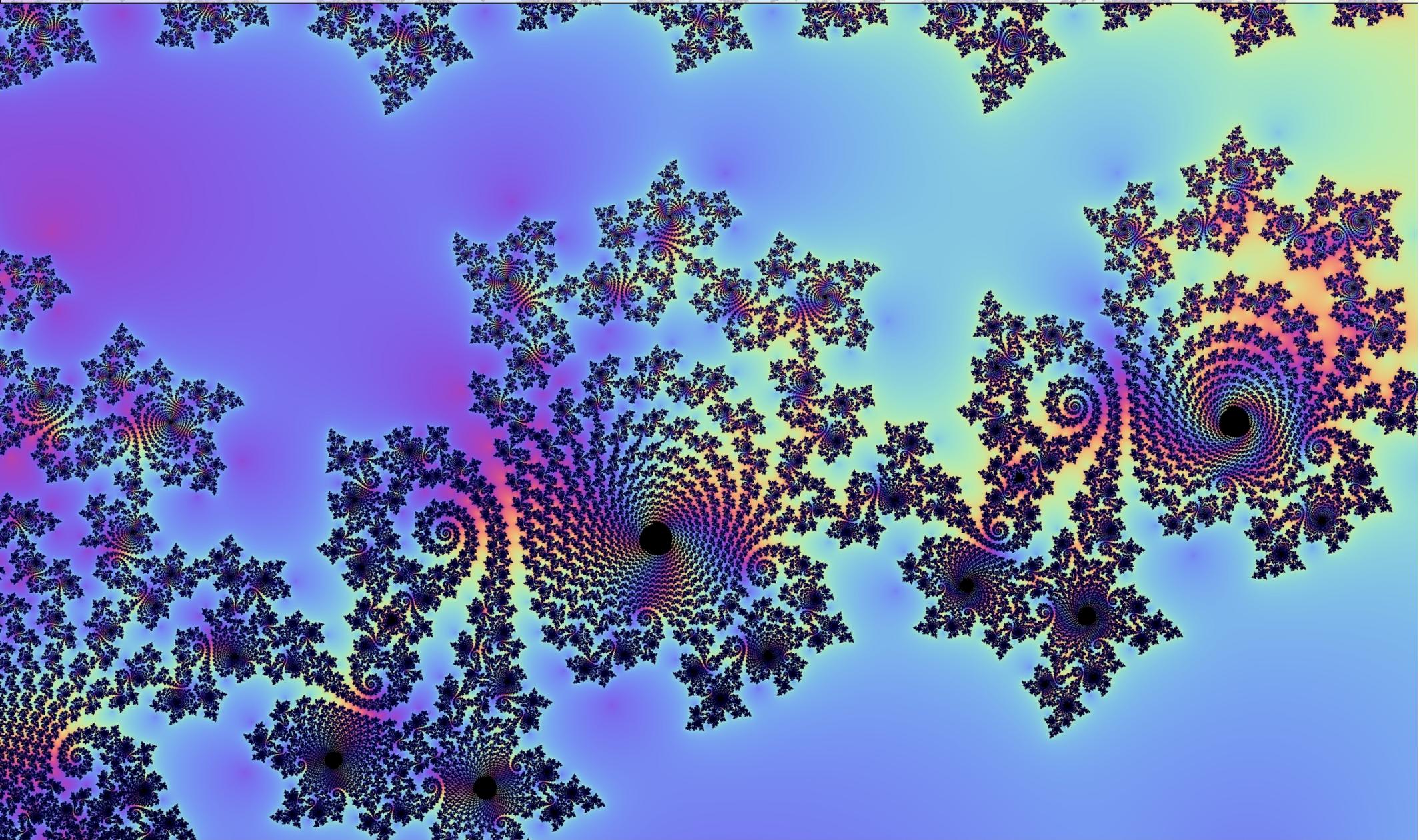


La théorie du chaos

IV- De l'ordre dans le chaos

David Viennot – Maître de Conférences en physique théorique
Observatoire de Besançon, Université Marie & Louis Pasteur





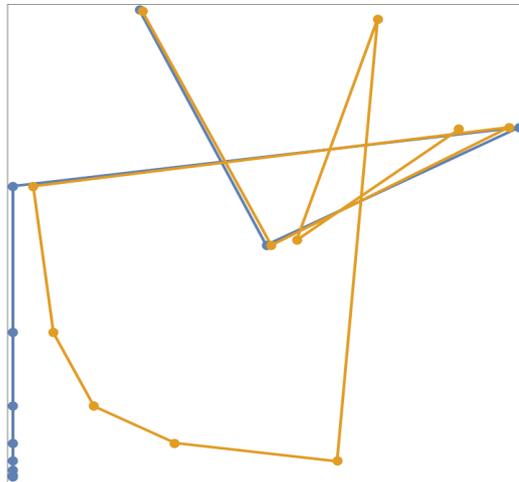
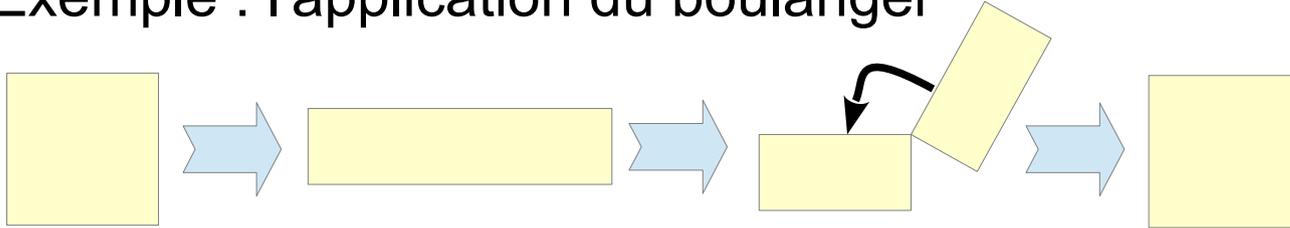
La théorie du chaos

Définition du chaos

Un système dynamique est dit chaotique si :

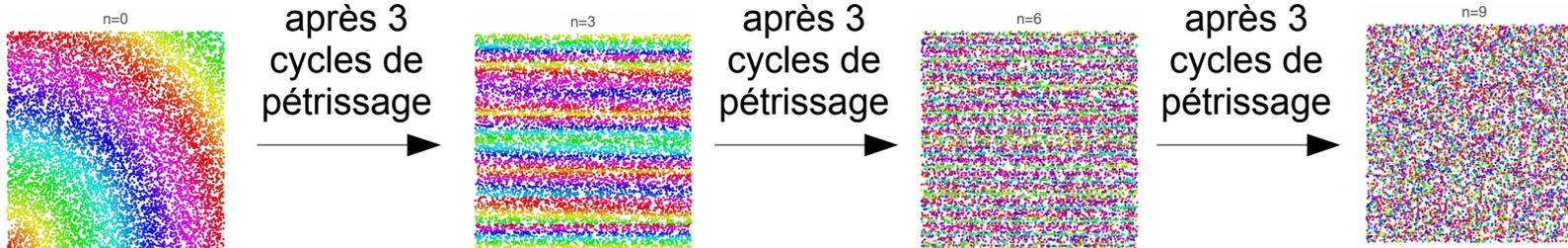
- il est sensible aux conditions initiales ;
- il est mélangeant.

