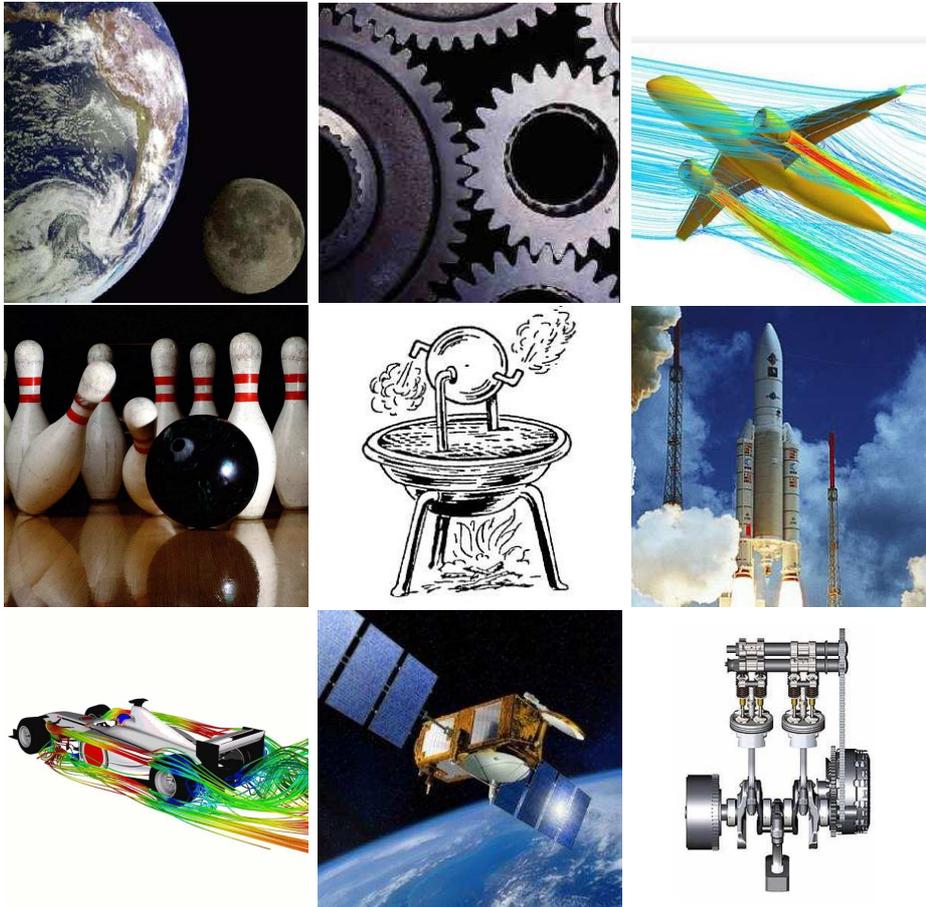


## Dynamique des Systèmes Physiques Travaux Dirigés



## TD 1: Mécanique Képlérienne

### Exercice 1.1- Vitesse de libération

On appelle vitesse de libération d'une planète, la vitesse à laquelle doit être lancé un projectile depuis la surface de la planète pour que celui-ci échappe à l'attraction gravitationnelle planétaire. Calculer la vitesse de libération sur Terre et sur Mars.

Données numériques :

- constante de gravitation universelle  $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
- masse de la Terre  $M_{\oplus} = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$
- rayon de la Terre  $R_{\oplus} = 6400 \text{ km}$
- masse de Mars  $M_{\text{Mars}} = 6.4 \times 10^{23} \text{ kg}$
- rayon de Mars  $R_{\text{Mars}} = 3400 \text{ km}$

### Exercice 1.2- Équation de la trajectoire d'un objet ponctuel en champ de force centrale

Montrer que, dans un champ de force centrale, l'expression différentielle de la trajectoire (supposée plane) d'un objet ponctuel de masse  $m$  peut s'écrire de la manière suivante, en effectuant le changement de variable  $u = \frac{1}{r}$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(1/u)}{mC^2u^2}$$

où  $C = r^2\dot{\theta}$  est la constante des aires et  $f(r)$  est le module de la force centrale.

### Exercice 1.3- Énergie mécanique associée à un champ de force centrale

En écrivant l'équation de conservation de l'énergie mécanique, montrer que l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'un point matériel de masse  $m$  dans un champ de force centrale peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{mC^2}{2r^4} \left( \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right) - \int f(r)dr = E$$

où  $C = r^2\dot{\theta}$  est la constante des aires et  $f(r)$  est le module de la force centrale. (On suppose que le mouvement est plan).

### Exercice 1.4- Lois de Képler

Soit une planète  $P$  de masse  $m$  en interaction gravitationnelle avec le Soleil  $S$  de masse  $M$ . On introduit deux vecteurs  $\vec{L}_0 = \vec{S}\vec{P} \wedge \vec{p}$  appelé moment cinétique ( $\vec{p} = m\vec{V}_P$  est la quantité de mouvement de la planète) et  $\vec{A} = \frac{1}{m}\vec{p} \wedge \vec{L}_0 - GMm\vec{e}_r$  appelé vecteur de Runge-Lenz-Laplace (le vecteur  $\vec{e}_r$  est un vecteur unitaire dans la direction Soleil-Planète).

1. Montrer que le moment cinétique est une constante du mouvement, i.e.  $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{0}$ . En déduire que le mouvement de la planète est restreint à un plan.
2. On se place dans un système de coordonnées polaires avec  $(S, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  le plan de la trajectoire. Montrer que l'aire balayée par unité de temps par  $\vec{S}\vec{P}$  est  $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ .
3. Déduire des questions précédentes la seconde loi de Kepler.
4. Montrer que le vecteur Runge-Lenz-Laplace est une constante du mouvement,  $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{0}$ .
5.  $\vec{A}$  étant fixe, on choisit la direction de  $\vec{A}$  comme référence pour le repère polaire, i.e.  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{A}$  et  $\vec{e}_r$  (ou  $\vec{S}\vec{P}$ ). Calculer  $\vec{A} \cdot \vec{S}\vec{P}$  et en déduire l'équation polaire de la trajectoire, c'est à dire  $r$  en fonction de  $\theta$ .

