2. Le principe de Galilée ne s'applique qu'à la mécanique, l'électromagnétisme possédant un référentiel privilégié. Cette idée fut soutenue jusqu'au début du XXème siècle, le référentiel en question était supposé être celui de l'éther, un hypothétique milieu de propagation des ondes électromagnétiques (ce milieu est introduit par analogie avec les ondes acoustiques qui ont besoin d'un milieu physique pour se propager). Mais en 1881 Michelson entreprend de mesurer la vitesse de la Terre dans le référentiel de l'éther par une expérience d'interférométrie, le résultat fut un échec.
3. En 1905 Einstein propose que par principe toutes les lois de la physique (y compris les lois de l'électromagnétisme) sont invariantes par changement de référentiel galiléen. Pour rendre ce principe compatible avec les équations de Maxwell, il faut modifier les formules de changement de référentiel.

$$x = \gamma_e (x' + v_e t')$$

$$ct = \gamma_e \left(ct' + \frac{v_e}{c} x' \right)$$

avec

$$\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}$$

où t est le temps qui s'écoule dans le référentiel K et t' le temps qui s'écoule dans le référentiel K' . Avec ces nouvelles transformations, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial ct'}{\partial x} \frac{\partial}{c \partial t'} \\ &= \frac{1}{\gamma_e} \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{c}{v_e} \frac{\partial}{c \partial t'} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{c \partial t} &= \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{c \partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} \\ &= \frac{1}{\gamma_e} \left(\frac{\partial}{c \partial t'} + \frac{c}{v_e} \frac{\partial}{\partial x'} \right) \end{aligned}$$

avec ces formules, on montre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \iff \frac{\partial^2 u}{\partial (x')^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial (t')^2} = 0$$

Ces nouvelles formules de changement de référentiel, sont à l'origine des fondements de la théorie de la relativité restreinte. Les équations de Maxwell sont donc des équations relativistes. En dérivant les transformations de Lorentz, on trouve une nouvelle loi de composition des vitesses : $v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x / c^2}$, qui est non-linéaire et qui a c pour borne supérieure. Ainsi aucune vitesse ne peut dépasser la vitesse de la lumière dans le vide, et celle-ci est un invariant de référentiel. La vitesse de la lumière dans le vide est donc la même quelque soit le référentiel dans lequel on la mesure (en accord avec l'échec de l'expérience de Michelson-Morley).

3.3.2 Covariance

Les nouvelles lois de changement de référentiel, dites transformations de Lorentz, traitent sur un plan d'égalité l'espace et le temps. On ne peut pas dans le cadre relativiste définir une propriété purement spatiale sans qu'une propriété similaire soit impliquée dans le temps. De fait, si on a défini une propriété n'impliquant que l'espace dans un référentiel galiléen K , en passant à un autre référentiel galiléen K' , la propriété impliquera le temps. Ce comportement de la relativité restreinte est appelé covariance. En relativité, et donc en électromagnétisme, l'espace et le temps forment un tout indissociable. Des équations sont donc bien définies en relativité restreinte si celles-ci sont covariantes (traitant à égalité espace et temps) et donc si celles-ci sont invariantes par changement de référentiel galiléen.

Considérons les équations de Maxwell dans le vide pour un référentiel galiléen K :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{D} = \rho \\ \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

On considère un référentiel K' en mouvement de translation uniforme par rapport à K à la vitesse v_e dans la direction x . En utilisant les transformations de Lorentz pour définir le changement de variables de (x, y, z, t) vers (x', y, z, t') on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}' \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \\ \text{div}' \vec{B}' = 0 \\ \text{div}' \vec{D}' = \rho' \\ \text{rot}' \vec{H}' = \vec{j}' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} \rho' &= \gamma_e \left(\rho - \frac{v_e}{c^2} j_x \right) \\ \vec{j}' &= \begin{pmatrix} \gamma_e (j_x - v_e \rho) \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \\ \vec{E}' &= \begin{pmatrix} E_x \\ \gamma_e (E_y - v_e B_z) \\ \gamma_e (E_z + v_e B_y) \end{pmatrix} \\ \vec{B}' &= \begin{pmatrix} B_x \\ \gamma_e (B_y + v_e E_z) \\ \gamma_e (B_z - v_e E_y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La transformation de ρ et \vec{j} est logique, car la position des charges (décrite dans ρ) et la vitesse (décrite dans \vec{j}) sont des notions relatives au choix de référentiel (un charge immobile dans K , peut être en mouvement