Exemple : l'application du boulanger

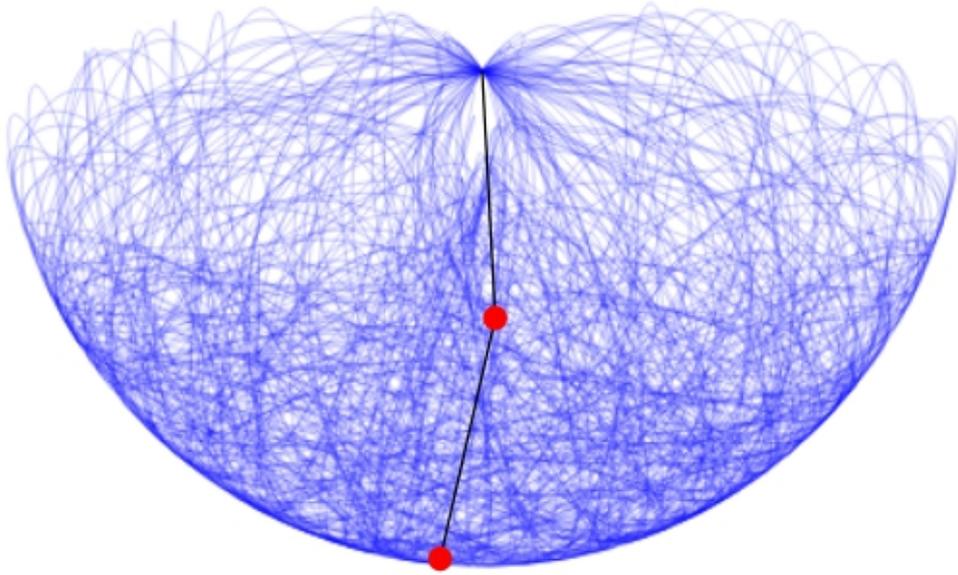


Sensibilité aux conditions initiales

mélange topologique

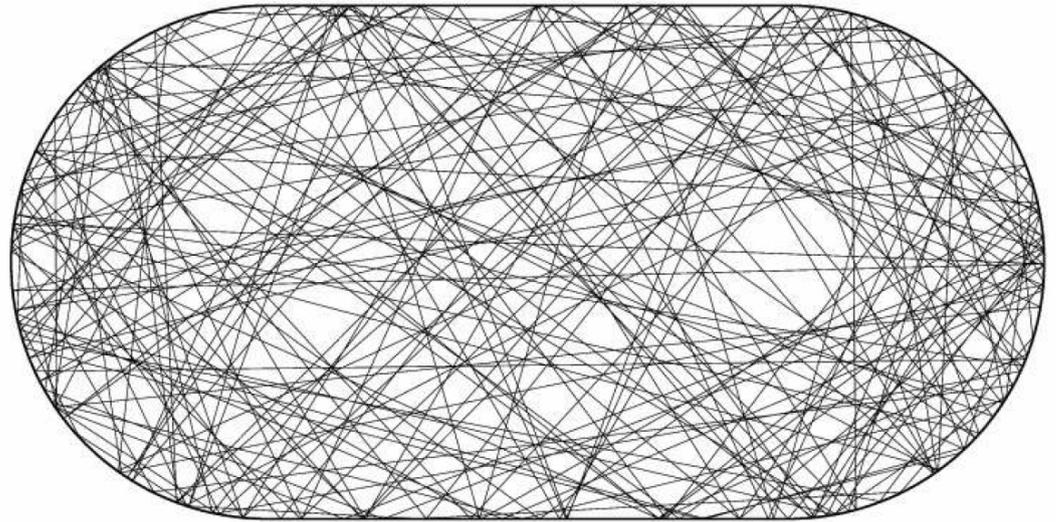


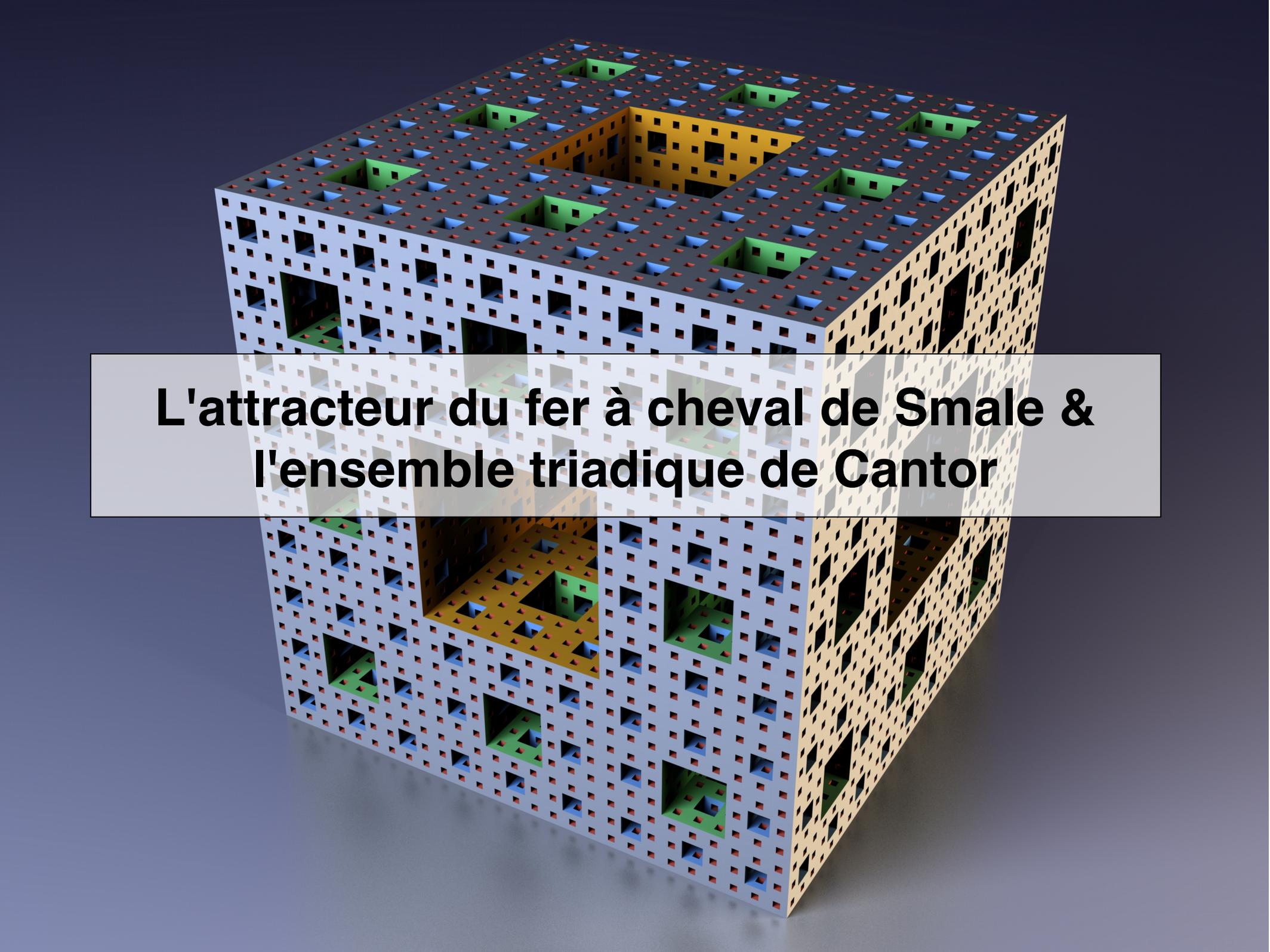
