

TD 1: Collision de particules relativistes

Exercice 1.1- Collision élastique d'électrons

Un électron A_1 , d'énergie cinétique $E_{K,1} = 3MeV$ dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} , rencontre un second électron au repos A_2 . La collision est élastique.

On désigne par θ l'angle de diffusion que fait, avec la direction incidente, la quantité de mouvement \vec{p}'_1 de l'électron diffusé A'_1 , par E_1 l'énergie totale de A_1 et par E'_1 celle de A'_1 . On rappelle que $m_e = 511keV/c^2$.

1. Quel est le facteur relativiste γ_1 de l'électron projectile ?
2. Démontrer la relation suivante :

$$p_1^* = \gamma_C \left(p_1 - \frac{v_C E_1}{c^2} \right)$$

où p_1^* est l'impulsion de A_1 dans le référentiel du centre de masse et où v_C est la vitesse du référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} .

3. Établir en fonction de γ_1 , l'expression du rapport β_C de la vitesse du référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* du système sur la vitesse de la lumière dans le vide.
4. Même question pour le facteur relativiste γ_C associé à \mathcal{R}^*
5. Calculer la vitesse du projectile par rapport à \mathcal{R}^* .
6. En déduire son énergie cinétique dans \mathcal{R}^* . Que devient cette dernière après la collision ?
7. Écrire dans \mathcal{R} , les équations caractéristiques de cette collision relatives à la quantité de mouvement et à l'énergie.
8. Montrer que l'angle θ est relié aux énergies cinétiques par la relation :

$$\cos^2 \theta = \frac{E'_{K,1}(E_{K,1} + \alpha m_e c^2)}{E_{K,1}(E'_{K,1} + \alpha m_e c^2)}$$

où α est un facteur à déterminer.

9. En déduire l'énergie cinétique $E'_{K,1}$ de A'_1 en fonction de θ et de $E_{K,1}$ (application numérique pour $\theta = \pi/3$).
10. Quelle est la valeur maximale de $E'_{K,1}$? Ce résultat était-il prévisible ?

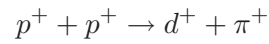
Exercice 1.2- Désintégration d'un méson

Un méson K^+ ($m_K = 493.7MeV/c^2$), au repos, se désintègre en plusieurs pions chargés ($m_\pi = 139.6MeV/c^2$).

1. Montrer qu'il peut se désintégrer au plus en trois pions.
2. Quels sont les angles que font entre elles les trajectoires des trois pions issus de la désintégration lorsqu'ils ont même énergie ?
3. Trouver les énergies minimale et maximale que peut avoir l'un des trois pions.

Exercice 1.3- Collision inélastique de deux protons

On considère une collision entre deux protons p^+ ($m_p = 938.25 \text{ MeV}/c^2$) donnant un deutéron d^+ ($m_d = 1875.56 \text{ MeV}/c^2$) et un méson π^+ ($m_\pi = 139.6 \text{ MeV}/c^2$) :

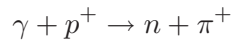


Quelle est, dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , l'énergie seuil de la réaction ?

Calculer l'énergie cinétique seuil du proton projectile dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} où le proton cible est au repos.

Exercice 1.4- Collision inélastique photon-proton

On réalise la collision suivante entre un photon ($m_\gamma = 0$) et un proton ($m_p = 938.25 \text{ MeV}/c^2$) immobile dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} :



collision engendrant un neutron ($m_n = 939.55 \text{ MeV}/c^2$) et un pion ($m_\pi = 139.6 \text{ MeV}/c^2$).

1. Établir la relation entre l'énergie $E_\gamma = p_\gamma c$ dans \mathcal{R} du photon incident et l'énergie totale du système dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* .
2. Quelle est l'énergie seuil de la réaction dans \mathcal{R}^* ?
3. Calculer l'énergie seuil du photon dans \mathcal{R} .

