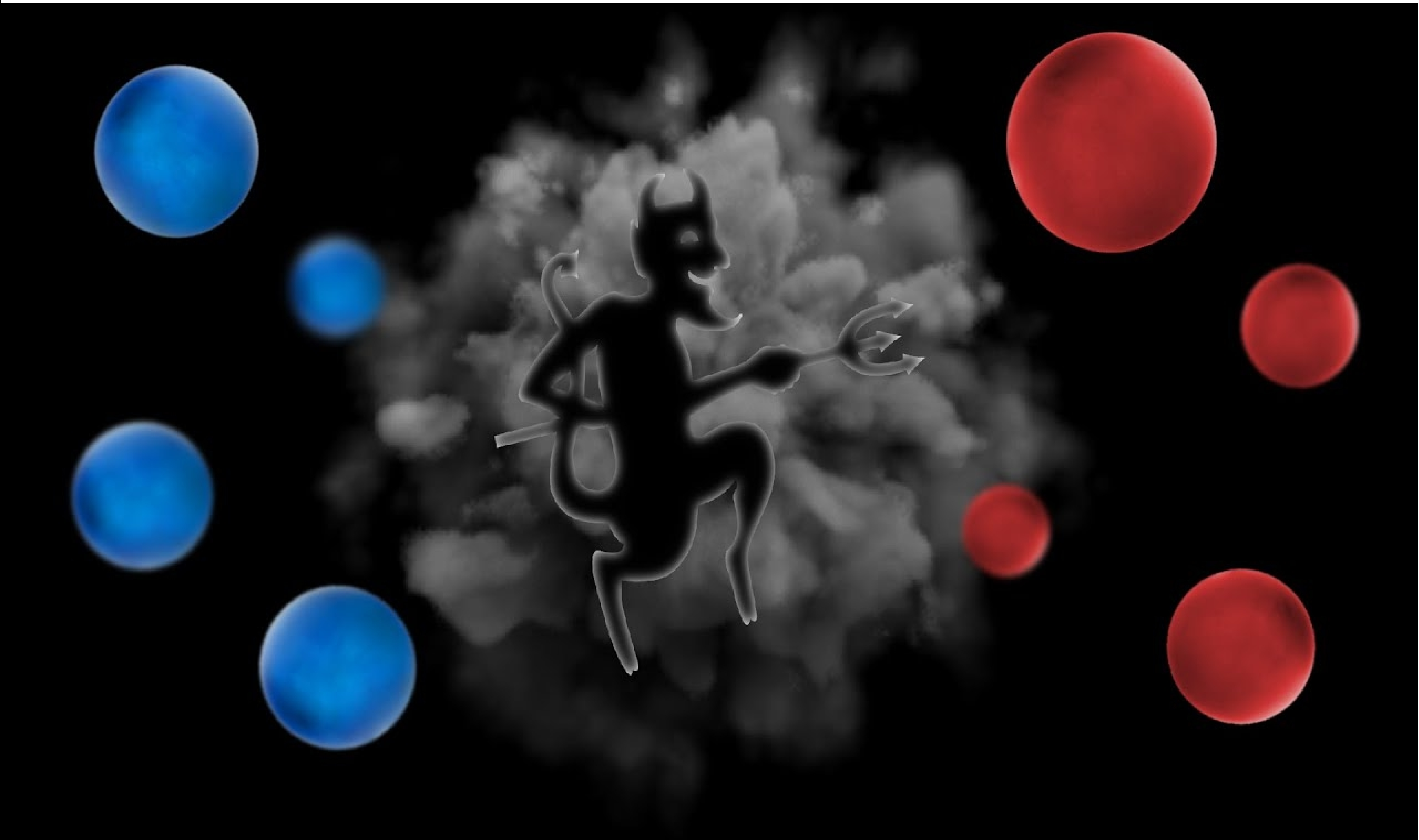
La théorie du chaos
III- Le démon de Maxwell

David Viennot – Maître de Conférences en physique théorique
Observatoire de Besançon, Université Marie & Louis Pasteur