Des trajectoires erratiques



Pendule double

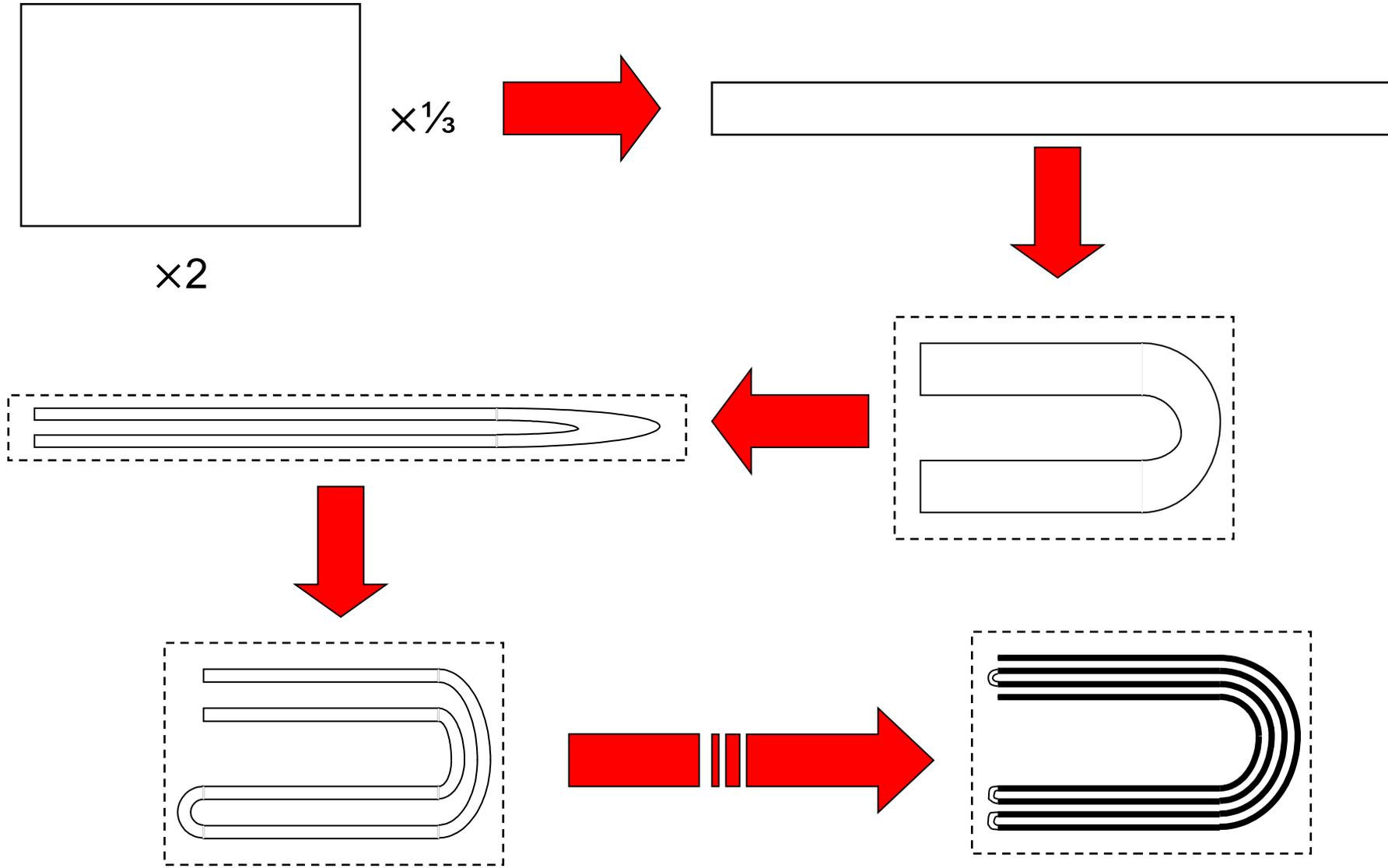
Billard du stade de Bunimovich



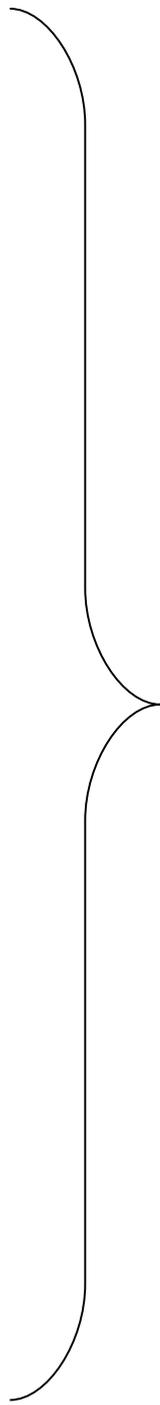
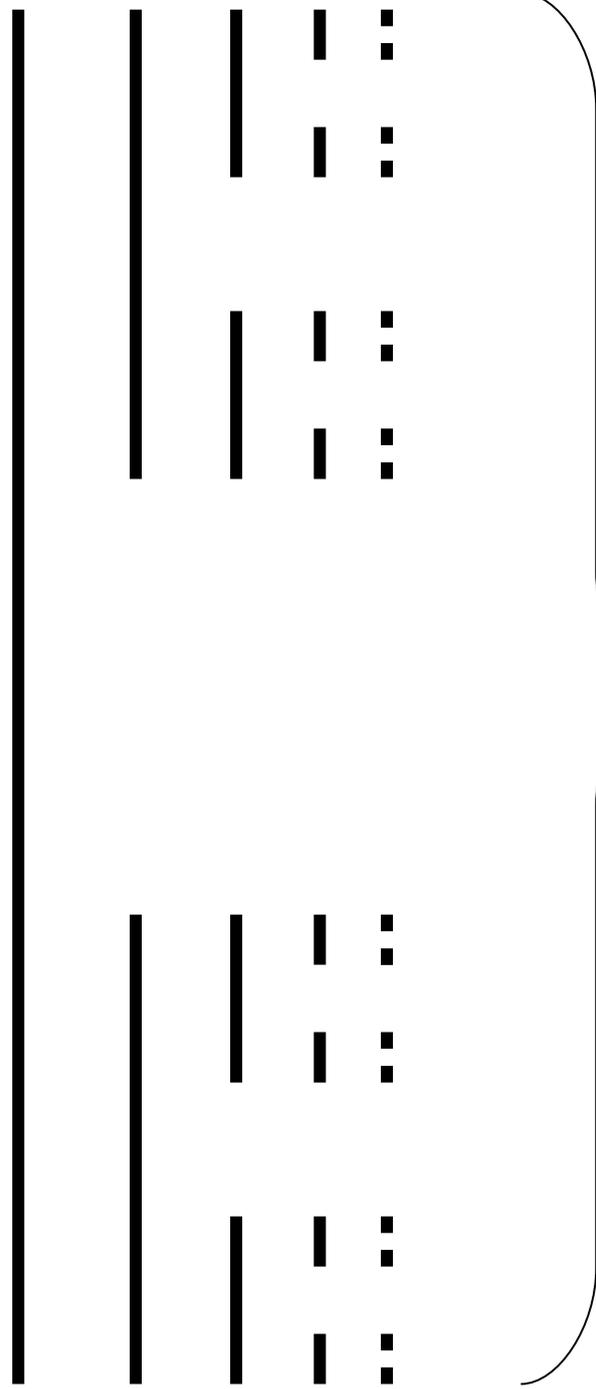
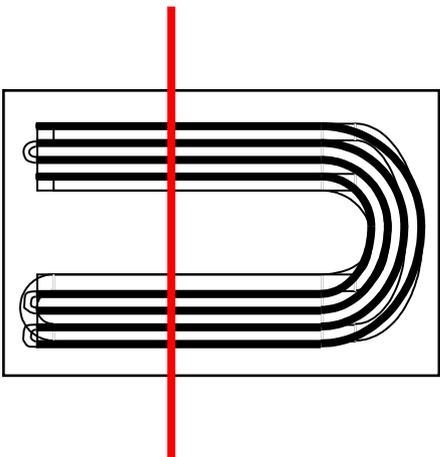