TD 2: Métriques de l'espace-temps

Exercice 2.1- Métrique de Minkowski

On considère une portion de l'espace dont la géométrie est décrite par la métrique de Minkowski :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

On considère deux particules de masse m dans cette portion de l'espace de vitesses constantes v_1 et v_2 telles que $v_1 < v_2 < c$ (les particules ne sont soumises à aucune force, et on néglige la déformation de l'espace-temps induite par leurs masses), $\vec{v}_1 = (v_1, 0, 0)$ et $\vec{v}_2 = (v_2, 0, 0)$. À la date $t = 0$, la particule 1 se trouve aux coordonnées de l'espace $(0, 0, 0)$ et la particule 2 aux coordonnées $(a, 0, 0)$ ($a > 0$).

1. Trouver $s \mapsto \gamma_1(s)$ et $s \mapsto \gamma_2(s)$ les paramétrisations des lignes d'Univers des deux particules.
2. À la date $t = 0$ la particule 1 émet un photon dans la direction $x > 0$. Trouver la paramétrisation $s \mapsto \gamma_p(s)$ de la ligne d'Univers du photon. Faire un schéma des trois lignes d'Univers dans l'espace-temps.
3. À quelle date le photon émis par la première particule sera-t-il absorbé par la seconde ?
4. Pour une horloge associée à la première particule, combien de temps s'est-il écoulé entre l'émission du photon et son absorption. Même question mais du point de vue d'une horloge associée à la seconde particule. Conclusion.
5. Combien de temps s'est-il écoulé entre l'émission et l'absorption du point de vue du photon lui-même (pour une horloge associée au photon).

Exercice 2.2- Métrique de Robertson-Walker

On considère une galaxie (sans mouvement propre par rapport à la Voie Lactée) se trouvant à la coordonnée u_1 émettant un rayonnement de période d'émission T_e , et donc de fréquence $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$. La Voie Lactée est supposée de coordonnée $u = 0$. On note T_0 et ω_0 la période d'émission et la fréquence de l'onde rayonnée dans le référentiel de la Voie Lactée. On note t_1 la date d'émission de l'onde et t_0 sa date de réception dans la Voie Lactée. L'Univers est supposé régir par la métrique de Robertson-Walker :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{du^2}{1 - ku^2} + u^2 d\theta^2 + u^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right)$$

où $k \in \{0, +1, -1\}$ est une constante, (u, θ, φ) forment un système de coordonnées sphériques centré sur la Voie Lactée mais où u est sans dimension, et $R(t)$ a la dimension d'une longueur. On appelle $R(t)$ facteur d'échelle. On a représenté schématiquement les lignes d'Univers des deux galaxies et des photons émis par la galaxie source sur la figure suivante :

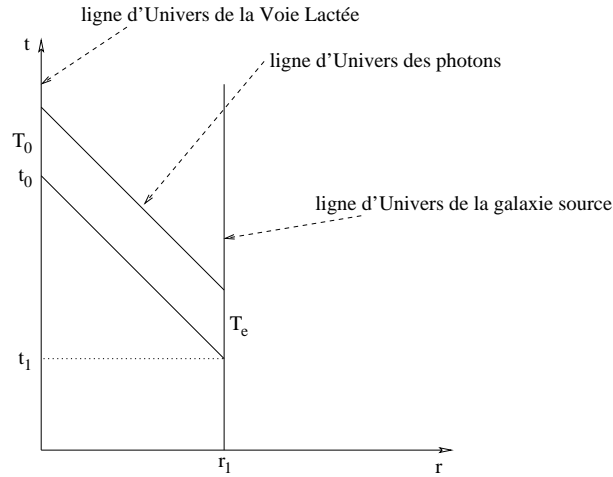


Schéma dans l'espace-temps du rayonnement d'une galaxie vers la Voie Lactée.