dans K' et former un courant qui n'existait pas dans K). Les équations de Maxwell sont donc invariantes par changement de référentiel, mais pas les champs électriques et magnétiques individuellement. On voit de plus, qu'il est impossible de séparer les phénomènes électriques des phénomènes magnétiques, car par un simple changement de référentiel, on mélange les champs électriques et magnétiques. Ce que l'on appelle champ électrique et champ magnétique n'est donc défini que pour un référentiel galiléen fixé arbitrairement. Ces notions n'ont donc pas individuellement de sens physique et on utilise plutôt la notion de champ électromagnétique qui seule a un sens.

On notera de plus la transformation des potentiels :

$$V' = \gamma_e(V - v_e A_x)$$

$$\vec{A}' = \begin{pmatrix} \gamma_e(A_x - \frac{v_e}{c^2} V) \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Le choix de jauge de Coulomb n'est manifestement pas covariant, l'équation qui le définit $*\text{div} * \vec{A} = 0$ ne traite manifestement pas à égalité espace et temps. C'est pour cette raison qu'il aboutit à des résultats non-physiques (vitesse de propagation infinie de V). En toute rigueur ce genre de choix de jauge est interdit, en cohérence avec la relativité restreinte seul des choix de jauge covariants sont possibles (comme la jauge de Lorenz).

3.3.3 Formulation covariante de l'électromagnétisme

Bien que la théorie de l'électromagnétisme soit une théorie covariante, l'écriture des équations ne l'est pas. Opérateurs de dérivation spatiales et temporelles y sont séparés comme champ électrique et magnétique. Il est possible de construire un formalisme qui ne distingue plus entre temps et espace, et, entre électrique et magnétique. Premièrement on note $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ et $x^3 = z$, et

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \partial^\mu = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^0} & \text{si } \mu = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x^\mu} & \text{si } \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

On introduit les vecteurs à quatre composantes

$$A = \begin{pmatrix} \frac{V}{c} \\ -A_x \\ -A_y \\ -A_z \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} c\rho \\ -j_x \\ -j_y \\ -j_z \end{pmatrix}$$

et les matrices

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & -cD_z & cD_y \\ -H_y & cD_z & 0 & -cD_x \\ -H_z & -cD_y & cD_x & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce formalisme, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

pour (μ, ν, ρ) 3 indices différents dans $\{0, 1, 2, 3\}$

$$\partial_\mu G_{\nu\rho} + \partial_\nu G_{\rho\mu} + \partial_\rho G_{\mu\nu} = J_\lambda$$

avec $(\mu, \nu, \rho, \lambda) = (0, 1, 2, 3)$ ou toute permutation circulaire. Les équations structurelles s'écrivent

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

La relation de continuité des charges et des courants s'écrit

$$\sum_{\mu=0}^3 \partial^\mu J_\mu = 0$$

La condition de la jauge de Lorentz s'écrit

$$\sum_{\mu=0}^3 \partial^\mu A_\mu = 0$$

Les équations de propagation des potentiel en jauge de Lorenz s'écrivent

$$\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \partial^\mu A_\lambda = \mu_0 J_\lambda$$

que l'on écrit aussi

$$\square A_\lambda = \mu_0 J_\lambda$$

où $\square = \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta$ est appelé D'alembertien.

Sous cette forme les équations de l'électromagnétisme sont explicitement covariantes. Le champ électromagnétique F est aussi appelé tenseur de Faraday.