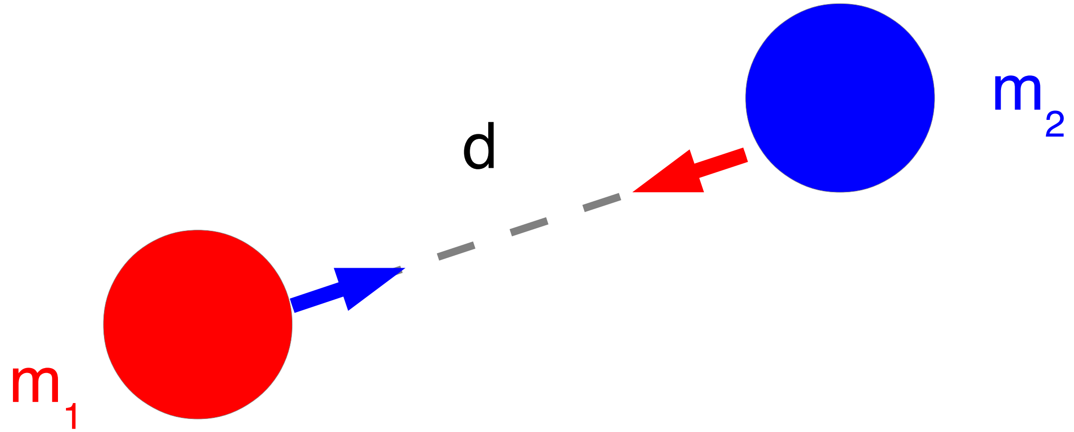


Le démon de Maxwell

La mécanique newtonienne

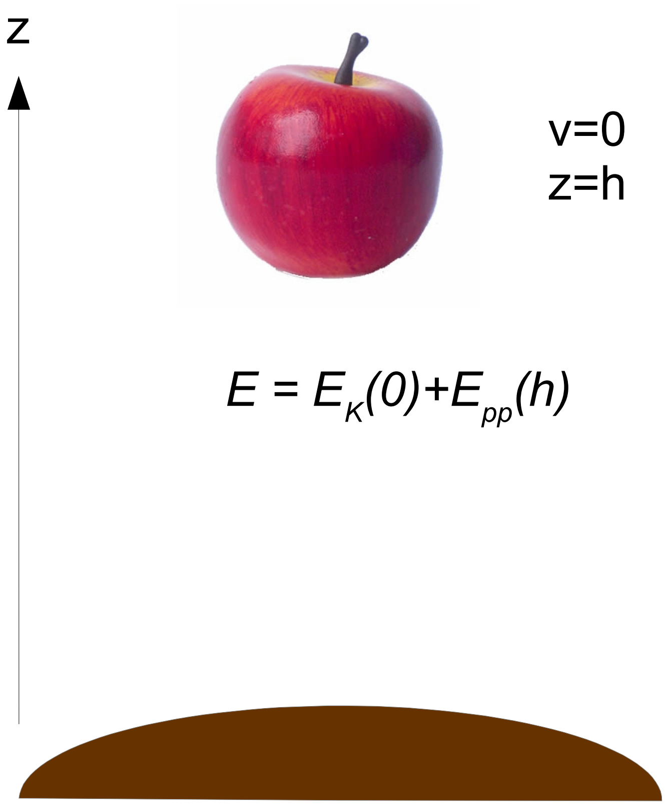
Le Principe Fondamental de la Dynamique : $F = ma$