1. Soit $s \mapsto (\gamma^t(s), \gamma^u(s), \gamma^\theta(s), \gamma^\varphi(s))$ la paramétrisation de la ligne d'Univers d'un photon. Montrer que l'on a la relation suivante :

$$\frac{d\gamma^t}{R} = -\frac{d\gamma^u}{c\sqrt{1 - k(\gamma^u)^2}}$$

2. Montrer que la quantité $\int_{t_{\text{émission}}}^{t_{\text{reception}}} \frac{d\gamma^t}{R}$ pour un photon émis de la galaxie source et reçu dans la Voie Lactée est le même pour un "photon de début d'émission" que pour "un photon de fin d'émission". La ligne d'Univers de la Voie Lactée s'identifiant à la direction géométrique du temps dans le présent modèle, le temps du référentiel de la Voie Lactée s'identifie à t .
3. En remarquant que T_e et T_0 sont très petits devant la durée du voyage et peuvent donc être considérés comme au voisinage de 0, déduire de la question précédente une relation entre T_e et T_0 .
4. En déduire que le redshift ne dépend que du facteur d'échelle.

TD 3: Équations de Friedmann

Exercice 3.1- Densité du fluide cosmique en fonction du facteur d'échelle

On considère un Univers gouverné par les équations de Friedmann. On note $\rho(t)$ et $P(t)$ respectivement la densité de masse par unité de volume et la pression du fluide cosmique.

1. À partir des équations de Friedmann et de l'équation de Raychandhuri, démontrer que

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -\frac{P}{c^2} \frac{dR}{dt} \quad (1)$$

c étant la célérité de la lumière et $R(t)$ le facteur d'échelle.

2. La matière baryonique (matière ordinaire) est de type "matière froide" (ou "poussière"), elle se caractérise par l'équation d'état :

$$P_{mat} = 0 \quad (2)$$

À partir de l'équation (1) et de l'équation (2) déduire que dans un Univers dominé par la matière baryonique, on a $\rho_{mat} = \frac{C_{mat}}{R^3}$ où C_{mat} est une constante physique.

3. Que peut-on déduire de la question précédente sur la densité de matière baryonique au moment du Big-Bang? Est-ce physiquement un problème?
4. Discuter la validité de votre réponse à la question précédente sachant que l'équation d'état $P_{mat} = 0$ n'est valide que dans l'approximation où la vitesse d'agitation **thermique** de la matière est négligeable devant c .
5. Le fluide cosmique n'est pas constitué seulement de matière baryonique, il y a aussi du rayonnement. Ce rayonnement est composé de la lumière (des photons), d'ondes gravitationnelles (des gravitons?) et du flux de neutrinos. Le rayonnement est soumis à l'équation d'état

$$P_{ray} = \frac{1}{3} \rho_E \quad (3)$$

P_{ray} étant la pression de radiation du rayonnement et ρ_E la densité d'énergie par unité de volume. Par l'équivalence masse-énergie $E = mc^2$, on pose $\rho_E = \rho_{ray} c^2$ où ρ_{ray} est la densité de masse équivalente du rayonnement. Les équations de Friedmann s'appliquent alors au rayonnement avec pour densité et pression ρ_{ray} et P_{ray} . En utilisant l'équation (1) montrer que dans un Univers dominé par le rayonnement on a $\rho_{ray} = \frac{C_{ray}}{R^4}$ où C_{ray} est une constante physique.

6. Pourquoi dit-on qu'à ses débuts l'Univers était dominé par le rayonnement alors qu'aujourd'hui il est dominé par la matière?
7. Les cosmologistes et les physiciens des particules envisagent également l'existence d'une "énergie noire" appelée "quintessence". Le fluide de quintessence se distingue par une pression négative donnée par l'équation d'état

$$P_{quint} = -\rho_{quint} c^2 \quad (4)$$

Montrer que la quintessence ne se dilue pas avec l'expansion de l'Univers.