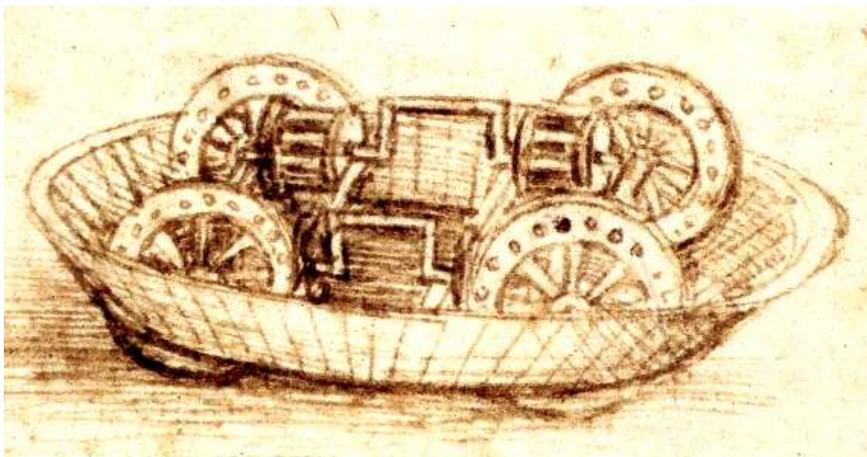
6. Montrer que sous une certaine condition (que l'on précisera) sur  $A = \|\vec{A}\|$ ,  $m$  et  $M$ , la question précédente démontre la première loi de Kepler (on précisera la valeur de l'excentricité  $e$  et du paramètre  $p$  de l'ellipse en fonction de  $A$ ,  $M$ ,  $m$ ,  $G$  et  $L_0$ ).
7. Montrer que  $L_0 = \frac{2m\pi ab}{T}$ ,  $T$  étant la période de révolution de  $P$ .
8. Montrer que la vitesse de la planète est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{V}_P = \frac{L_0 e}{mp} \sin \theta \vec{e}_r + \frac{L_0}{mr} \vec{e}_\theta$$

9. Calculer l'accélération de la planète en fonction de  $\theta$ ,  $r$ ,  $p$ ,  $e$  et  $L_0$ .
10. Démontrer la troisième loi de Kepler, et préciser l'expression de  $\frac{T^2}{a^3}$  pour le système solaire.

## TD 2: Mouvements de rotation

### Exercice 2.1- Le char d'assaut de Léonard de Vinci



Observez bien ce croquis de Léonard de Vinci concernant le mécanisme d'entraînement d'un char d'assaut de bois. Commentez.

### Exercice 2.2- Angles d'Euler

On considère un satellite artificiel capable d'effectuer des mouvements de rotation autour de son centre de gravité  $O$  afin de changer son orientation. On note  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  un repère cartésien orthonormé direct attaché à l'orientation initiale du satellite, et  $\mathcal{R}' = (O, \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$  le repère orthonormé direct entraîné par les mouvements de changement d'orientation du satellite. Enfin on considère  $\vec{e}_u$  le vecteur unitaire dirigeant la ligne des nœuds, et  $(\psi, \theta, \phi)$  les angles d'Euler attachés aux changements d'orientation.

1. Exprimer le vecteur rotation instantané du satellite dans la base de vecteurs  $(\vec{e}_z, \vec{e}_u, \vec{e}'_z)$ .
2. Même question dans la base de  $\mathcal{R}$ .
3. Même question dans la base de  $\mathcal{R}'$ .

### Exercice 2.3- Bases de lancement spatial

Pour choisir l'emplacement de leurs bases de lancement de fusées, les différentes agences spatiales choisissent des lieux se trouvant le plus proche possible de l'équateur et tels que les régions se trouvant à l'est du champ de tir soient inhabitées. Expliquer les raisons de ces choix. Les tirs de fusées de l'agence spatiale russe (FKA) sont réalisés depuis Baïkonour au Kazakhstan (latitude  $46.25^\circ N$ ), ceux de la NASA depuis Cap Canaveral en Floride (latitude  $28.5^\circ N$ ) et ceux de l'ESA depuis Kourou en Guyane (latitude  $5.23^\circ N$ ). Comparez les vitesses (par rapport au référentiel du site de lancement) avec lesquelles doit être lancée une fusée en fonction du site choisi (on rappelle que le rayon de la Terre est  $R_\oplus = 6400 \text{ km}$  et que la vitesse de libération est  $v_L = 11.2 \text{ km.s}^{-1}$ , on néglige les frottements avec l'atmosphère).

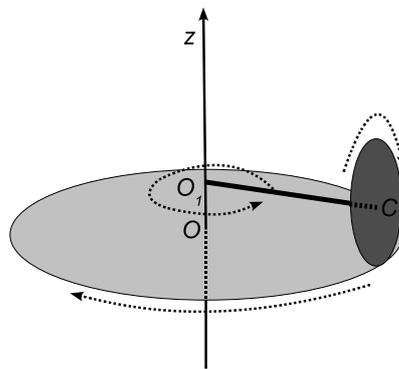
### Exercice 2.4- Voiture dérapant sur un plaque de verglas

Une voiture aborde un virage de rayon de courbure constant  $R$  avec une vitesse uniforme  $v$  (vitesse

de son centre de masse). La route étant verglacée, la voiture se met à tourner sur elle-même (l'axe de rotation passant par son centre de gravité) avec la vitesse angulaire  $\omega = \alpha t$  ( $t = 0$  étant l'instant d'entrée dans le virage,  $\alpha$  est une constante). On donne  $\vec{e}_r = \frac{\vec{OG}}{\|OG\|}$  ( $O$  : centre de l'arc du virage,  $G$  : centre de gravité de la voiture), et  $\vec{e}_\theta$  vecteur unitaire tangent à l'arc du virage et dans la direction de déplacement de la voiture. On suppose que la voiture peut être assimilée à un parallélépipède de longueur  $l$  entre les deux pare-chocs, avec les  $2/3$  de la masse répartis uniformément sur la moitié arrière de la voiture, le reste étant réparti uniformément sur la moitié avant. Donner l'expression du vecteur vitesse du pare-chocs avant de la voiture dans le référentiel de la route en fonction de  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .

### Exercice 2.5- Rotation entraînée par une roue

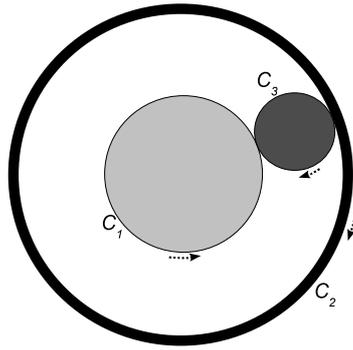
Une roue de rayon  $r$  roule sans glisser sur le bord d'un plateau circulaire de rayon  $R$  libre de tourner autour de l'axe  $(Oz)$  normal au plateau et passant par son centre  $O$ . L'axe de la roue est une tige passant par le point  $O_1$  sur la droite  $(Oz)$ , parallèle au plateau, et tournant autour de  $(Oz)$  avec la vitesse angulaire  $\omega_0$ . On désigne par  $C$  le centre de la roue,  $\omega_1$  la vitesse angulaire de rotation de la roue (induite par la rotation de la tige) et par  $\omega_2$  celle du plateau (entraîné par la roue).