**L'attracteur du fer à cheval de Smale &
l'ensemble triadique de Cantor**

L'application du fer à cheval de Smale

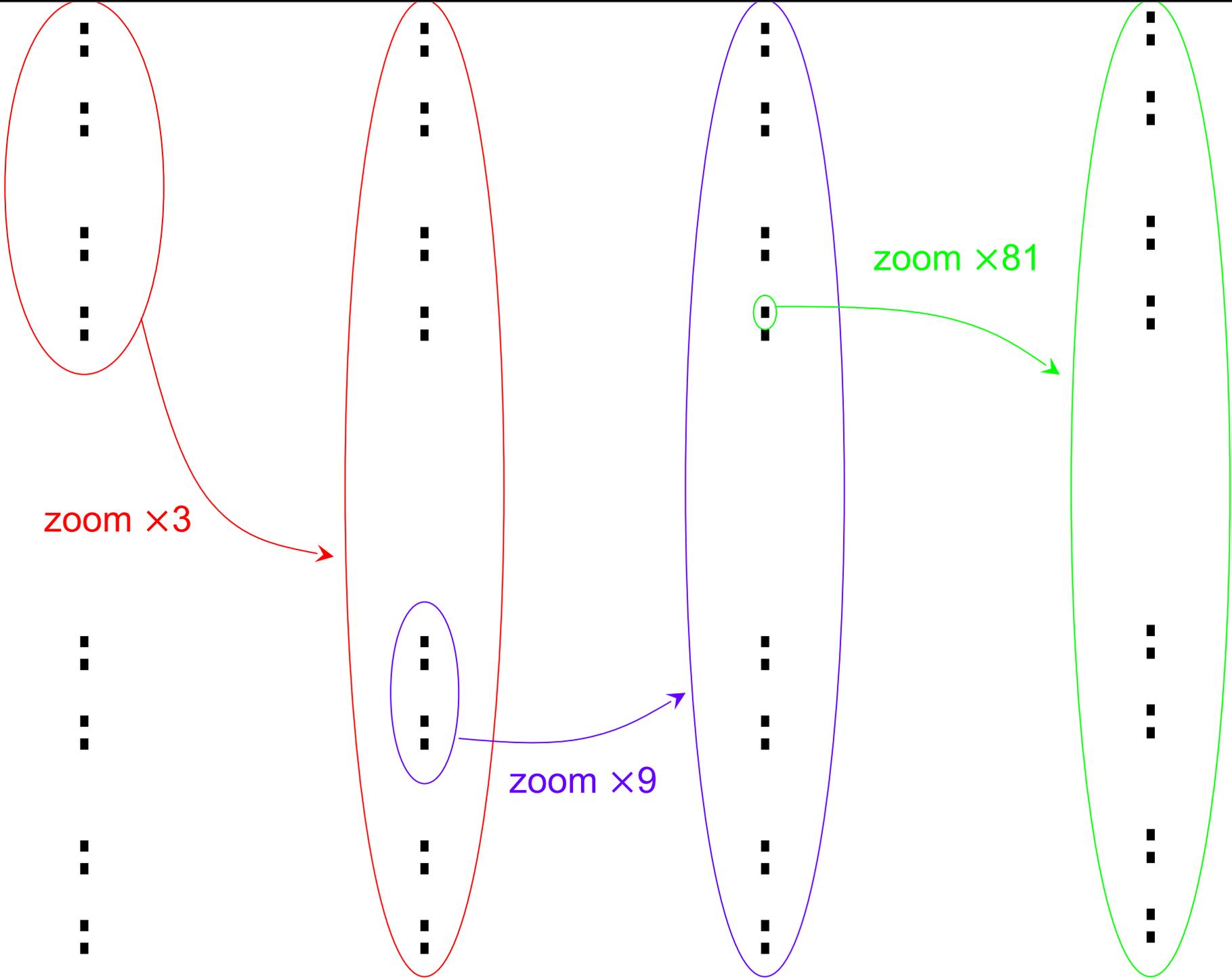


L'ensemble triadique de Cantor

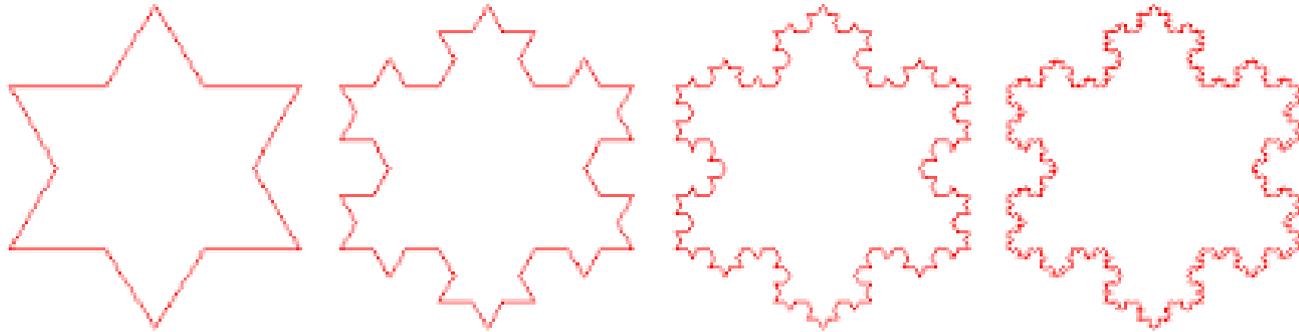


Ensemble
triadique
de Cantor

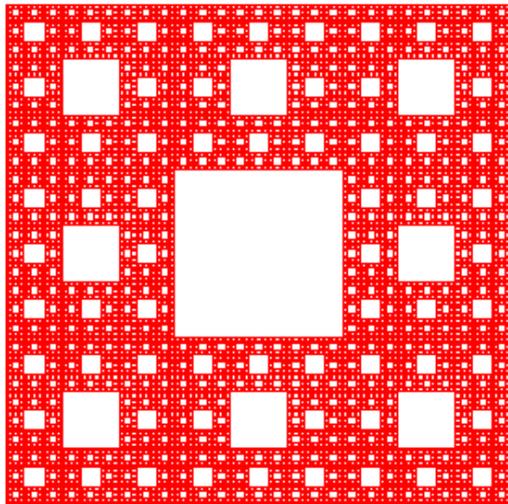
L'auto-similarité



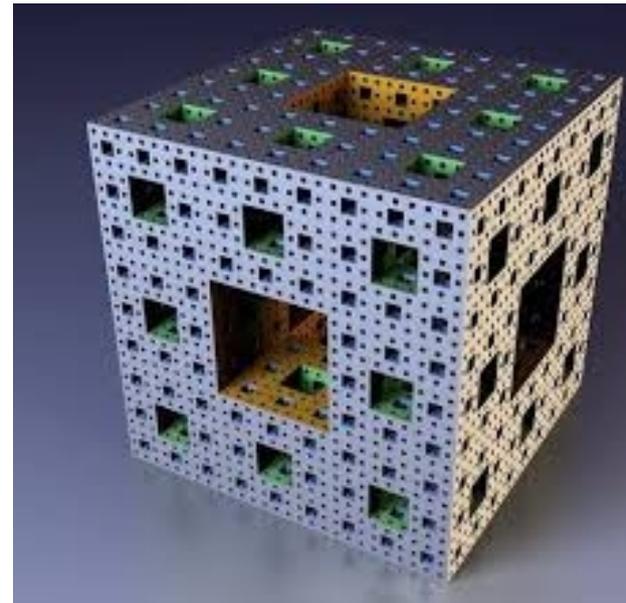
D'autres constructions triadiques



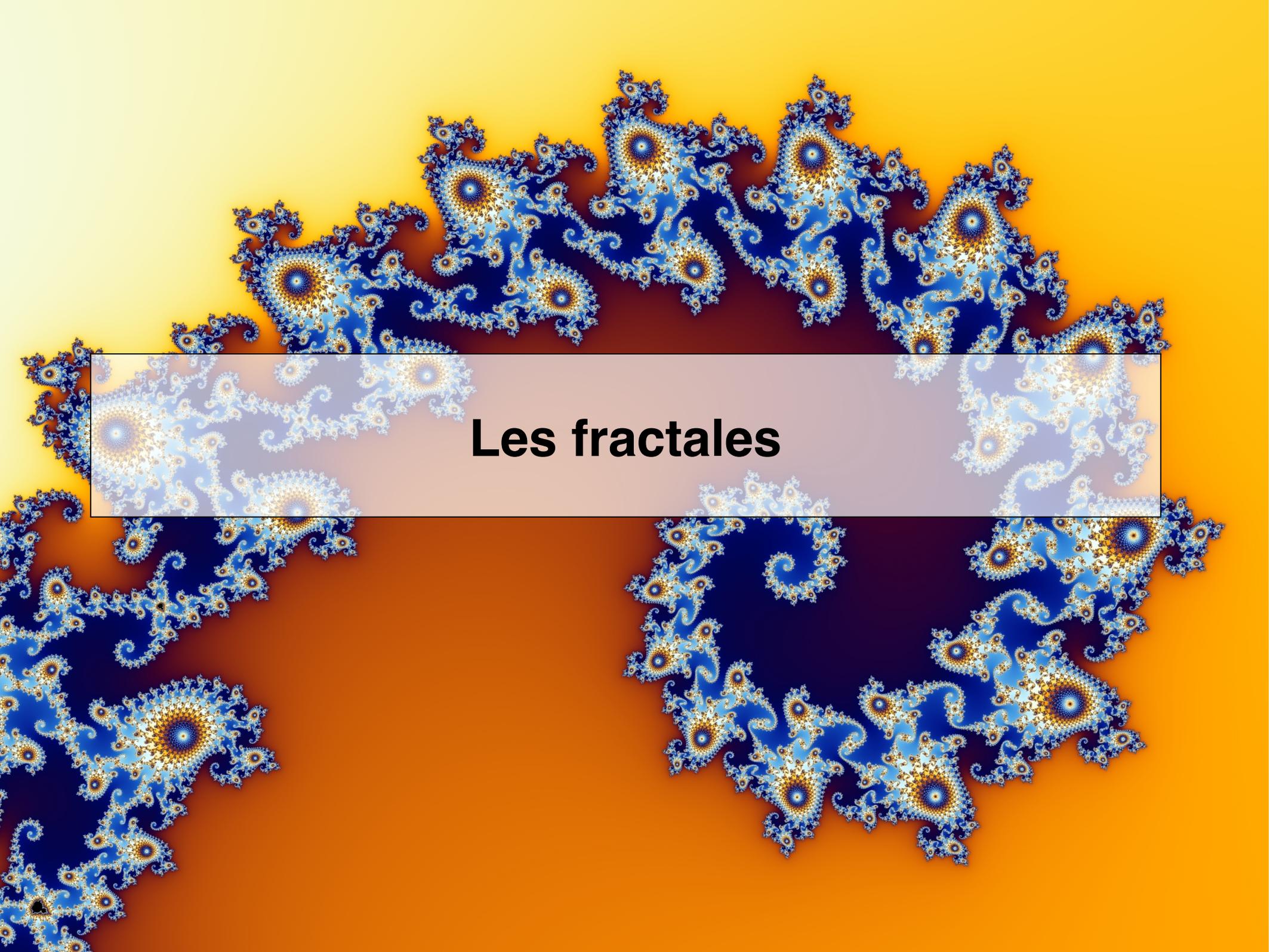
Le flocon de Koch



Le tapis de Sierpinski



L'éponge de Menger



Les fractales

Fractales (définition)

Un objet est dit fractal s'il vérifie les propriétés suivantes :