Loi de l'attraction universelle

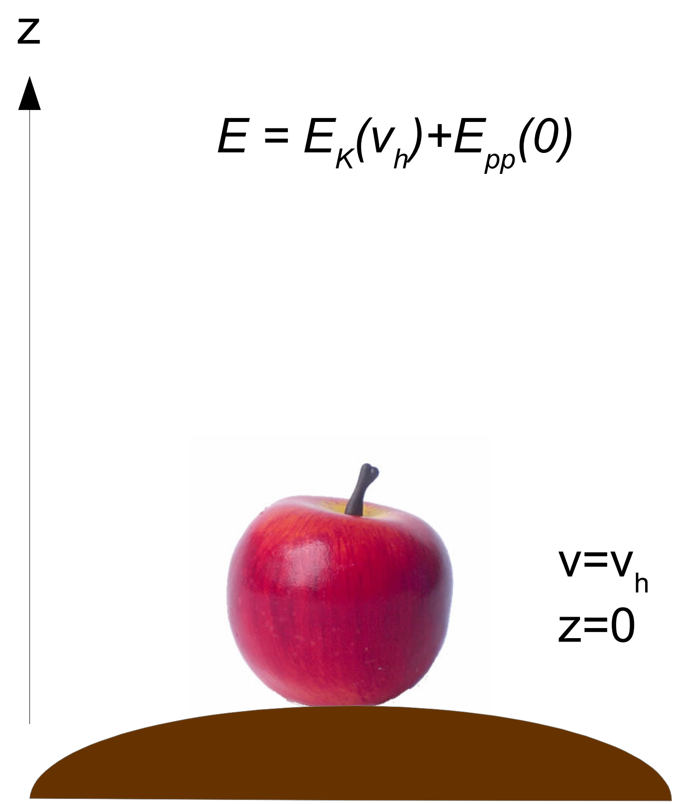


$F = Gm_1m_2/d^2$

La conservation de l'énergie



$E = E_K(0)+E_{pp}(h)$



$E = E_K(v_h)+E_{pp}(0)$

$E_K(v)=½mv^2$
$E_{pp}(z)=mgz$

$v_h = \sqrt{(2gh)}$

Principe fondamental de la dynamique <=> Première loi de la thermodynamique

L'énergie d'un système fermé se conserve au cours du temps.

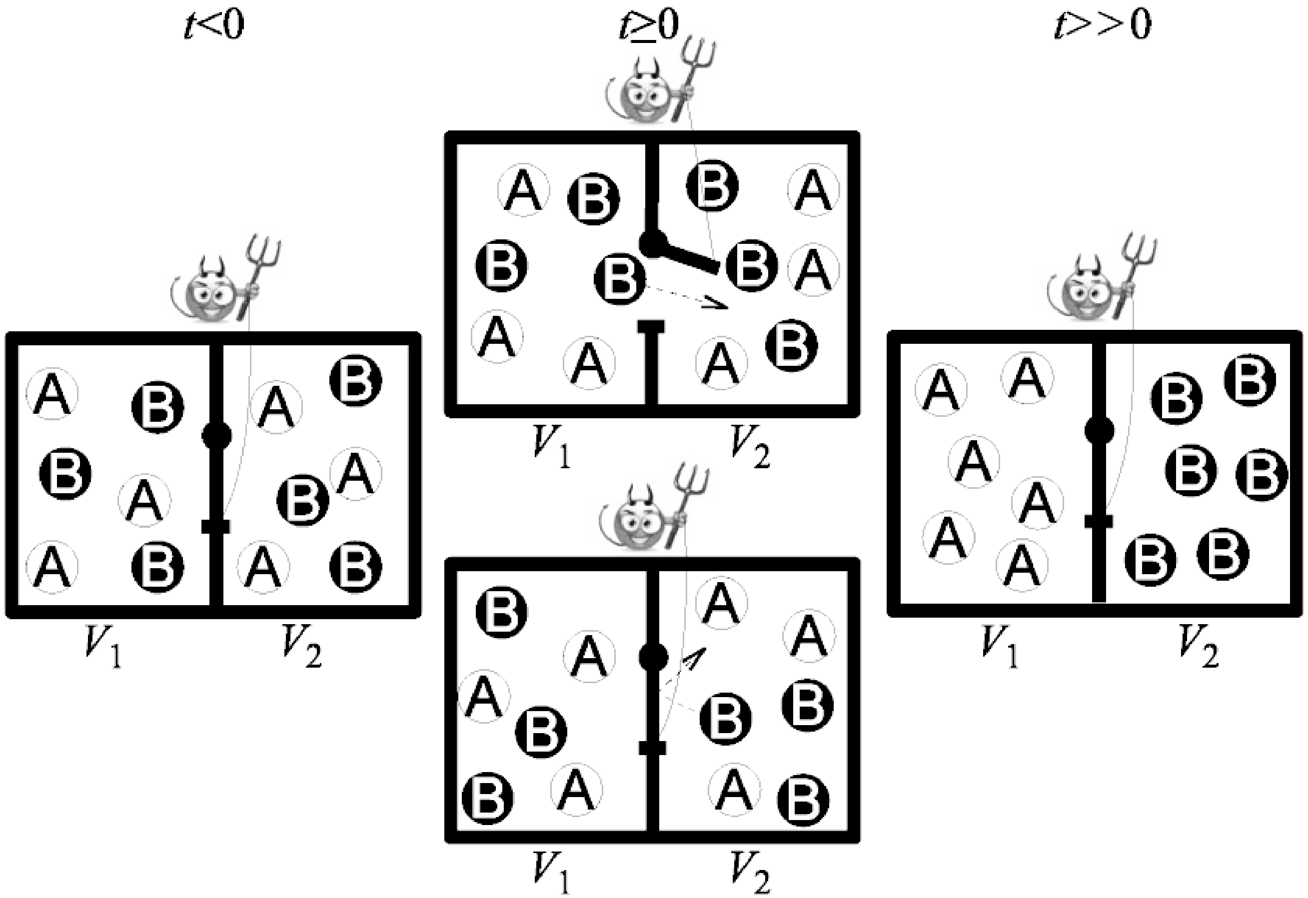
La question épistémologique

- On mesure les conditions initiales à t=0 d'un système (position et vitesse).
- On connaît les forces qui s'exercent sur le système.
- On applique le Principe Fondamental de la Dynamique de Newton.