1. Établir la relation entre  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .
2. Exprimer la vitesse du point  $H$  le sommet de la roue.
3. Étudier le cas particulier où le plateau est bloqué.

### Exercice 2.6- Roulements à billes

On considère trois cercles matériels coplanaires  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .  $C_1$  et  $C_2$  sont concentriques et de rayons  $r_1 < r_2$ .  $C_3$  est enchâssé entre  $C_1$  et  $C_2$  (en contact avec eux).  $C_1$  et  $C_2$  peuvent tourner autour de leur centre, et  $C_3$  roule sans glisser sur  $C_1$  et  $C_2$ .



Établir l'expression de  $\omega_3$  vitesse angulaire de rotation de  $C_3$  en fonction de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  (les vitesses angulaires de rotation de  $C_1$  et  $C_2$ ), et de  $r_1$  et  $r_2$ .

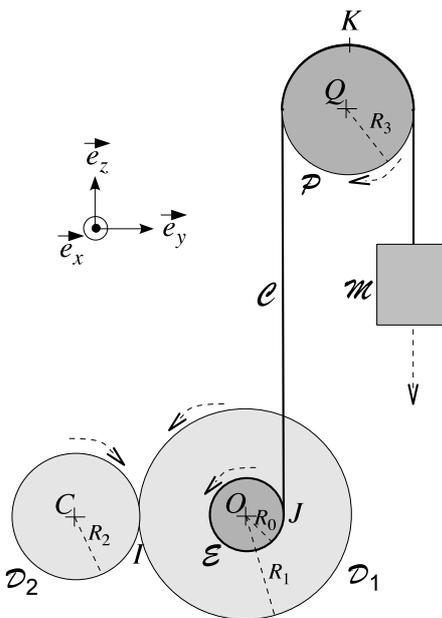
### Exercice 2.7- Cône de crème glacée

Un cône de crème glacée est posée sur une table où il roule sans glisser. Le demi-angle du cône est noté  $\gamma$  (angle entre l'axe du cône et une génératrice).

1. Exprimer le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  du cône par rapport au référentiel de la table  $\mathcal{R}$ , en fonction de la vitesse de précession  $\dot{\psi}$  (vitesse de rotation du cône autour d'un axe normal à la table) et de la vitesse de rotation propre  $\dot{\phi}$  (vitesse de rotation du cône autour de son axe de symétrie).
2. Exprimer la vitesse d'un point  $I$  de la génératrice du cône en contact avec la table.
3. En déduire la relation entre  $\omega = \|\vec{\Omega}\|$ ,  $\dot{\psi}$  et  $\gamma$ .

### Exercice 2.8- Dispositif à contrepoids

On considère un disque vertical  $\mathcal{D}_1$  dans le plan  $(Oyz)$ , de rayon  $R_1$ , de centre  $O$  et libre de tourner autour d'un axe dirigé par  $\vec{e}_x$  et passant par  $O$ . Un second disque vertical  $\mathcal{D}_2$  dans le plan  $(Oyz)$ , de rayon  $R_2$ , de centre  $C$  roule sans glisser sur le disque  $\mathcal{D}_1$  autour d'un axe dirigé par  $\vec{e}_x$  et passant par  $C$ .  $(CO)$  est une droite horizontale dirigée par  $\vec{e}_y$ . On note  $I$  le point de contact entre les deux disques. Une corde  $\mathcal{C}$  est enroulée autour d'un essieu cylindrique  $\mathcal{E}$  de rayon  $R_0$  et de centre  $O$ , solidaire au disque  $\mathcal{D}_1$  ( $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{D}_1$  sont solidaires, il n'y a pas de mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre). La corde  $\mathcal{C}$  est tendue à la verticale par une masselotte  $\mathcal{M}$  via une poulie  $\mathcal{P}$  de centre  $Q$ , de rayon  $R_3$  et libre de tourner autour d'un axe dirigé par  $\vec{e}_x$  et passant par  $Q$ . La corde se déroule autour de l'essieu  $\mathcal{E}$  et passe sur la poulie  $\mathcal{P}$  sans glisser. On néglige l'épaisseur de la corde que l'on suppose inextensible. On note  $J$  le dernier point de contact entre la corde et l'essieu ( $J$  est le point séparant la partie de la corde tendue à la verticale de la partie encore enroulée autour de  $\mathcal{E}$ , il est sur la droite  $(CO)$ ). On note  $K$  le point au sommet de la poulie  $\mathcal{P}$ .



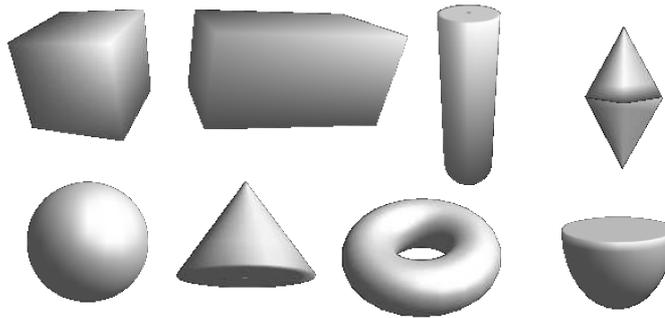
La masselotte  $\mathcal{M}$  tombe à la vitesse  $v$  et on note  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  les vitesses angulaires de rotation respectivement des disques  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et de la poulie  $\mathcal{P}$  (il s'agit de vitesses absolues et donc positives). Enfin, on note  $\mathcal{R}$  le référentiel galiléen du laboratoire.