3.4 Invariance de jauge électromagnétique et mécanique quantique

3.4.1 Invariance de jauge en dynamique quantique

Soit une particule de charge q et de masse m soumise à un champ électrique et magnétique. L'équation de Schrödinger de cette particule est (sans considérer le spin)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi + qV\psi$$

où $\psi(x, y, z, t)$ est l'amplitude de probabilité de présence de la particule, c'est à dire que la probabilité de trouver la particule dans un portion $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de l'espace est

$$P_\Omega(t) = \iiint_\Omega |\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz$$

Si la source du champ est une particule chargée fixe, avec l'absence du champ magnétique, on retrouve l'équation de Schrödinger de l'atome d'hydrogène :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi + qV\psi$$

Le problème est que l'équation de Schrödinger n'est pas invariante sous changement de jauge électromagnétique

$$V' = V - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \chi$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}' \right)^2 \psi + qV'\psi \\ &= \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A} - q\overrightarrow{\text{grad}} \chi \right)^2 \psi + qV\psi - q \frac{\partial \chi}{\partial t} \psi \end{aligned}$$

La probabilité de présence de la particule semble donc dépendre du choix de jauge, or ce choix est arbitraire. Pour résoudre le problème, il faut remarquer qu'il y a aussi un degré de liberté dans le choix de la fonction d'onde. En effet, considérons la fonction d'onde

$$\psi'(x, y, z, t) = e^{i\varphi(x, y, z, t)}\psi(x, y, z, t)$$

où $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction arbitraire. Sous cette transformation, dite de changement local de phase, la probabilité de présence est invariante :

$$P'_\Omega(t) = \iiint_\Omega |e^{i\varphi(x, y, z, t)}\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz = \iiint_\Omega |\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz = P_\Omega(t)$$

Afin de rendre compatible l'équation de Schrödinger avec l'invariance de jauge électromagnétique, il faut, lorsqu'on procède à un changement de jauge, faire un changement local de phase qui le compense.

Théorème 4 (Principe d'invariance de jauge de Weyl). *L'équation de Schrödinger est invariante sous le changement de jauge et le changement local de phase :*

$$V'(x, y, z, t) = V(x, y, z, t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(x, y, z, t)$$

$$\vec{A}'(x, y, z, t) = \vec{A}(x, y, z, t) + \overrightarrow{\text{grad}}\chi(x, y, z, t)$$

$$\psi'(x, y, z, t) = e^{i\hbar^{-1}q\chi(x, y, z, t)}\psi(x, y, z, t)$$

où $\chi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$.

	changement de jauge	quantités invariantes	équations invariantes
Électrique	$V' = V - \frac{\partial\chi}{\partial t}$	$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$	$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
Magnétique	$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\chi$	$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$	$\text{div}\vec{B} = 0$
Quantique	$\psi' = e^{i\hbar^{-1}q\chi}\psi$	$dP = \psi ^2 dx dy dz$	$i\hbar\partial_t\psi = \frac{(-i\hbar\overrightarrow{\nabla} - q\vec{A})^2}{2m}\psi + qV\psi$

3.4.2 L'effet Aharonov-Bohm et interprétation physique du magnétisme

Propriété 10. *Soit une particule de charge électrique q , de fonction d'onde $\psi(x, y, z)$, supposée être un paquet d'ondes localisé autour d'un point (x_0, y_0, z_0) de l'espace. Un potentiel magnétique \vec{A} règne dans l'espace. On astreint la particule (ou plutôt le paquet d'ondes) à se déplacer suivant un chemin fermé C partant de (x_0, y_0, z_0) . Alors après avoir déplacé la particule, sa fonction d'onde est :*

$$\psi'(x, y, z) = e^{i\hbar^{-1}q \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}\psi(x, y, z)$$