→ On peut prédire l'évolution du système aussi loin que l'on veut dans le futur.

La Monde semble totalement prédictible et **contrôlable**.

Le démon de Maxwell



La réversibilité temporelle

La possibilité du démon de Maxwell est une conséquence de l'invariance des équations de Newton sous renversement du temps $t \rightarrow -t$.
(Rien ne distingue le passé du futur).

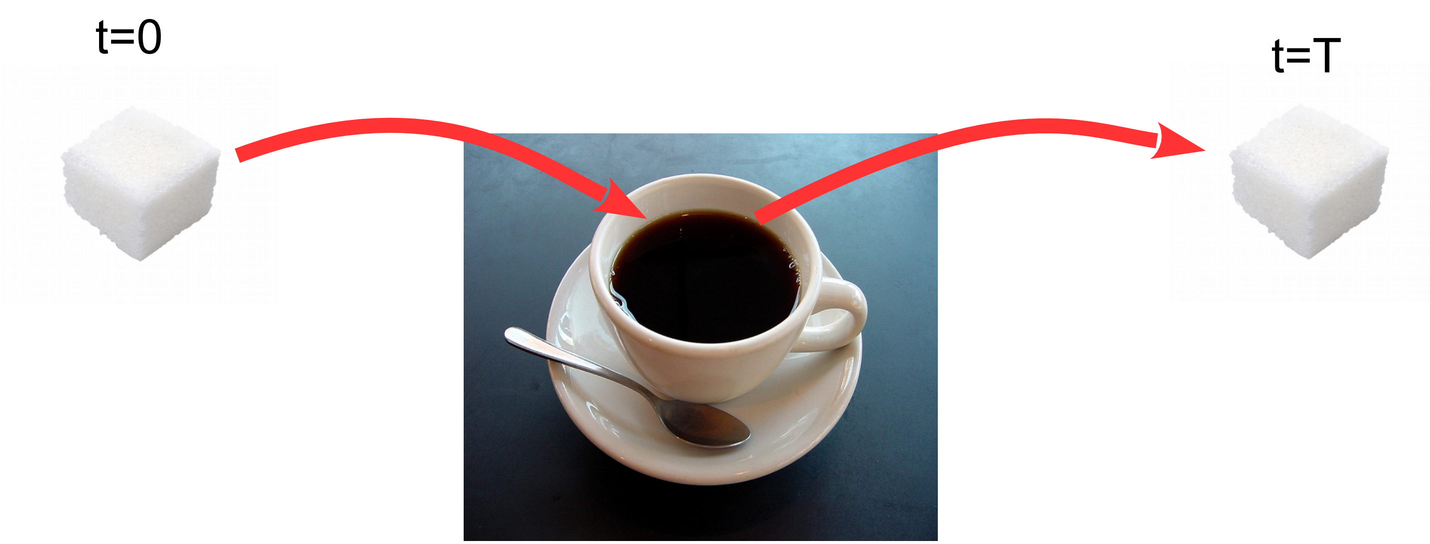
Autre conséquence, le théorème de récurrence de Poincaré :

Soient les conditions initiales d'un systèmes : $\{x_1(0),x_2(0),\ldots,x_n(0),v_1(0),v_2(0),\ldots,v_n(0)\}$

Si le système est « borné » (rien ne peut s'échapper en l'infini, l'énergie totale disponible n'est pas infinie), alors il existe un temps T au bout duquel le système revient dans le voisinage de ses conditions initiales :