- Il présente une propriété d'auto-similarité.
- Des structures complexes apparaissent à toutes les échelles.
- Il est suffisamment irrégulier pour que les outils « usuels » de la géométrie échouent à le décrire.

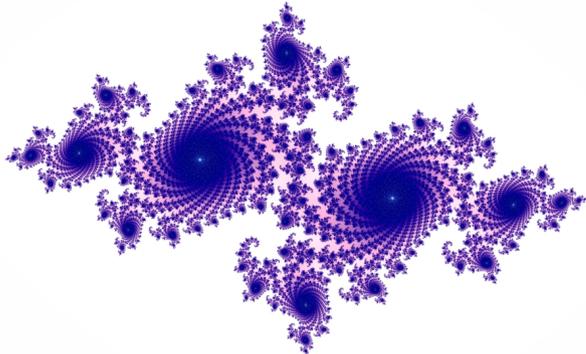
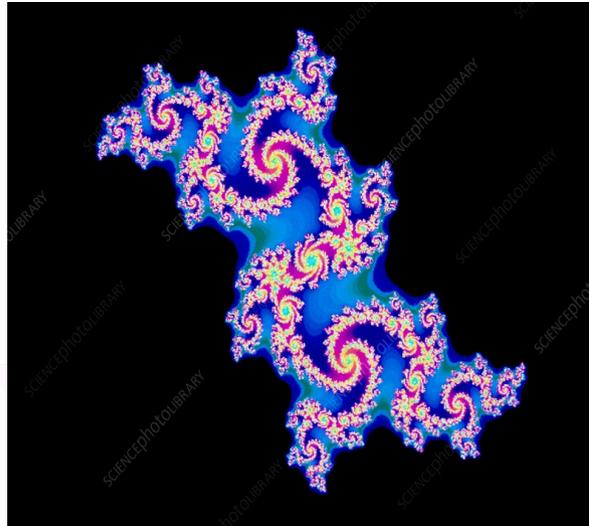
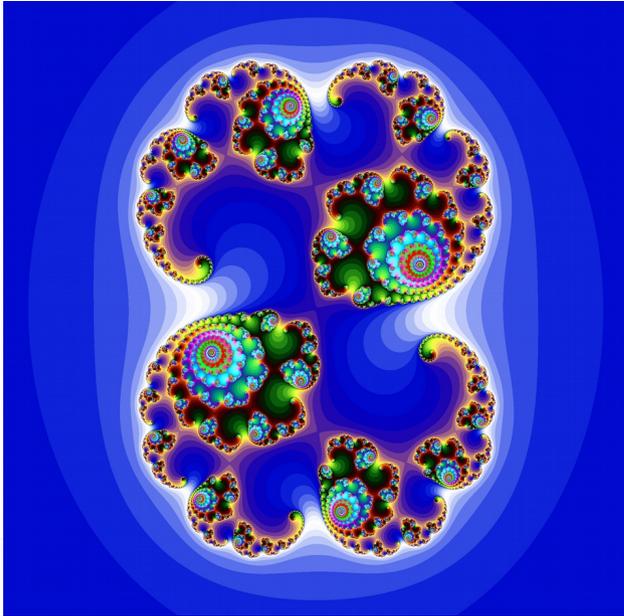
Les ensembles de Julia et de Mandelbrot

L'application de Julia

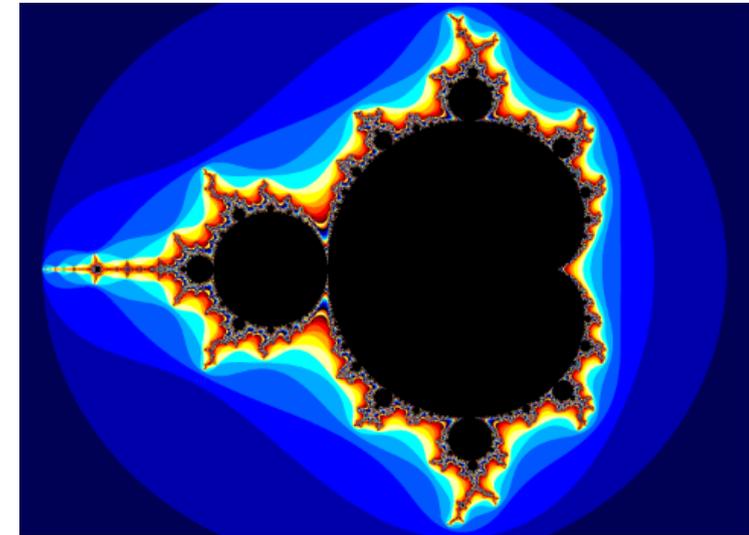
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + c_1 \\ 2xy + c_2 \end{pmatrix}$$

($z \rightarrow z^2 + c$ z, c nombres complexes)