1. Donner l'expression des vecteurs rotation instantanée dans  $\mathcal{R}$  des 4 solides :  $\vec{\Omega}_{\mathcal{P}/\mathcal{R}}$ ,  $\vec{\Omega}_{\mathcal{E}/\mathcal{R}}$ ,  $\vec{\Omega}_{\mathcal{D}_1/\mathcal{R}}$  et  $\vec{\Omega}_{\mathcal{D}_2/\mathcal{R}}$ .
2. Donner l'expression de  $\vec{V}_{K^*/\mathcal{R}}$  la vitesse dans  $\mathcal{R}$  de  $K_*$  (le point matériel de la corde qui s'identifie avec  $K$ ) en fonction de  $v$ .
3. En déduire la vitesse angulaire  $\omega_3$  en fonction de  $v$  et  $R_3$ .
4. Donner l'expression de  $\vec{V}_{J_0/\mathcal{R}}$  la vitesse dans  $\mathcal{R}$  de  $J_0$  (le point matériel de l'essieu qui s'identifie avec  $J$ ) en fonction  $v$ .
5. En déduire la vitesse angulaire  $\omega_1$  en fonction de  $v$  et  $R_0$ .
6. Donner l'expression de la vitesse angulaire  $\omega_2$  en fonction de  $v$ ,  $R_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .
7. La masselotte est de masse  $m$ . Elle est lâchée sans vitesse initiale à l'instant  $t = 0$ . Donner l'expression de  $\omega_2(t)$  en fonction du temps écoulé  $t$ , de  $R_0$ , de  $R_1$  et de  $R_2$ .

## TD 3: Moments d'inertie & moments cinétiques

### Exercice 3.1- Allure de la matrice d'inertie

Pour chacun des objets suivants, déterminer l'allure de la matrice d'inertie dans le repère pour lequel celle-ci a l'expression la plus simple (on précisera le repère en question).



Tous les objets sont supposés présenter une répartition homogène de leurs masses.

### Exercice 3.2- Calculs de moments d'inertie

Calculer l'expression des moments d'inertie par rapport aux axes principaux passant par les centres de masse des objets suivants :

- une boule pleine homogène de rayon  $R$  et de masse  $M$ ,
- une sphère creuse homogène de rayon  $R$  et de masse  $M$ ,
- un cylindre plein homogène de rayon  $R$ , de hauteur  $h$  et de masse  $M$ ,
- un disque de rayon  $R$  et de masse  $M$ .

### Exercice 3.3- Molécule d'eau

On considère une molécule  $H_2O$  dont l'atome d'oxygène est en mouvement de translation uniforme à la vitesse  $v$  dans la direction  $\vec{u}$  par rapport au référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ . À  $t = 0$  l'atome d'oxygène occupait la position  $O_0$  dans  $\mathcal{R}$ . La molécule est animée d'un mouvement de rotation dans  $\mathcal{R}$  à la vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de l'axe  $(OC)$  ( $O$  est la position de l'atome d'oxygène et  $C$  est le centre de masse de la molécule). L'axe  $(OC)$  forme un angle  $\alpha$  avec la direction  $\vec{u}$ . La molécule est supposée rigide et les atomes sont supposés ponctuels. On désigne par  $\ell$  la longueur des liaisons  $O - H$  et par  $\theta$  l'angle aigu entre les deux liaisons. On note  $m_O$  la masse de l'atome d'oxygène et  $m_H$  celle d'un atome d'hydrogène.

1. Calculer la distance  $OC$  entre l'atome d'oxygène et le centre de masse de la molécule en fonction de  $\ell$ ,  $\theta$  et  $\mu = \frac{m_H}{2m_H + m_O}$ .
2. Établir l'expression du moment cinétique propre de la molécule.
3. En déduire l'expression du moment cinétique de la molécule au point  $O_0$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  à une date  $t > 0$ .

## TD 4: Lois de conservation

### Exercice 4.1- Classification des forces s'exerçant sur un satellite artificiel

On considère un satellite artificiel en orbite basse autour de la Terre et en mouvement dans le référentiel terrestre. Le tableau suivant présente le bilan des forces s'exerçant sur le satellite dans le référentiel terrestre, dans chaque cas cocher les cases pertinentes.

	Force d'inertie	Force conservative	Force ne travaillant pas	Correction perturbative
Attraction gravitationnelle de la Terre considérée comme une sphère parfaite	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Correction à la gravité terrestre due à l'aplatissement de la Terre (J2)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Attractions gravitationnelles du Soleil et de la Lune	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Force centrifuge	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Frottements avec l'atmosphère raréfiée	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Force de Coriolis	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Pression de radiation solaire	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### Exercice 4.2- Physique du yo-yo

On considère un yo-yo de rayon  $R$ , de masse  $M$ , de moment d'inertie  $I$  par rapport à son axe de symétrie et dont la ficelle est de longueur  $\ell$ . On néglige toutes les forces de frottements et d'amortissement. Le yo-yo est lâché sans vitesse et sans rotation initiales depuis un point d'altitude  $h$  pour son centre de masse (altitude où l'extrémité de la ficelle est retenue). On note  $(Oz)$  l'axe vertical dirigé vers le ciel et  $\theta$  l'angle permettant de repérer la rotation du yo-yo ( $z(t=0) = h$  et  $\theta(t=0) = 0$ ). Il n'y a pas de glissement entre le yo-yo et la ficelle.

1. Donner l'expression de l'énergie mécanique totale du yo-yo.
2. Quelle relation existe-t-il entre  $\dot{z}$  et  $\dot{\theta}$  ?
3. Quelle est la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  du yo-yo l'instant précédant la tension de la ficelle ?
4. Même question mais l'instant suivant la tension de la ficelle.



### Exercice 4.3- Indicateur d'assiette



Dans l'aviation on appelle *indicateur d'assiette* un instrument de navigation qui peut être assimilé à une boule homogène enchassée dans le tableau de bord de l'avion et libre de tourner sans aucun frottement (différents dispositifs que nous n'aborderons pas ici sont utilisés pour s'approcher au mieux de ce modèle idéal sans frottement). Traditionnellement l'un des hémisphères est peint en bleu et l'autre en brun ou en noir. Juste avant le décollage, la boule est placée hémisphère bleu vers le haut et elle est lancée dans un mouvement de rotation autour de l'axe vertical passant par son centre. Après le décollage, aucun couple de force ne vient agir sur la boule. Expliquez le rôle de cet instrument dans la navigation aérienne et son fonctionnement physique.