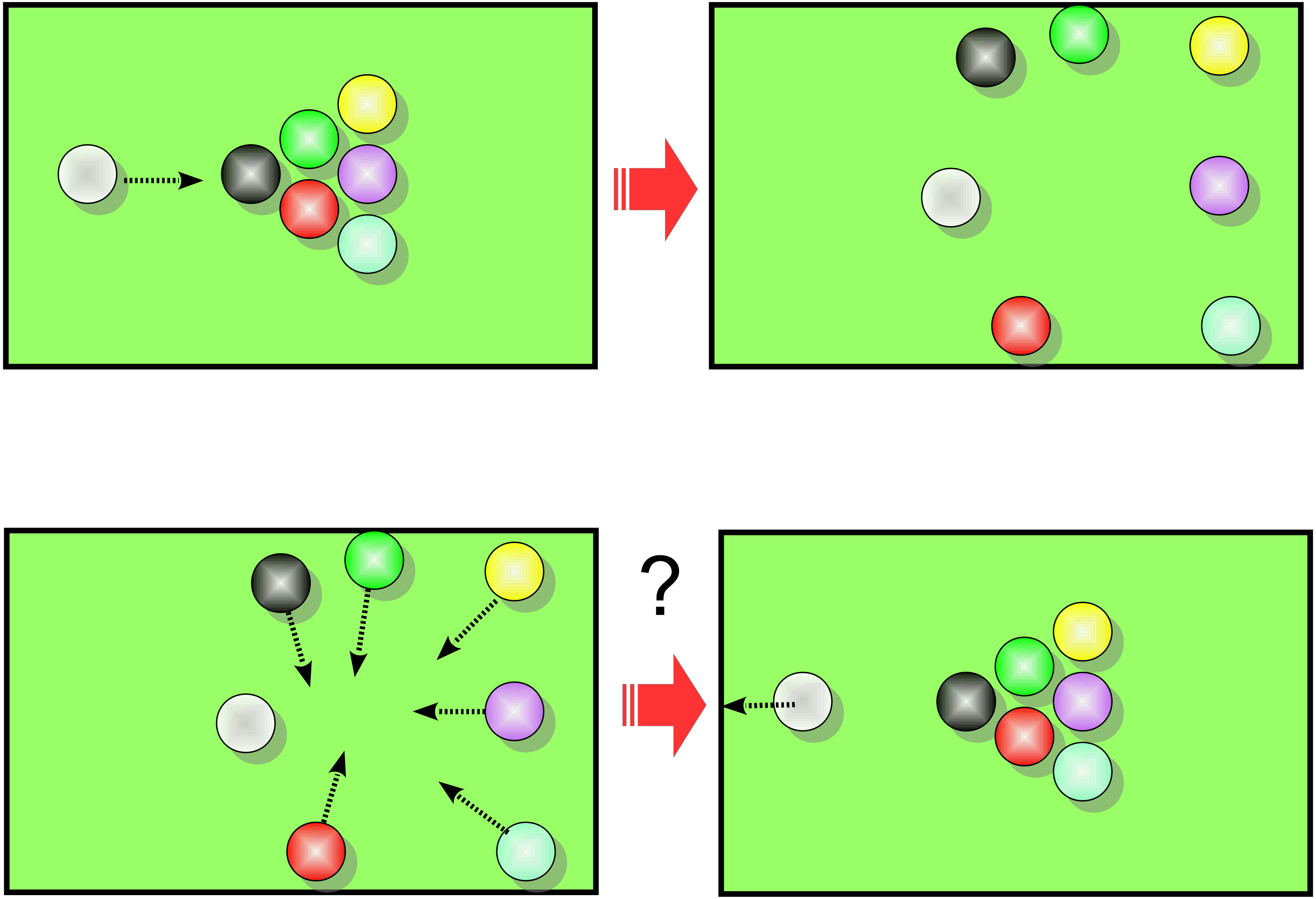
$$\{x_1(T),x_2(T),\ldots,x_n(T),v_1(T),v_2(T),\ldots,v_n(T)\} \approx \{x_1(0),x_2(0),\ldots,x_n(0),v_1(0),v_2(0),\ldots,v_n(0)\}$$

Autrement dit : le démon de Maxwell <=> attendre la durée T !!!