Preuve : On suppose dans un premier temps que l'on translate le paquet d'ondes suivant un vecteur infinitésimal $d\vec{\ell}$. Le paquet d'ondes n'étant pas déformé par l'opération, la fonction d'onde traduite s'identifie à la fonction d'onde initiale à une phase près que l'on peut supposer proportionnelle à $d\vec{\ell}$:

$$\psi(x + dx, y + dy, z + dz) = e^{i\hbar^{-1}q\vec{\varphi} \cdot d\vec{\ell}}\psi(x, y, z)$$

d'où

$$\psi(x + dx, y + dy, z + dz) - \psi(x, y, z) = (e^{i\hbar^{-1}q\vec{\varphi} \cdot d\vec{\ell}} - 1)\psi(x, y, z)$$

par un développement limité

$$\overrightarrow{\text{grad}}\psi \cdot d\vec{\ell} = i\hbar^{-1}q\vec{\varphi} \cdot d\vec{\ell}\psi$$

$$i\hbar\overrightarrow{\text{grad}}\psi = -q\vec{\varphi}\psi$$

On procède à un changement de jauge $\psi' = e^{i\hbar^{-1}q\chi}\psi$, on a alors

$$i\hbar\overrightarrow{\text{grad}}\psi' = -q\vec{\varphi}'\psi'$$

$$\iff i\hbar\overrightarrow{\text{grad}}\psi - q\overrightarrow{\text{grad}}\chi\psi = -q\vec{\varphi}'\psi$$

$$\iff i\hbar\overrightarrow{\text{grad}}\psi = -q(\vec{\varphi}' - \overrightarrow{\text{grad}}\chi)\psi$$

On en déduit que

$$\vec{\varphi}' = \vec{\varphi} + \overrightarrow{\text{grad}}\chi$$

On peut donc identifier $\vec{\varphi}$ à \vec{A} . On a donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\psi \cdot d\vec{\ell} = i\hbar^{-1}q\vec{A} \cdot d\vec{\ell}\psi$$

On note $(x(s), y(s), z(s))$ la paramétrisation de la courbe \mathcal{C} . Le long de cette courbe l'équation précédente s'écrit

$$\frac{d\psi}{ds} = i\hbar^{-1}q\vec{A} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{ds}\psi(s)$$

d'où

$$\psi(s) = e^{i\hbar^{-1}q \int_0^s \vec{A} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{ds} ds} \psi(0)$$

■

Supposons qu'une particule chargée se trouve dans un solide infini percé d'un tube infini de rayon a dans lequel on a installé un solénoïde infini parcouru par un courant I et comportant ν spires par unité de longueur. Le cylindre est ainsi une portion de l'espace interdite à la particule. On note z l'axe du cylindre et (x, y) les coordonnées dans le plan perpendiculaire au cylindre. Le problème étant symétrique par translation suivant z , les champs ne vont pas dépendre de z . De plus le problème étant invariant par rotation autour de z , les champs ne dépendent que de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les plans (x, y) étant plan de symétrie, et le champ magnétique étant orthogonal à tous plan de symétrie, on a

$$\overleftarrow{B} = B(r) * \vec{e}_z$$

Par application du théorème d'Ampère :

$$\overleftarrow{B} = \begin{cases} \mu_0\nu I * \vec{e}_z & \text{si } r < a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

et

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0\nu I r}{2} \vec{e}_\theta & \text{si } r < a \\ \frac{\mu_0\nu I a^2}{2r} \vec{e}_\theta & \text{si } r > a \end{cases}$$

Supposons qu'on astreint la particule à suivre un cercle \mathcal{C} dans le plan (x, y) de rayon $R > a$ centré sur l'axe du tube. Alors après le déplacement, la fonction d'onde de la particule devient

$$\begin{aligned} \psi'(x, y, z) &= e^{i\hbar^{-1}q \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}} \psi(x, y, z) \\ &= e^{i\hbar^{-1}q\mu_0\nu I \pi a^2} \psi(x, y, z) \end{aligned}$$

La phase acquise par la fonction d'onde au cours du déplacement est mesurable, il suffit de faire interférer le paquet d'ondes déplacé avec un paquet d'ondes resté inchangé :

$$\psi_{tot}(x, y, z) = \frac{\psi(x, y, z) + \psi'(x, y, z)}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi_{tot}(x, y, z)|^2 = |\psi(x, y, z)|^2 \frac{1 + \cos\left(\hbar^{-1}q \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}\right)}{2}$$

La particule voit tout au long du chemin un champ magnétique nul, et pourtant elle subit un effet magnétique visible dans sa phase, c'est l'effet Aharonov-Bohm.