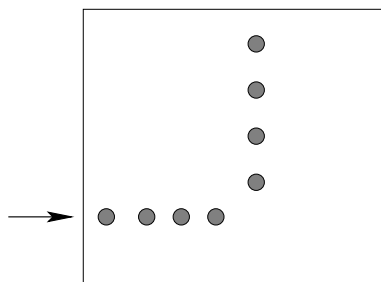
TD 4: Équation de Klein-Gordon

Exercice 4.1- Chambre à bulles

Un hypéron Σ^- est envoyé dans une chambre à bulles avec une énergie cinétique $E_{K,\Sigma}$ (aucun champ magnétique ne règne dans la chambre à bulles). L'hypéron se désintègre suivant la relation :

$$\Sigma^- \rightarrow \pi^- + n$$

en un pion π^- et un neutron n . L'évènement donne le résultat suivant :



Chambre à bulles : On rappelle que les atomes d'hydrogène liquide contenus dans la chambre sont ionisés au passage de toute particule chargée, ce qui provoque la formation de bulles d'hydrogène gazeux (représentées ici en gris). La flèche indique le point et la direction d'injection de l'hypéron.

1. Interpréter (dans le cadre non-quantique) la figure précédente, et en déduire une relation sur les impulsions des particules.
2. On note $t = 0$ l'instant de la désintégration de l'hypéron. Juste après celle-ci et avant la formation de la première bulle associée au pion, la fonction d'onde du pion (particule de spin 0) était :

$$\psi(\vec{x}, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\hbar^{-1}(E_\pi t - \vec{p}_\pi \cdot \vec{x})} & \text{si } \vec{x} = (x, y, z) \text{ est un point à l'intérieur de la chambre} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où V est le volume de la chambre, et E_π et \vec{p}_π sont l'énergie totale et l'impulsion du pion. Montrer que cette fonction d'onde est bien solution de l'équation de Klein-Gordon ($\hbar^2 \square \psi + m_\pi^2 c^2 \psi = 0$).

3. La première bulle associée au pion est de centre \vec{x}_1 et de rayon R , elle s'est formée à la date t_1 . Quelle était la probabilité pour que cette bulle se forme avec ces paramètres ?
4. Quelle était la probabilité pour que la première bulle se forme avec le même rayon en un autre point \vec{x}'_1 ?
5. La mécanique quantique impose que les formations des seconde, troisième et quatrième bulles associées au pion suivent des processus aléatoires. Mais ces processus sont-ils les mêmes que celui de formation de la première bulle ? Pourquoi ? Que peut-on dire du processus aléatoire global de formation de l'ensemble des bulles associées au pion ?

Exercice 4.2- Quantification de l'impulsion relativiste

On considère une particule relativiste libre, de masse m , de spin nul, astreinte à se déplacer uniquement dans un plan (Oxy) où elle est canalisée par deux murs en $x = 0$ et $x = L$. On note $\psi(x, y, t)$ la fonction d'onde de la particule qui satisfait à l'équation de Klein-Gordon :

$$\hbar^2 \square \psi + m^2 c^2 \psi = 0$$

avec

$$\psi(0, y, t) = \psi(L, y, t) = 0 \quad \forall y, t$$

On suppose que l'on peut écrire ψ sous la forme

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(x)e^{-i\hbar^{-1}(Et - p_y y)}$$

où E est l'énergie totale de la particule et p_y est la composante de son impulsion dans la direction y .

1. Trouver l'équation différentielle à laquelle satisfait $\psi_0(x)$.
2. Réécrire cette équation en faisant apparaître p_x la composante de l'impulsion de la particule dans la direction x .
3. Trouver la solution générale de l'équation précédente.
4. En introduisant les conditions aux limites (en $x = 0$ et $x = L$), trouver quelles sont les valeurs possibles de p_x .