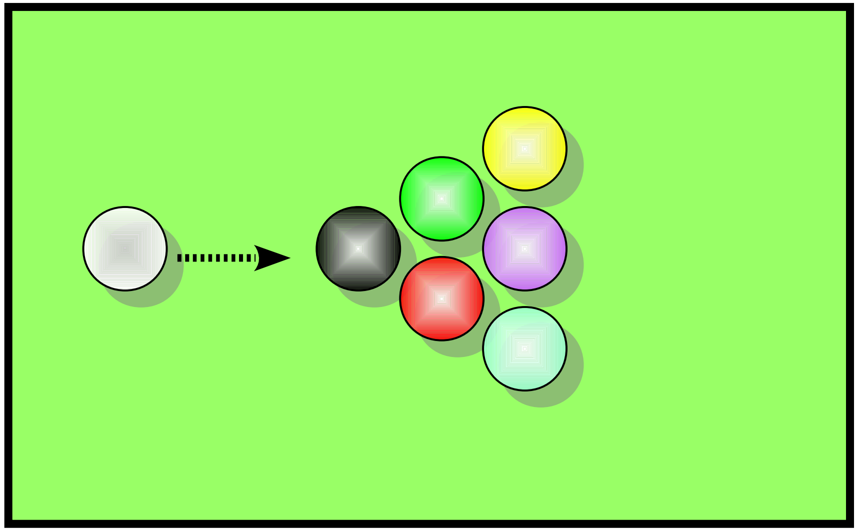


La seconde loi de la thermodynamique

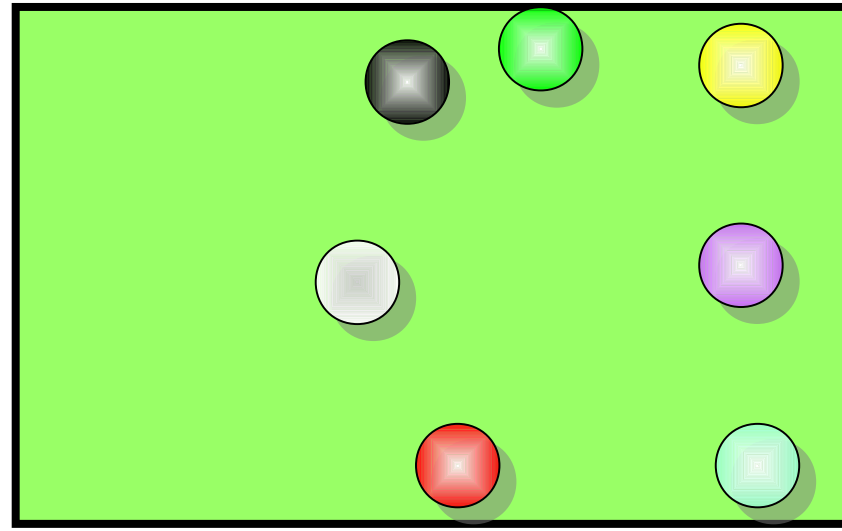
Passé et futur sont-ils vraiment indistinguables ?



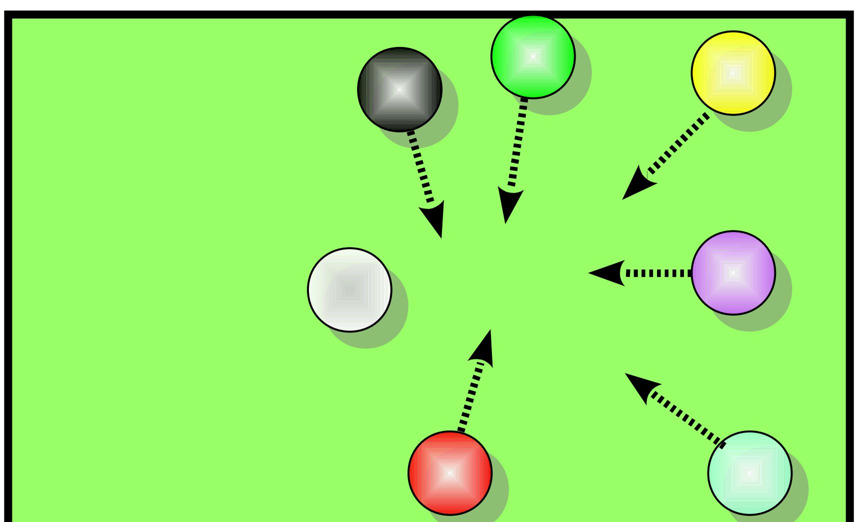
Le désordre



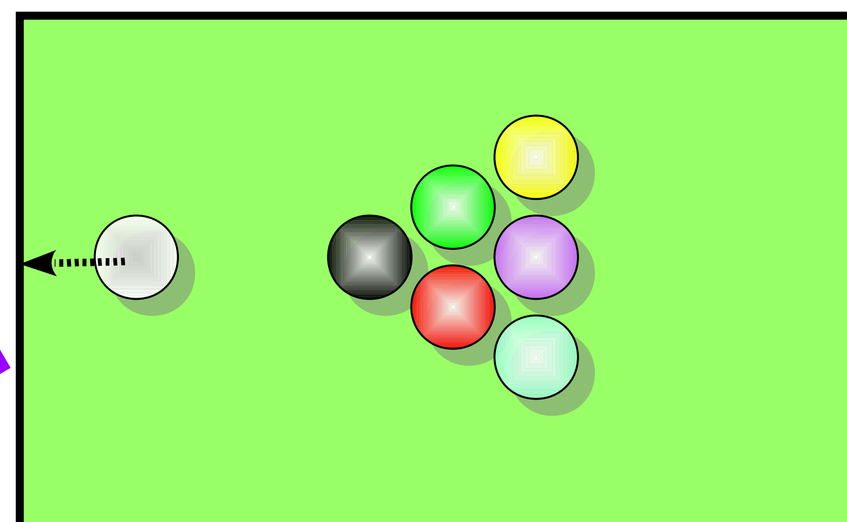
Désordre = S_0 (petit)