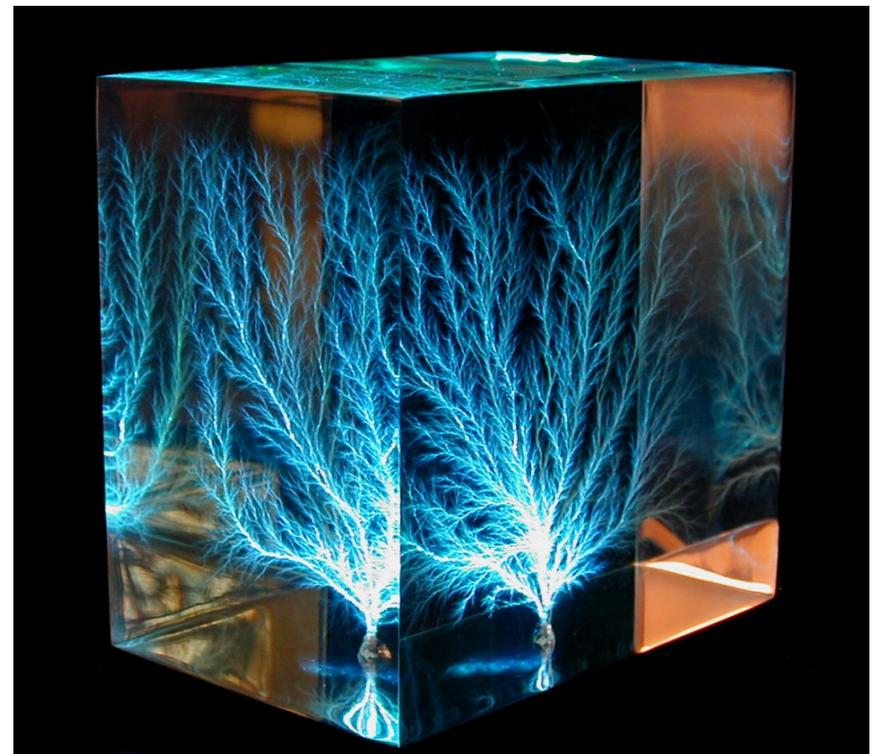
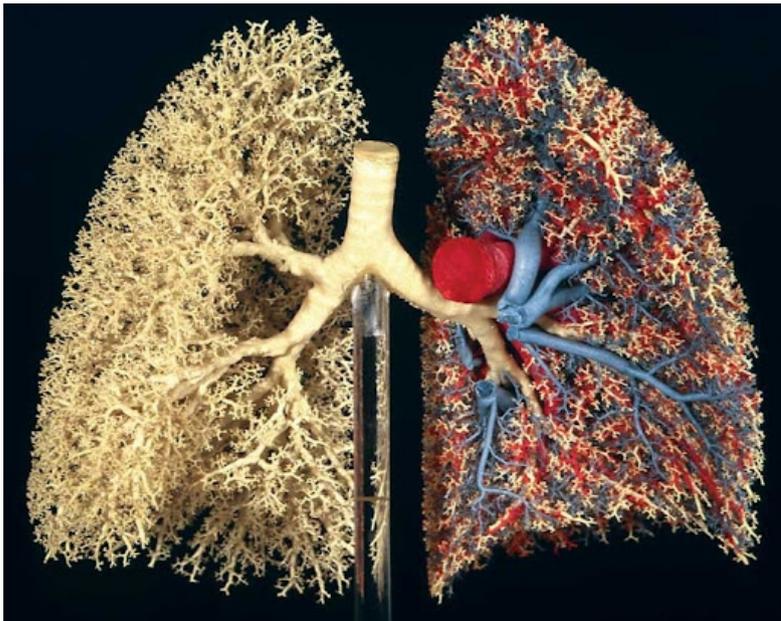
Ensemble de Julia : *ensemble des points (x, y) du plan dont la trajectoire est chaotique.*



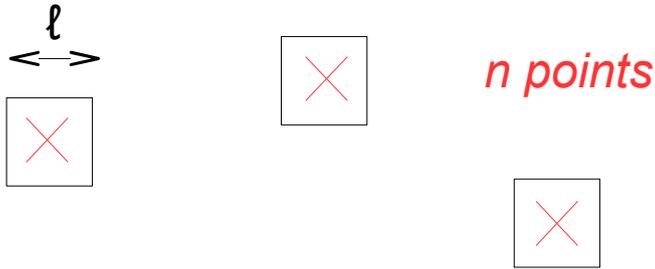
Ensemble de Mandelbrot: *ensemble des points (c_1, c_2) tels que la trajectoire de $(x=0, y=0)$ ne soit pas chaotique.*



Des fractales dans la nature



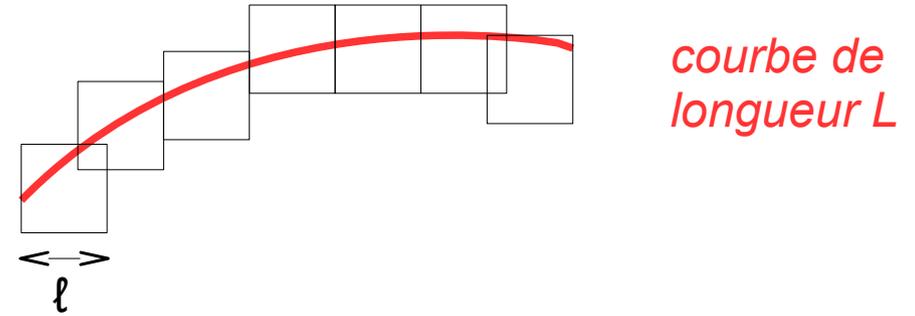
Dimension de Minkowski



nombre de boîtes $N = n$

$$-\ln(N)/\ln(\ell) = -\ln(n)/\ln(\ell) \rightarrow 0$$

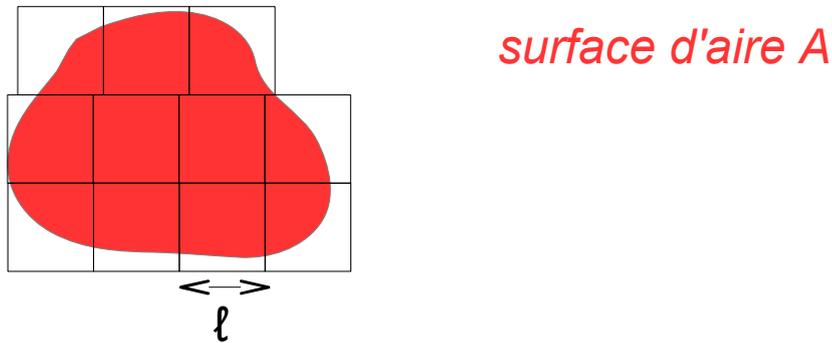
(quand $\ell \rightarrow 0$)



nombre de boîtes $N \approx L/\ell$

$$-\ln(N)/\ln(\ell) = -\ln(L)/\ln(\ell) + 1 \rightarrow 1$$

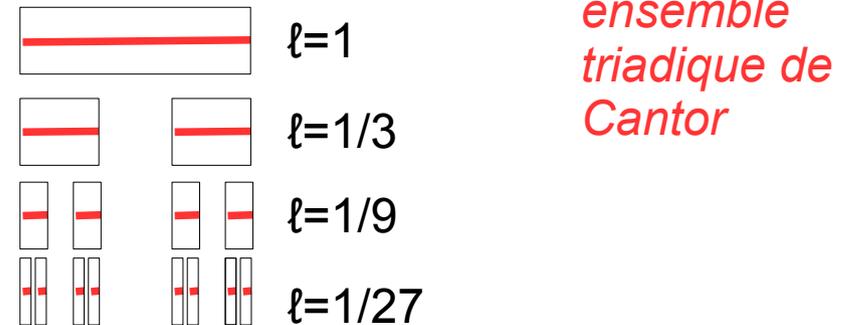
(quand $\ell \rightarrow 0$)



nombre de boîtes $N \approx A/\ell^2$

$$-\ln(N)/\ln(\ell) = -\ln(A)/\ln(\ell) + 2 \rightarrow 2$$

(quand $\ell \rightarrow 0$)



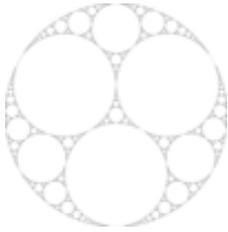
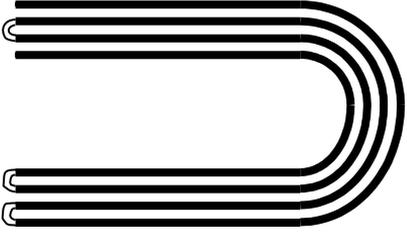
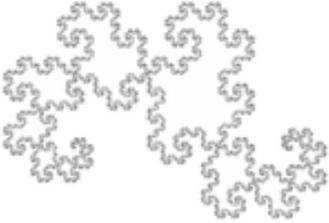
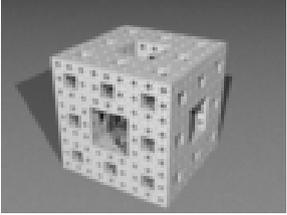
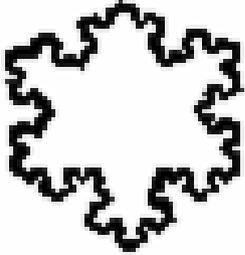
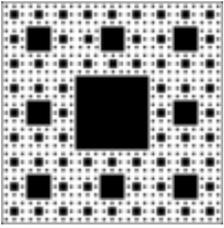
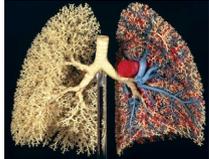
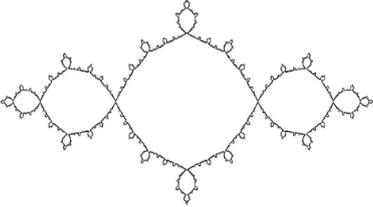
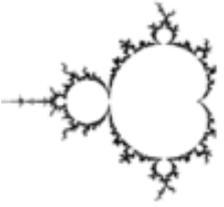
ensemble triadique de Cantor