### Exercice 4.4- Patineuse artistique

On considère une patineuse artistique qui effectue sur la glace une figure en deux phases. Dans la première phase, la patineuse tourne sur elle-même à vitesse angulaire constante  $\omega_1$ , avec les bras tendus, écartés et parallèles au sol. Pour la deuxième phase du mouvement, la patineuse ramène les bras le long du corps, elle tourne alors à la vitesse angulaire  $\omega_2$ . On néglige les frottements. Comparer  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

### Exercice 4.5- Couplage gravitationnel spin-orbite du système Terre-Lune

On considère le système Terre-Lune comme un système isolé. Pour simplifier on fera comme si l'orbite lunaire était dans le plan équatorial de la Terre, l'axe de rotation de la Lune étant supposé orthogonal à ce plan (les axes de rotation de la Terre et de la Lune sont donc supposés parallèles). La Terre et la Lune interagissent gravitationnellement, cette interaction se traduit sur les mouvements de rotation/révolution de la manière suivante :

- Les effets de marée exercés par la Terre sur la Lune contraignent sa rotation propre. En régime permanent, une face de Lune est toujours tournée du côté de la Terre (c'est la face visible). La période de rotation et la période de révolution de la Lune sont donc identiques. Le temps caractéristique du régime transitoire étant très court à l'échelle temporelle considérée dans cet exercice, on supposera que la synchronisation rotation - révolution de la Lune est vérifiée à tout instant.
- L'attraction gravitationnelle de la Lune sur la Terre déforme celle-ci en créant des "bourlets" au niveau de la face dirigée vers la Lune et au niveau de la face opposée (c'est l'effet de marée, celui-ci est plus ample sur les masses océaniques que sur les masses continentales). Or la rotation de la Terre étant plus rapide que la révolution de la Lune, la Terre tourne plus vite que sa déformation. Ceci induit un couple de force qui ralentit la rotation de la Terre.

Les caractéristiques du système Terre-Lune sont actuellement les suivantes :

Masse de la Terre	$M_T = 5.9 \times 10^{24} \text{ kg}$
Moment d'inertie de la Terre	$I_T = 9.6 \times 10^{31} \text{ kg.km}^2$
Période de rotation de la Terre	$T_T = 24 \text{ h}$
Masse de la Lune	$M_L = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$
Moment d'inertie de la Lune	$I_L = 8.4 \times 10^{28} \text{ kg.km}^2$
Période de rotation et de révolution de la Lune	$T_L = 27 \text{ j}$
Distance Terre-Lune	$R = 384400 \text{ km}$

1. Calculer l'expression du moment cinétique total du système Terre-Lune au centre de la Terre. En déduire la valeur actuelle de  $\mathcal{L}$  le module de ce moment cinétique.
2. En considérant une échelle de temps courte pour laquelle  $R$  peut être approchée comme constante, trouver à l'aide du PFD une expression de l'énergie d'interaction gravitationnelle Terre-Lune en fonction de  $M_L$ ,  $R$  et  $\omega_L$  (la vitesse angulaire de rotation/révolution de la Lune).

3. Calculer l'expression de l'énergie totale du système Terre-Lune en fonction de  $I_T$ ,  $I_L$ ,  $R$ ,  $M_L$ ,  $M_T$ ,  $\omega_L$  et  $\omega_T$ . En déduire sa valeur actuelle  $\mathcal{E}$ .
4. On note  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation de la Terre et  $\tilde{R}$  la distance Terre-Lune lorsque le régime permanent total aura été atteint (c'est à dire lorsque la vitesse de rotation de la Terre et la distance Terre-Lune cesseront d'évoluer). Trouver un système de deux équations ayant pour inconnues  $\omega$  et  $\tilde{R}$  et dont les coefficients dépendent de  $I_L$ ,  $I_T$ ,  $M_L$ ,  $M_T$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{E}$ .
5. En déduire la durée d'une journée sur Terre lorsque le régime permanent total sera atteint.
6. Calculer la distance Terre-Lune  $\tilde{R}$ . On mesure actuellement que la Lune s'éloigne de la Terre à la vitesse de 3 *cm* par an. En supposant cette vitesse constante (en fait elle diminue avec le temps) calculer une estimation du temps qui nous sépare du régime permanent total.

Remarque : on rappelle que l'âge de la Terre est de 4.5 milliards d'années.

## TD 5: Propulsion

### Exercice 5.1- Décollage d'une fusée

On considère une fusée de masse initiale  $M_0$  décollant à la verticale. Les propulseurs de la fusée éjectent du gaz avec un débit constant  $q$  à la vitesse d'éjection constante  $-u\vec{e}_z$  (vitesse d'éjection du gaz par rapport aux tuyères). La masse totale de combustible disponible est  $m_c$ . On supposera le champ de gravitation uniforme. La fusée est soumise à une force de résistance de l'air de la forme  $\vec{R} = -\alpha V\vec{e}_z$  ( $V$  étant la vitesse de la fusée par rapport au sol, la masse d'air est supposée sans mouvement par rapport au sol). On supposera la référentiel terrestre galiléen.

1. Écrire l'équation de la dynamique sous la forme  $M(t)\vec{a}(t) = \vec{P}(t) + \vec{R}(t) + \vec{F}(t)$  où  $\vec{a}(t)$  est l'accélération de la fusée par rapport au sol et où  $\vec{F}(t)$  est appelée force propulsive (dont on déterminera l'expression).
2. À quelle condition la fusée décolle t-elle ?
3. Calculer l'expression de la vitesse de la fusée par rapport au sol  $V(t_*)$  à l'instant de l'arrêt de la combustion si on néglige les frottements atmosphériques ( $\alpha \simeq 0$ ).
4. Même question mais sans négliger les frottements atmosphériques.

### Exercice 5.2- Vol stationnaire d'un hélicoptère

On considère un hélicoptère de masse  $M$ . Les pales du rotor principal sont de longueur  $R$ , celle du rotor de queue sont de longueur  $r$ . On note  $I_p$  le moment d'inertie des 4 pales du rotor principal (par rapport à l'axe du rotor principal),  $I_c$  le moment d'inertie du corps de l'hélicoptère (par rapport à l'axe du rotor principal) et  $I_q$  le moment d'inertie des pales du rotor de queue (par rapport à l'axe du rotor de queue). On note  $\ell$  la distance entre les axes du rotor principal et du rotor de queue. On note  $\omega$  la vitesse de rotation du rotor principal et  $\omega_{ac}$  celle du rotor de queue. On supposera l'air comme un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$ . On suppose que le brassage de l'air par les pâles du rotor principal induit un courant sous les pales de vitesse  $\vec{V}_{air} = -\lambda R\omega\vec{e}_z$  par rapport à l'hélicoptère ( $\lambda > 0$  est appelé coefficient de vitesse d'entrée). On note  $p_{atm}$  la pression atmosphérique.

1. Quelle est l'expression du débit  $q$  d'air brassé par les pâles du rotor principal ?
2. En déduire l'expression de la poussée induite par la rotation du rotor principal.
3. Donner l'expression de  $\omega$  pour que l'hélicoptère soit en vol stationnaire.
4. En déduire l'expression du couple du moteur du rotor principal nécessaire à un vol stationnaire sachant que la résistance de l'air sur les pâles génère un moment d'amplitude  $\frac{1}{2}\alpha\rho\pi R^2\omega^2$  ( $\alpha > 0$  une constante).
5. À quoi sert le rotor de queue ? Quelle doit être la vitesse  $\omega_{ac}$  en vol stationnaire ?