L'effet Aharonov-Bohm induit un questionnement difficile sur l'interprétation ontologique de l'électromagnétisme, c'est à dire sur la recherche de l'entité porteuse du sens physique, de l'objet fondamentale de l'électromagnétisme, de l'essence de la théorie physique. Comme on l'a déjà évoqué la champ magnétique est généralement considéré comme la bonne entité physique, car contrairement au potentiel, il est défini de manière univoque. Le problème de cette interprétation est que l'électron ne voit jamais qu'un champ magnétique nul. Si le champ magnétique \overleftarrow{B} est porteur du sens physique, la logique serait qu'aucun effet

magnétique ne serait mesurable sur une particule qui ne rencontre que des champs nuls. Or ce n'est pas le cas. Si on admet que le potentiel \vec{A} est le porteur du sens physique, alors l'interprétation est cohérente avec l'effet Aharonov-Bohm, sauf que la définition de l'objet fondamental est soumise à un choix arbitraire, ce qui n'est pas très satisfaisant. La dernière possibilité est de considérer la boucle de Wilson $W(\mathcal{C}) = e^{i\hbar^{-1}q \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}$ comme la bonne entité physique. Ce serait cohérent avec l'effet Aharonov-Bohm (c'est d'ailleurs l'entité qui apparaît explicitement dans l'effet), et cela nous donne un objet défini de manière univoque. Le défaut majeur de ce point de vue est que cet objet est non-local (car définie sur un chemin et non en un point). Or comme la théorie des champs avait été précisément introduite pour donner une interprétation locale des interactions à distance, on a là un retour en arrière – il faut néanmoins noter, qu'avec l'émergence de la mécanique quantique, la notion de physique non-locale n'est plus aussi choquante pour les physiciens d'aujourd'hui que pour ceux des siècles antérieurs au XXème –.

Il n'y a pas de réponse tranchée quant à la question du choix de l'entité porteuse du sens physique, celui-ci doit être considéré comme une posture philosophique sur ce qu'est la nature de l'électromagnétisme et pas comme un fait établi. Le choix d'une des trois postures (ou d'un total agnosticisme) est tout à fait respectable, il faut juste connaître ce que l'on gagne en le faisant et surtout ce à quoi l'on renonce. Pour finir, on donne un tableau résumant les différentes postures et ce qu'elles apportent en terme d'interprétation (en plus des trois interprétations réalistes objectivistes que l'on vient de discuter, on donne aussi d'autres types d'interprétation) :

	<i>Fournit une interprétation locale des phénomènes magnétiques</i>	<i>Fournit un objet porteur du sens physique défini de manière univoque</i>	<i>Permet d'interpréter l'effet Aharonov-Bohm</i>
<i>Le champ magnétique \vec{B} est la quantité physique fondamentale</i>	oui	oui	non
<i>Le potentiel magnétique \vec{A} est la quantité physique fondamentale</i>	oui	non	oui
<i>La boucle de Wilson $W(\mathcal{C})$ est la quantité physique fondamentale</i>	non	oui	oui
<i>Il n'y a pas d'objets fondamentaux en physique, seule la symétrie de jauge est porteuse du sens physique (interprétation réaliste structuraliste)</i>	oui	\emptyset	oui
<i>La physique n'a avoir qu'avec les résultats expérimentaux, la recherche de la nature d'une "réalité" est en dehors du champ de la physique qui ne s'intéresse qu'au pouvoir prédictif d'une théorie (interprétation instrumentaliste)</i>	\emptyset	\emptyset	\emptyset
<i>La chose en soi étant par nature essentiellement inconnaissable (ou si c'est le cas elle ne peut être que de nature mentale), l'électromagnétisme n'est qu'une représentation de la nature et n'a aucune valeur ontologique (interprétation idéaliste, positiviste, Kantienne)</i>	agnostique	\emptyset	agnostique

Le symbole \emptyset signifie que la question n'a pas sens dans l'interprétation considérée.