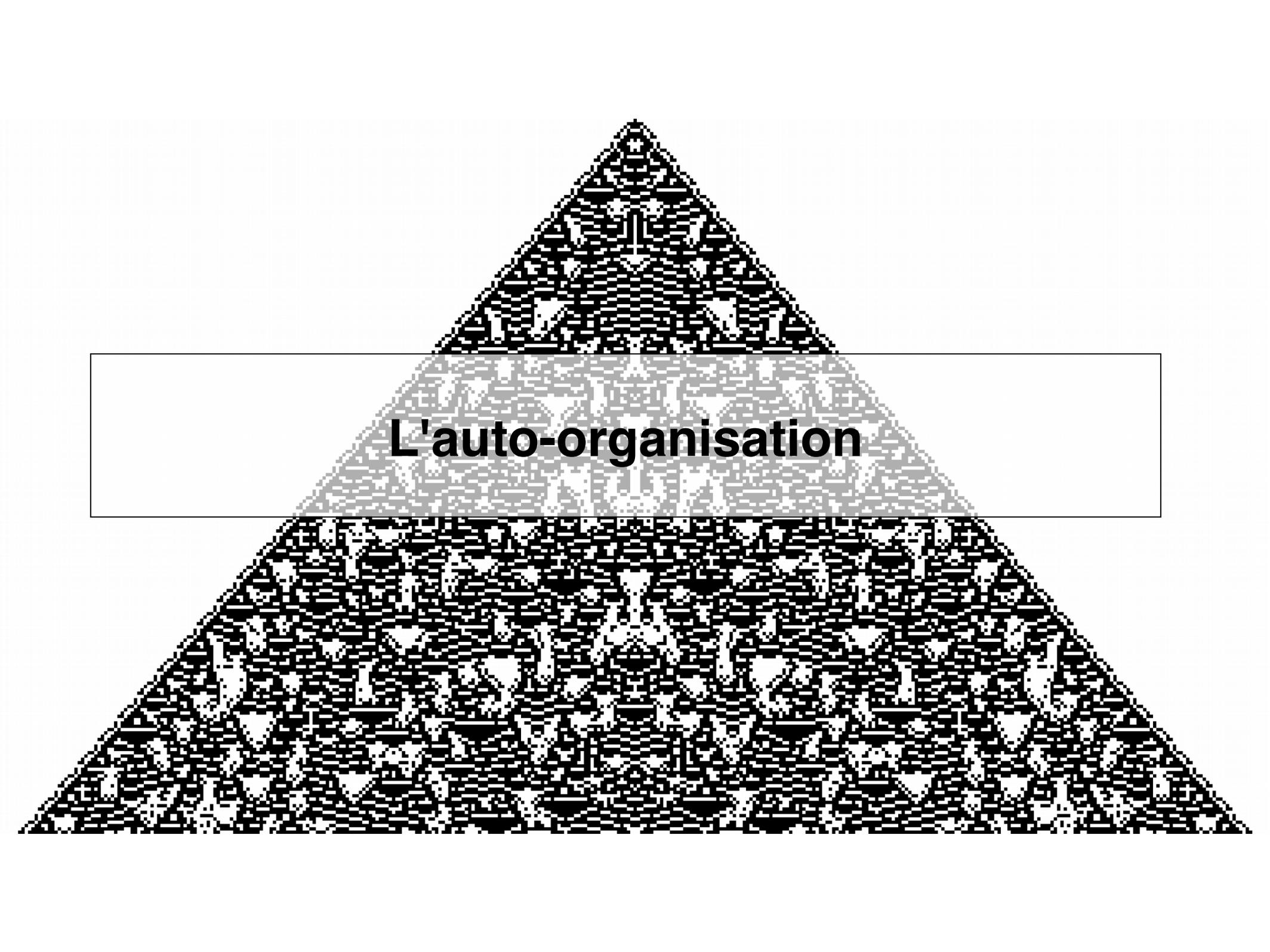
nombre de boîtes à l'itération n : $N=2^n$
 longueur des boîtes à l'itération n : $\ell=1/3^n$

$$-\ln(N)/\ln(\ell) = \ln(2)/\ln(3) \approx 0,63$$

(quand $n \rightarrow \infty$)

Dimension de Minkowski

triadique de Cantor " " " " " " " " 0,63	Baderne d'Apollonius  1,31	attracteur de Lorentz  2,06	
attracteur fer à cheval  1,63	courbe du dragon  1,52	éponge de Menger  2,73	
flocon de Koch  1,26	tapis de Sierpinski  1,89	figure de Lichtenberg  2,5	surface pulmonaire  2,88 – 2,97
ensemble de Julia pour $c_1 = -1$ et $c_2 = 0$  1,27	ens. de Mandelbrot  2	chou-fleur  2,33	

A black and white, pixelated pyramid is centered on the page. A horizontal white bar with a thin black border cuts across the middle of the pyramid. The text "L'auto-organisation" is written in a bold, black, sans-serif font within this bar. The pyramid's surface is composed of a dense grid of black and white pixels, creating a textured, mosaic-like appearance.

L'auto-organisation

La fourmi de Langton

Grille composée initialement que de cases blanches.

La fourmi se déplace sur la grille suivant les règles suivantes :

- Si la fourmi arrive sur une case noir, elle tourne de 90° sur la gauche, change la couleur en blanc et avance d'une case.
- Si la fourmi arrive sur une case blanche, elle tourne de 90° sur la droite, change la couleur en noir et avance d'une case.

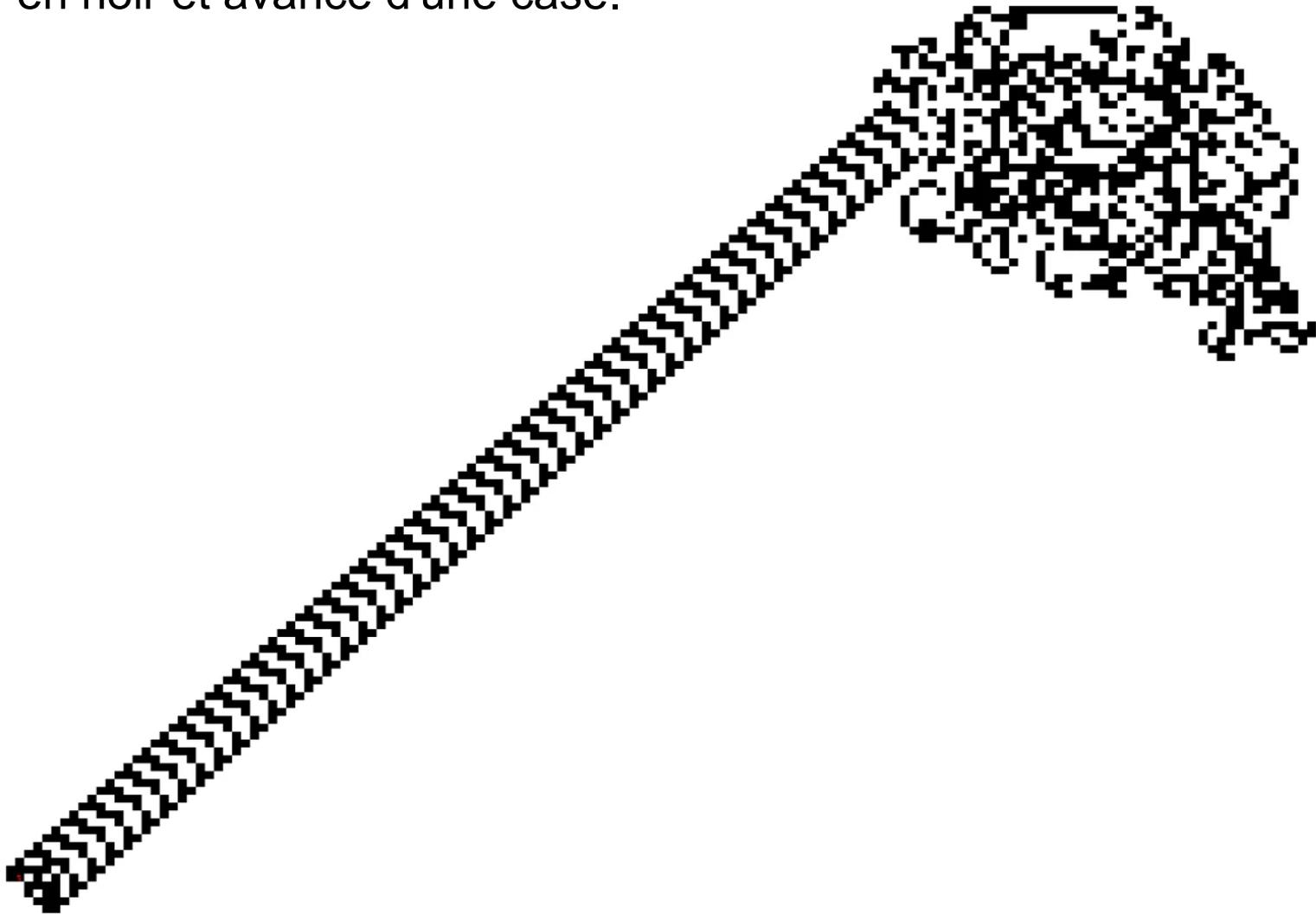
<https://www.youtube.com/watch?v=TIEzOXviT9s>