## TD 6: Dynamique de corps en rotation

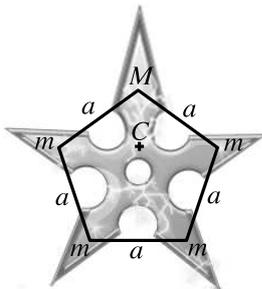
### Exercice 6.1- Patineuse artistique

Une patineuse artistique glisse dans la direction  $\vec{e}_x$  avec une vitesse initiale  $v_0$  et sans rotation initiale (le visage tourné dans la direction  $\vec{e}_x$ ). La patineuse est de masse  $m$  et de moment d'inertie  $I$  par rapport à l'axe vertical ( $Gz$ ) passant par son pieds gauche. À  $t = 0$  la patineuse appuie sur son pieds gauche afin que son patin gauche s'immobilise sur la glace. La patineuse garde une distance constante  $d$  entre ces deux patins. Sa masse est répartie uniformément sur les deux patins. On assimilera la patineuse à deux points matériels  $G$  et  $D$  correspondant à ses pieds. Les patins subissent une force de frottement solide avec la glace décrite par la loi de Coulomb  $F = \mu R$  où  $F$  est l'intensité de la force de frottement s'exerçant sur le patin,  $\mu$  est le coefficient d'adhérence dynamique entre la glace et le patin, et  $R$  est l'intensité de la réaction normale de support de la glace.

1. Calculer le moment en  $G$  des forces extérieures agissant sur la patineuse.
2. En déduire la loi horaire  $\theta(t)$  (orientation du visage de la patineuse par rapport à la direction de sa translation  $\vec{e}_x$ ).
3. Comment sera tournée la patineuse à la fin du mouvement ?

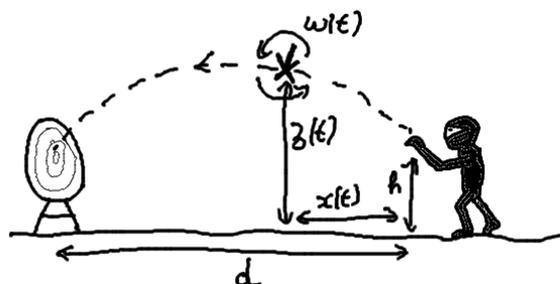
### Exercice 6.2- L'attaque du ninja

Un ninja envoie un shuriken sur une cible située à une distance  $d$ . Le shuriken est lancé avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontal et depuis une hauteur  $h$ . Il est lancé tel que son plan coïncide avec la plan vertical passant par le ninja et sa cible, et avec une vitesse de rotation propre initiale  $\omega_0$  (la rotation propre se faisant autour de l'axe normal au plan du shuriken passant par son centre de masse  $C$ ). On néglige toute forme de frottement.



Le shuriken a la forme d'une étoile plate à cinq branches dont l'une est plus grande (et donc plus lourde) que les autres. On assimilera le shuriken à un système rigide de cinq points matériels formant un pentagone régulier de côtés de longueur  $a$ . Tous les points matériels sont de masse  $m$  sauf celui correspondant à la grande branche qui est de masse  $M > m$  (la masse totale du shuriken est donc de  $4m + M$ ).

On note  $x(t)$  la distance horizontale parcourue par le shuriken,  $z(t)$  l'altitude de son centre de masse et  $\omega(t)$  sa vitesse de rotation propre.



1. Écrire les principes fondamentaux de la dynamique pour la translation du centre de masse  $C(x(t), z(t))$  et la rotation propre  $\omega(t)$  du shuriken. On notera  $I_{(Cy)}$  le moment d'inertie du shuriken par rapport à son axe de rotation ( $Cy$ ). On ne demande pas de calculer  $I_{(Cy)}$  à cette question, par contre on explicitera les expressions de la résultante et du moment des forces.

2. Calculer l'expression de la loi horaire pour la rotation propre  $\omega(t)$ , en fonction de  $m$ ,  $M$ ,  $a$ ,  $\omega_0$  et  $t$ .
3. Quelle est la vitesse de rotation  $\omega(t_*)$  du shuriken lorsque celui-ci se plante sur la cible? ( $t_*$  étant l'instant où le shuriken atteint sa cible).

### Exercice 6.3- Patinage d'une roue

Une roue de rayon  $a$  et de moment d'inertie  $I$  par rapport à l'axe de rotation, roule sur une route glissante. Sur cette roue repose une masse  $M$  (qui inclue la masse de la roue elle-même). Un moteur imprime à la roue un couple constant  $\vec{M}_C$  au centre  $C$  de la roue. Les frottements entre le point de contact de la roue et la route sont décrits par la loi de Coulomb des frottements solides  $F = \mu R$ , où  $F$  est l'intensité des frottements,  $\mu$  est le facteur d'adhérence dynamique entre la roue et la route, et  $R$  est l'intensité de la réaction normale de la route. À  $t = 0$  la roue est immobile. On note  $\mathcal{E}^*$  le référentiel du centre de masse de la roue,  $\mathcal{E}$  le référentiel de la roue entraîné par sa rotation, et  $\mathcal{R}$  le référentiel galiléen de la route. On note  $A$  le point géométrique de contact de la roue avec la route.

1. Calculer  $\omega(t)$  la vitesse de rotation de la roue.
2. En déduire  $\vec{V}_{A_1/\mathcal{E}^*}$  la vitesse du point matériel  $A_1$  de la roue en contact avec la route dans  $\mathcal{E}^*$ .
3. Calculer  $\vec{V}_{C/\mathcal{R}}$  la vitesse du centre de masse de la roue dans  $\mathcal{R}$ .
4. En déduire la vitesse de glissement de la roue dans  $\mathcal{R}$ .