Désordre = $S_1 > S_0$



Désordre = S_0 (grand)



Désordre = $S_1 < S_0$

La seconde loi de la thermodynamique

Déf. : La mesure du désordre dans un système physique est appelée **entropie** du système.

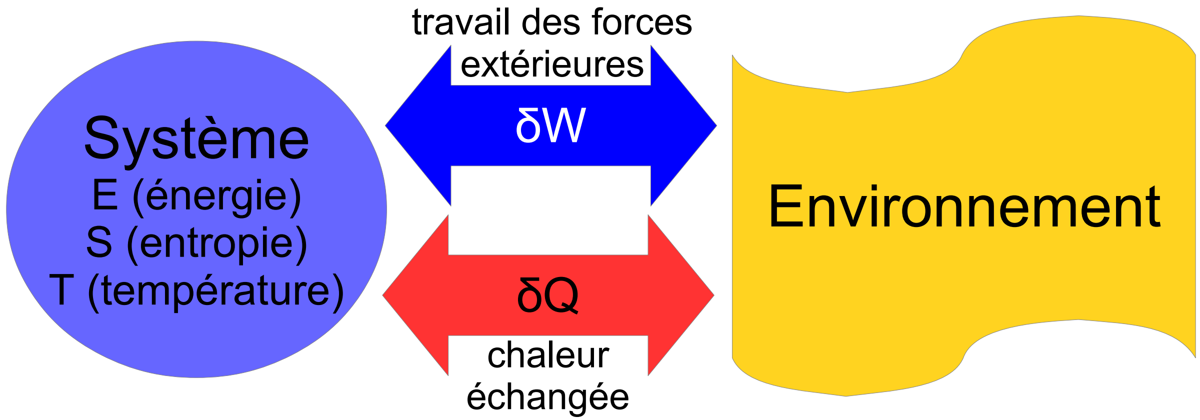
Second principe de la thermodynamique :
L'entropie d'un système isolé ne peut que croître.

Au niveau microscopique, l'origine du désordre est l'agitation thermique des atomes et des molécules.

Déf : La mesure de l'agitation moyenne des atomes et des molécules est appelé **température** du système.

Cette seconde loi de la thermodynamique est le seul principe physique qui distingue le passé du futur. C'est l'origine de la flèche du temps !

Reformulation dans le cadre des systèmes ouverts



1ère loi de la thermodynamique :

variation d'énergie $\Delta E = \delta W + \delta Q$

2nde loi de la thermodynamique :

variation d'entropie $\Delta S = \delta Q/T + \Delta S_{créée}$

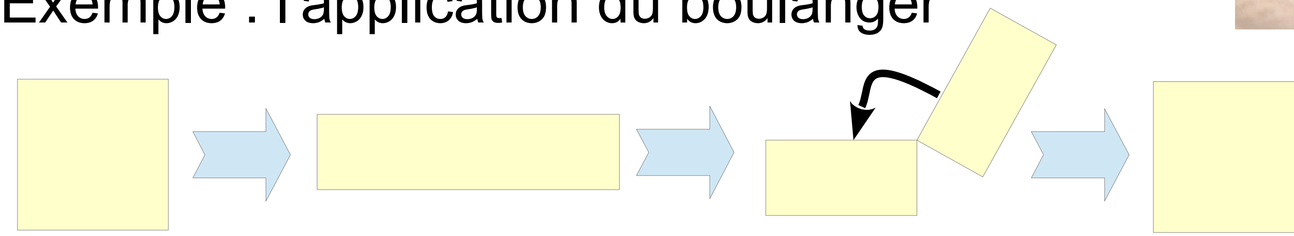
accroissement spontané du désordre

De l'origine du désordre « spontané »

Un système dynamique est dit chaotique si :