La fourmi de Langton

Grille composée initialement que de cases blanches.

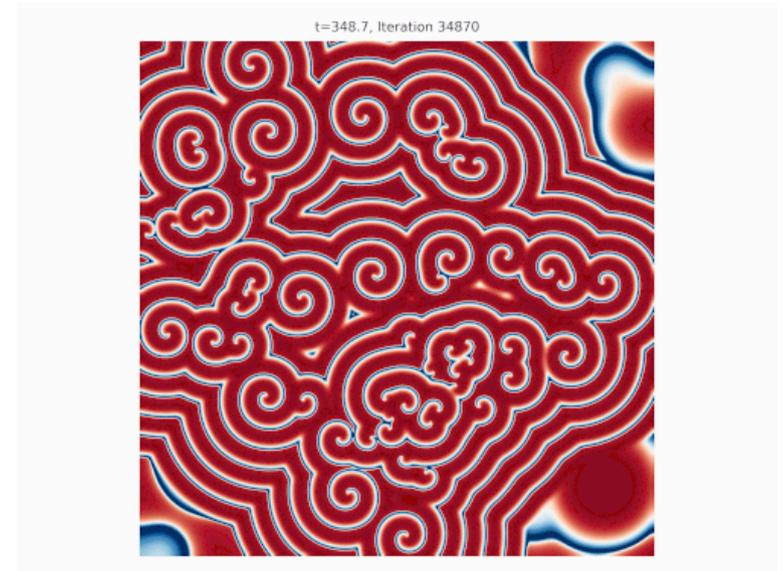
La fourmi se déplace sur la grille suivant les règles suivantes :

- Si la fourmi arrive sur une case noir, elle tourne de 90° sur la gauche, change la couleur en blanc et avance d'une case.
- Si la fourmi arrive sur une case blanche, elle tourne de 90° sur la droite, change la couleur en noir et avance d'une case.

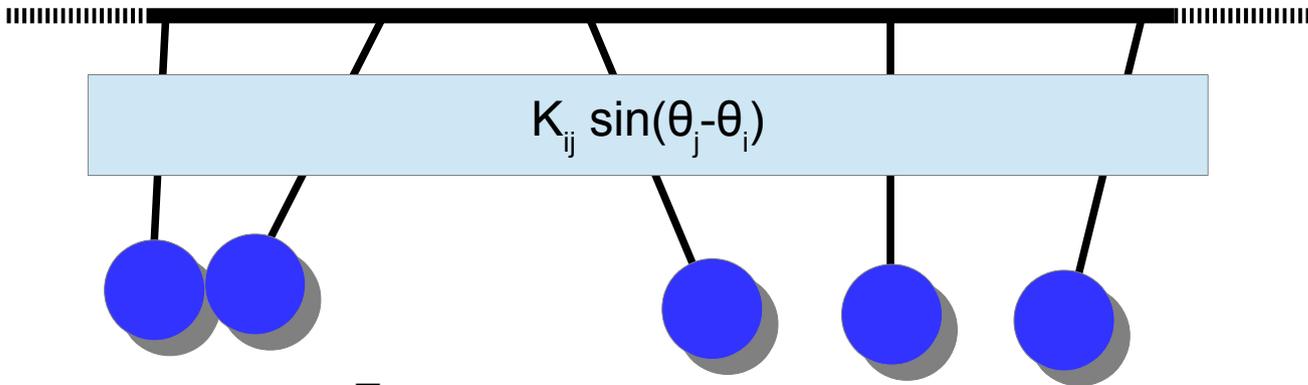


La réaction de Belousov-Zhabotinsky (Brusselator)

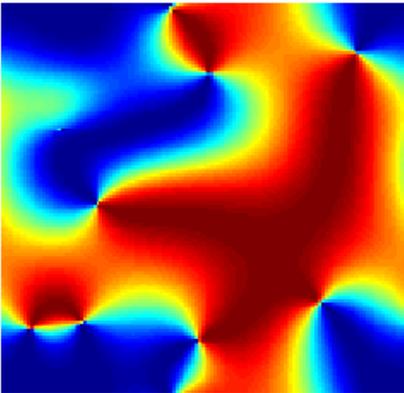
Bromate de potassium $[\text{KBrO}_3]$ + acide malonique $[\text{CH}_2(\text{COOH})_2]$ + sulfate de manganèse $[\text{MnSO}_4]$ dans une solution chauffée d'acide sulfurique $[\text{H}_2\text{SO}_4]$.



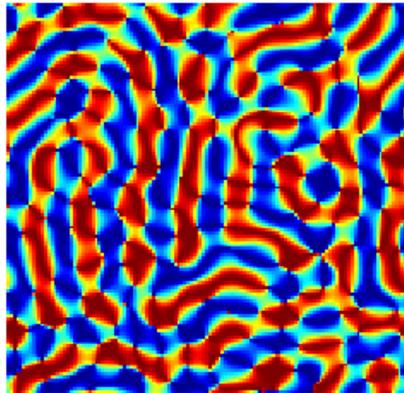
Le modèle de Kuramoto



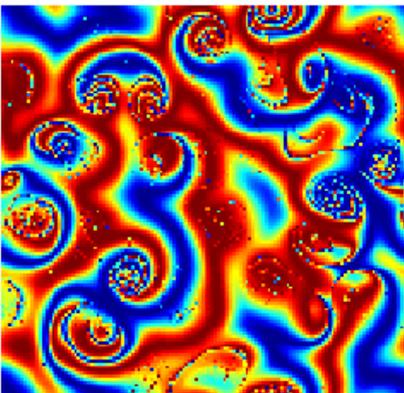
A



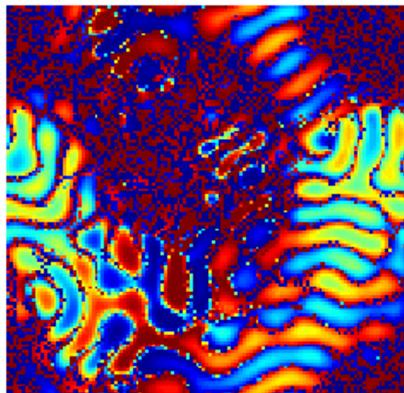
B



C



D



Réseau 2D d'oscillateurs dans le modèle de Kuramoto. Les couleurs correspondent à la valeur de la phase θ de l'oscillateur associé au pixel à un instant donné.

A,B,C et D correspondent à différents modèles (K_{ij}).