### Exercice 6.4- Bowling

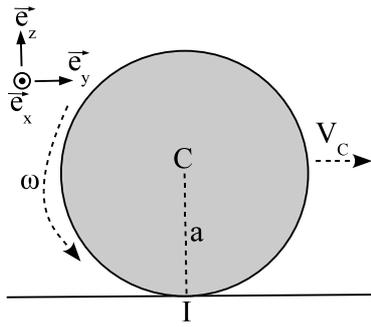
On considère une piste de Bowling de largeur  $l$  et de longueur  $d$ . On note  $\vec{e}_x$  la direction suivant la largeur de la piste pointant de gauche à droite pour le lanceur, et  $\vec{e}_y$  la direction suivant le longueur de la piste pointant du début de la piste vers les quilles.  $\vec{e}_z$  est la direction verticale vers le haut. À la date  $t = 0$ , un joueur lance une boule de masse  $M$ , de rayon  $a$  et de moment d'inertie  $I = \frac{2}{5}Ma^2$ ; avec une vitesse initiale  $\vec{V}_0 = v_0\vec{e}_y$  et une rotation initiale  $\vec{\Omega}_0 = -\omega_0\vec{e}_y$ . La boule est lancée depuis la droite de la piste à la distance  $x_0$  du bord gauche. Les trois premiers quarts de la piste sont recouverts d'une pellicule d'huile de sorte que la boule n'y subit aucun frottement. Sur le dernier quart la boule subit une force de frottement solide telle que :

$$\vec{F} = -\mu_x R \operatorname{sgn}(V_x)\vec{e}_x - \mu_y R \operatorname{sgn}(V_y)\vec{e}_y$$

où  $\mu_{x/y}$  sont des facteurs d'adhérence entre la piste et la boule et  $R$  est l'intensité de la réaction normale de la piste. Les frottements de l'air sont négligés.

1. Pour la première partie du mouvement (les trois premiers quarts de la piste), calculer  $(x(t), y(t))$  la position du centre de masse de la boule sur la piste et  $\vec{\Omega}(t)$  le vecteur rotation instantanée.
2. Pour le dernier quart de la piste, calculer la résultante et le moment au centre de masse des forces extérieures agissant sur la boule.
3. En déduire  $(x(t), y(t))$  et  $\vec{\Omega}(t)$  pour le dernier quart de la piste.
4. Décrire le mouvement de la boule de bowling.

### Exercice 6.5- Effet rétro



On considère une bille de billard de masse  $m$ , de rayon  $a$  et de moment d'inertie  $I_C = \frac{2}{5}ma^2$ . À  $t = 0$  la bille glisse sur le tapis de billard avec une vitesse initiale de son centre de masse  $\vec{V}_C(0) = v_0\vec{e}_y$  et une rotation initiale  $\vec{\Omega}(0) = \omega_0\vec{e}_x$  contraire au sens de la marche. On suppose que  $2a\omega_0 > 5v_0$ . Le point matériel  $I$  de la bille en contact avec le tapis est soumis à une force de frottement décrite par la loi de Coulomb :  $F = \mu R$  où  $F$  est l'intensité des frottements,  $R$  est l'intensité de la réaction normale du tapis et  $\mu$  est le facteur d'adhérence dynamique entre la bille et le tapis.

1. Montrer qu'à tout instant la vitesse du centre de masse  $V_C(t)$ , la vitesse de rotation  $\omega(t)$  et  $V_I(t)$  la vitesse du point  $I$  sont reliées par

$$V_I(t) = V_C(t) + a\omega(t)$$

2. Calculer  $\vec{S}$  la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur la bille.
3. Quelle distance la bille parcourt elle dans la direction des  $y > 0$  avant l'arrêt de sa translation initiale ?
4. Calculer  $\vec{M}_C$  le moment des forces extérieures au centre de masse  $C$ .
5. Calculer l'expression de  $\omega(t)$  la vitesse de rotation de la bille au cours du temps. Quelle est la vitesse de rotation de la bille au moment de l'arrêt de sa translation ?
6. Que fait la bille ensuite (on ne demande pas de calculs) ?

## TD 7: Aérodynamique

**Formulaire mathématique : L'équation intégrale**

$$V_\infty \left( \alpha - \frac{dz}{dx} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x')}{x-x'} dx' \quad \text{avec } \gamma(c) = 0$$

a pour solution

$$\gamma(\theta) = 2V_\infty \left( A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right)$$

où  $x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta)$  et où les coefficients de Glauert sont définis par

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} \Big|_{x=\frac{c}{2}(1-\cos \theta)} d\theta$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} \Big|_{x=\frac{c}{2}(1-\cos \theta)} \cos(n\theta) d\theta$$

### Exercice 7.1- Portance d'une aile symétrique

Démontrer qu'une aile symétrique (l'intrados et l'extrados symétriques par rapport à la corde) ne génère aucune portance à incidence nulle (on ne fait aucune hypothèse sur le régime d'écoulement autour de l'aile).

### Exercice 7.2- Coup lifté au tennis : effet Magnus

Un joueur de tennis envoie la balle par un coup lifté, c'est à dire que la balle est envoyée initialement à une vitesse  $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$  ( $\vec{e}_x$  est dans la direction du côté adverse du court) avec une rotation sur elle-même de vecteur rotation instantané  $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_y$  ( $\vec{e}_y$  pointe sur la gauche du tennisman). On suppose que la friction entre l'air et la balle entraîne la rotation de l'air de la couche limite autour de la balle. On néglige la force et le moment de force qu'induit la friction sur la balle. La balle est de rayon  $R$ . On supposera l'air comme incompressible.

1. Calculer l'expression du champ de pression dans la couche limite (on décomposera la balle en sections circulaires dans le plan  $(x, z)$ ).
2. En déduire par un calcul direct la portance et la traînée de la balle.
3. Quel est l'effet de la portance sur la trajectoire de la balle ?

### Exercice 7.3- Portance d'une aile plate fine

Calculer la portance d'une aile fine de forme rectangulaire (longueur  $l$  et largeur  $c$ ) et totalement plate, pour un angle d'incidence  $\alpha$  faible. On supposera l'écoulement de l'air en régime potentiel et on note  $\vec{V}_\infty$  la vitesse de l'écoulement incident (loin en amont de l'aile) dans le référentiel de l'aile.

### Exercice 7.4- Portance d'un profil parabolique

On considère un profil fin parabolique :  $z(x) = 4m \frac{x}{c} \left( 1 - \frac{x}{c} \right)$  ( $z$  étant le squelette de l'aile,  $x$  la distance le long de la corde qui est de longueur  $c$ ). Un tel profil peut correspondre à une voile rectangulaire d'un voilier. On supposera l'écoulement de l'air en régime potentiel et on note  $\vec{V}_\infty$  la vitesse de l'écoulement incident (loin en amont de l'aile) dans le référentiel de l'aile.

1. Calculer les coefficients de Glauert.
2. En déduire la densité tourbillonnaire de l'aile  $\gamma$  et la circulation globale  $\Gamma$  autour de l'aile.
3. En déduire le coefficient de portance de l'aile.