TD 5: Interactions de particules

Exercice 5.1- Théorie des monopôles magnétiques

On s'intéresse à une hypothétique particule qui serait une source magnétique soit uniquement nord soit uniquement sud. On suppose qu'en un point 0 pris comme origine de l'espace, se trouve un monopôle magnétique de charge $g \neq 0$ (si $g > 0$ la particule est de charge magnétique nord, sinon elle est de charge magnétique sud). Soient $\vec{B}(x, y, z)$ son champ magnétique et $\vec{A}(x, y, z)$ son potentiel-vecteur. Par définition de la charge si S^2 est une sphère de rayon r centrée sur le monopôle, le flux du champ magnétique à travers celle-ci est égale à

$$\Phi = \oint_{S^2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 4\pi g \quad (5)$$

1. En utilisant le théorème de Stokes, montrer que la formule 5 est incompatible avec la relation $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$.
2. Pour résoudre le problème précédent, on est amené à supposer que \vec{A} n'existe pas globalement, mais seulement localement, c'est à dire que l'on ne peut pas donner à \vec{A} une seule et même forme dans tout \mathbb{R}^3 . Soit S_N^2 et S_S^2 les hémisphères nord et sud de S^2 . On définit alors des potentiels-vecteurs locaux sur chacun des hémisphères :

$$\begin{aligned} \vec{A}^N &= g \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \vec{A}^S &= -g \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi & \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{aligned}$$

(θ, φ) étant les coordonnées sur la sphère. Montrer que la formule 5 est compatible avec la relation $\vec{B}^i = \text{rot}\vec{A}^i$ $i = N, S$.

3. Montrer que malgré la non-existence d'un potentiel-vecteur global, la champ magnétique défini par les potentiels-vecteurs locaux de la question précédente est défini globalement, c'est à dire que $\vec{B}^N(r, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi) = \vec{B}^S(r, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi)$, $\forall r, \varphi$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$ correspondant à l'équateur d'une sphère centrée sur le monopôle, c'est à dire les seuls points de l'espace où coexistent les potentiels-vecteurs locaux). On rappelle que le rotationnel en coordonnées sphériques est :

$$\text{rot}\vec{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta F_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial(r F_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

4. Soit la fonction :

$$\vec{h}^{NS}(r, \varphi) = \vec{A}^N(r, \frac{\pi}{2}, \varphi) - \vec{A}^S(r, \frac{\pi}{2}, \varphi)$$

Montrer que la fonction de transition \vec{h}^{NS} correspond à un changement de jauge électromagnétique locale au niveau de l'équateur.

On rappelle que le gradient en coordonnées sphériques est

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

5. Soit $(x, y, z) \mapsto \psi(x, y, z)$ la fonction d'onde d'une particule de charge électrique q . Lorsque la particule électriquement chargée interagit avec un monopôle magnétique, sa fonction d'onde n'est définie que localement : $\psi^N(r, \theta, \varphi)$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\psi^S(r, \theta, \varphi)$ pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Quelle est la relation entre ψ^N et ψ^S au niveau de l'équateur ?

6. Une fonction d'onde étant un objet physique, sa définition et ses propriétés doivent être cohérentes, et en particulier on doit avoir

$$\psi^i(r, \theta, \varphi = 0) = \psi^i(r, \theta, \varphi = 2\pi) \quad \forall r, \theta, i$$

puisque $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$ définissent la même position. Que doit-on imposer à g pour satisfaire cette condition de cohérence ?

7. Si il existe quelque part dans l'Univers un monopôle magnétique, que pourrait-on en conclure sur les charges électriques ?

Exercice 5.2- Collisions et nombres quantiques internes

Parmis ces collisions, lesquelles sont permises et lesquelles ne le sont à priori pas :

- $n + e_L^+ \rightarrow p^+$
- $p^+ + e_L^- \rightarrow n + \nu_{eL}$
- $\Lambda_c^+ + n \rightarrow \Xi_c^+ + \Omega_c^0$
- $p^+ + n \rightarrow p^+ + n$
- $\Delta^{++} \rightarrow \Delta^+ + \mu_L^+ + \nu_{\mu L}$

Annexes : nombres quantiques internes des leptons et des principaux baryons :