**Exercice 7.5- Conditions de vol en palier**

On considère un avion de ligne de masse  $m$  dont les coefficients aérodynamiques sont

$$C_L(\alpha) = C_0 + C_1 \sin\left(\frac{\alpha \pi}{\alpha_d 2}\right)$$

$$C_D(\alpha) = C_0$$

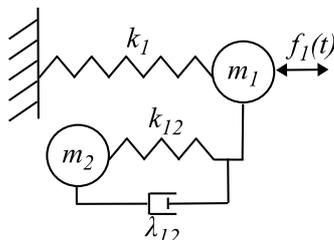
où  $\alpha$  est l'incidence de l'avion par rapport au flux d'air. On note  $S$  l'aire de la surface porteuse de l'avion. Les propulseurs de l'avion génèrent une poussée  $U$  (on néglige la perte de masse de l'avion). Le pilote souhaite voler en palier à l'altitude  $h$  à la vitesse sol air constante  $V_0$ .

1. Trouver le réglage de la poussée  $U$  et de l'incidence  $\alpha$  pour réaliser le vol en palier.
2. À un instant  $t = 0$  l'avion se retrouve en panne moteur. Trouver la variation  $\alpha(t)$  que doit imprimer le pilote à l'avion pour maintenir le palier.
3. Combien de temps le pilote peut-il maintenir le palier après la panne moteur ?

## TD 8: Vibrations

### Exercice 8.1- L'amortisseur de Frahm

Le schéma d'un amortisseur de Frahm est le suivant :

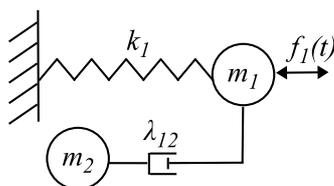


Le système à amortir étant  $(m_1, k_1)$  soumis à une force de vibration  $f_1(t) = f e^{i\omega t}$  en notation complexe.

1. Écrire le PFD de la dynamique pour le système.
2. Mettre l'équation de la dynamique sous forme matricielle.
3. On cherche les solutions sous la forme  $x_i(t) = a_i e^{i\omega t}$ . Trouver les amplitudes  $a_i$ .
4. Dans le cas  $\alpha = \frac{\omega_{12}}{\omega_1} = 1$ , représenter les graphiques de  $|\mu(\beta)|$  pour  $\eta = 0$ ,  $\eta \rightarrow +\infty$  et  $\eta > 0$ , où  $\mu = \frac{k_1 a_1}{f}$  est le facteur d'amplification dynamique,  $\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$  est le rapport de la fréquence de forçage sur la fréquence d'oscillations libres du système  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ,  $\omega_{12} = \sqrt{\frac{k_{12}}{m_2}}$  est le fréquence d'oscillations libres de l'amortisseur et  $\eta = \frac{\lambda_{12}}{2m_2\omega_1}$  est l'amortissement relatif croisé.
5. Commentez.

### Exercice 8.2- L'amortisseur de Lanchester

Le schéma d'un amortisseur de Lanchester est le suivant :



Le système à amortir étant  $(m_1, k_1)$  soumis à une force de vibration  $f_1(t) = f e^{i\omega t}$  en notation complexe. Représenter les graphiques de  $|\mu(\beta)|$  pour  $\eta = 0$ ,  $\eta \rightarrow +\infty$  et  $\eta > 0$ , où  $\mu = \frac{k_1 a_1}{f}$  est le facteur d'amplification dynamique,  $\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$  est le rapport de la fréquence de forçage sur la fréquence d'oscillations libres du système  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$  et  $\eta = \frac{\lambda_{12}}{2m_2\omega_1}$  est l'amortissement relatif croisé. Comparez à un amortisseur de Frahm.

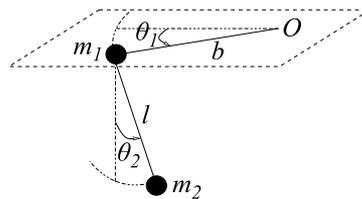
### Exercice 8.3- Vibrations longitudinales d'une chaîne atomique

On considère une chaîne droite de  $n$  atomes identiques de masse  $m$ . Les liaisons entre les atomes sont modélisées par des ressorts de raideur  $k$ . La mécanique quantique prévoit que la vibration des liaisons va être amortie par émission de photons. On note  $\lambda$  le coefficient de frottement fluide de cet amortissement. On note  $x_i(t)$  la position du  $i$ -ème atome de la chaîne.

1. Écrire l'équation de la dynamique du système et la mettre sous forme matricielle.
2. Chercher les modes propres et les fréquences propres de vibration dans le cas  $n = 3$ .
3. Toujours par  $n = 3$ , décrire le mouvement des atomes pour une chaîne se trouvant dans un mode propre de vibration (on étudiera les 3 cas).

#### Exercice 8.4- Pendule au bout d'un bras de torsion

On considère un pendule rigide constitué d'une masse  $m_2$  relié par une tige (dont on néglige la masse) de longueur  $l$  à une masse  $m_1$  elle-même reliée par un bras horizontal (dont on néglige la masse) de longueur  $b$  à un point  $O$ . Le bras horizontal est solidaire en  $O$ , ce qui induit un couple de torsion empêchant tout mouvement d'inclinaison du bras par rapport à l'horizontal. Dans le plan horizontal, la torsion rappelle bras vers une position d'équilibre de manière équivalente à un ressort de raideur  $k$  rappelant  $m_1$  à un point d'équilibre. Ce rappel est accompagné d'un amortissement de coefficient  $\lambda_1$ . Le pendule est astreint à osciller dans le plan normal au bras horizontal. Les frottements induisent un amortissement de cette oscillation de coefficient  $\lambda_2$ . Le système bras+pendule est donc rigide mais susceptible de tourner suivant deux axes. On note  $\theta_1$  l'angle entre le bras et sa position d'équilibre et  $\theta_2$  l'angle du pendule par rapport à la verticale.



On ne considérera que les régimes d'oscillations faibles, et fera donc l'approximation des petits angles :

$$\begin{aligned}\cos \theta_i &\simeq 1 \\ \sin \theta_i &\simeq \theta_i \\ \theta_i \theta_j &\simeq 0\end{aligned}$$

1. Calculer l'expression de la matrice d'inertie du système.
2. Faire le bilan des moments agissant sur le système.
3. Écrire l'équation de la dynamique du système et la mettre sous une forme matricielle pour  $X = \begin{pmatrix} b\theta_1 \\ l\theta_2 \end{pmatrix}$ .
4. Montrer que le système ne présente pas de modes propres d'oscillation.