Leptons	masse (MeV/c ²)	s	Q/e	I_3	Y	L_e	L_μ	L_τ
e_L^-	0.511	1/2	-1	-1/2	-1	1	0	0
e_R^-	0.511	1/2	-1	0	2	1	0	0
ν_{eL}	$< 10^{-5}$	1/2	0	1/2	-1	1	0	0
μ_L^-	106	1/2	-1	-1/2	-1	0	1	0
μ_R^-	106	1/2	-1	0	2	0	1	0
$\nu_{\mu L}$	< 0.2	1/2	0	1/2	-1	0	1	0
τ_L^-	1777.1	1/2	-1	-1/2	-1	0	0	1
τ_R^-	1777.1	1/2	-1	0	2	0	0	1
$\nu_{\tau L}$	< 20	1/2	0	1/2	-1	0	0	1

Baryons	masse (MeV/c ²)	composition	s	b	Q/e	S	I_3	Y	C
p^+	938.3	uud	1/2	1	1	0	1/2	1	0
n	939.6	ddu	1/2	1	0	0	-1/2	1	0
Δ^{++}	1232	uuu	3/2	1	2	0	3/2	1	0
Δ^+	1232	uud	3/2	1	1	0	1/2	1	0
Δ^0	1232	udd	3/2	1	0	0	-1/2	1	0
Δ^-	1232	ddd	3/2	1	-1	0	-3/2	1	0
Λ^0	1115.7	uds	1/2	1	0	-1	0	0	0
Λ_c^+	2284.9	udc	1/2	1	1	0	0	1	2
Σ^+	1189.4	uus	1/2	1	1	-1	1	0	0
Σ^0	1197.4	uds	1/2	1	0	-1	0	0	0
Σ^-	1197.4	dds	1/2	1	-1	-1	-1	0	0
Ξ^0	1314.8	uss	1/2	1	0	-2	1/2	-1	0
Ξ^-	1321.3	dss	1/2	1	-1	-2	-1/2	-1	0
Ξ_c^0	2471.8	dsc	3/2	1	0	-1	-1/2	1	1
Ξ_c^+	2466.3	usc	3/2	1	1	-1	1/2	1	1
Ω^-	1672.4	sss	3/2	1	-1	-3	0	-2	0
Ω_c^0	2697.5	ssc	1/2	1	0	-2	0	0	1

Exercice 5.3- Interaction forte résiduelle

On s'intéresse à l'interaction nucléaire entre protons et neutrons au sein des noyaux atomiques. On choisit de décrire cette interaction par un modèle de Yang-Mills, dont les états sont décrit par des doublets de nucléons (spineurs de nucléons) :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{p^+} \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

où ψ_{p^+} est la fonction d'onde d'un proton et ψ_n la fonction d'onde d'un neutron. On rappelle les nombres quantiques internes des nucléons : $p^+(I_3 = 1/2; Y = 1; Q/e = 1)$ et $n(I_3 = -1/2, Y = 1, Q/e = 0)$.

1. En considérant la symétrie de jauge, montrer qu'il existe 3 particules médiatrices de l'interaction entre nucléons, dont on précisera les matrices associées. On note ces particules, π^+ , π^- et π^0 et on les appelle des pions.
2. À partir des matrices des pions, établir les équations de transformation de n et p^+ sous l'interaction nucléaire.
3. En déduire les nombres quantiques internes des pions.
4. On sait que les nucléons sont des particules composites : $p^+ = uud$ et $n = udd$. En déduire les équations de transformation au niveau des quarks. Dans le modèle de la saveur, quelles sont les matrices associées aux pions ?
5. Les pions sont en fait des particules composées d'un quark et d'un antiquark. Sachant que la matrice représentante d'un pion est donc obtenue comme le produit de la matrice d'un quark par un antiquark, trouver la décomposition des pions. Remarque : les matrices des quarks sont des matrices colonne alors que les matrices des antiquarks sont des matrices lignes.
6. Vérifier que le résultat obtenu est en accord avec les nombres quantiques internes des (anti)-quarks.
7. Que peut-on en conclure sur ce qui se passe lorsqu'on observe une transformation d'un proton en neutron et réciproquement ? Que passe-t-il à l'intérieur d'un noyau atomique ?