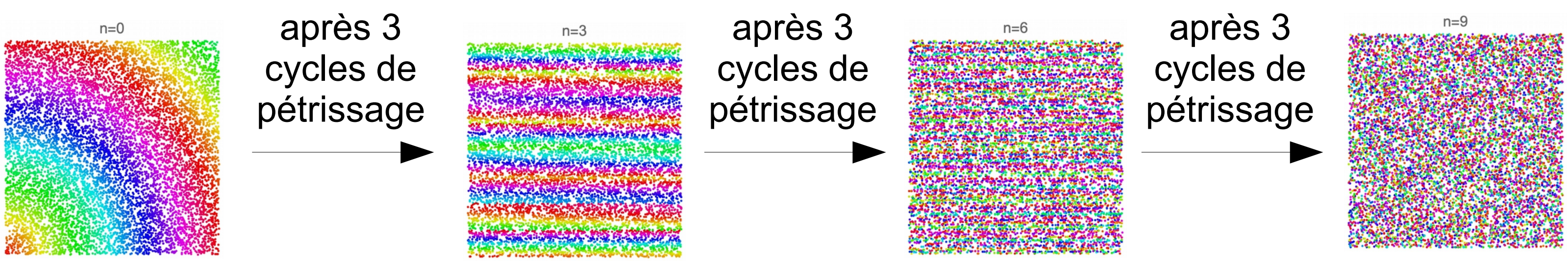
- il est sensible aux conditions initiales ;
- il est mélangeant.

Exemple : l'application du boulanger



$\delta W \approx 0$

$\delta Q \approx 0$



$S_0 \approx 0$

$S_9 \approx k \ln(N)$

(N : nombre de grains)

Le paradoxe de Zermelo

Le paradoxe de Zermelo

Théorème de récurrence de Poincaré
Tous les systèmes bornés reviennent au bout d'un temps T au voisinage de leur état initial.

mais

2nde loi de la thermodynamique
L'entropie des systèmes isolés ne peut que croître.

$$S(0) \rightarrow S(t) \geq S(0) \rightarrow S(T) \approx S(0)$$

S décroît entre t et T ?

Le cas de l'application du chat d'Arnold

L'application du chat d'Arnold :
n,p dans {0,1,2,...,N-1}

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} n+p \ \mathit{mod}\ N \\ n+2p \ \mathit{mod}\ N \end{pmatrix}$$

S_0 petit

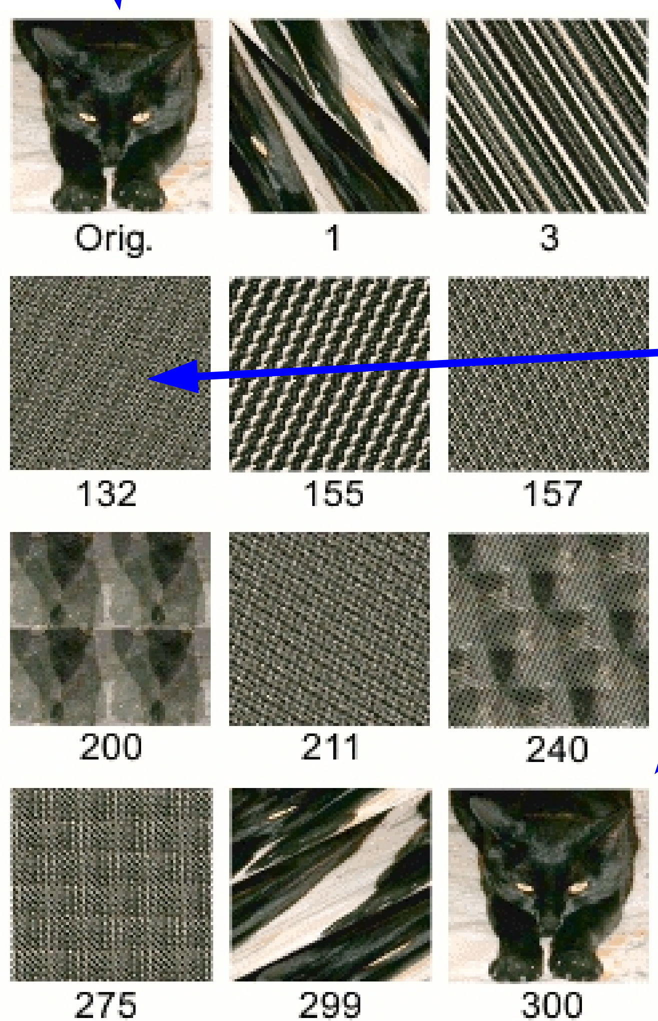


Image de 150 pixels sur 150 pixels (N=150)

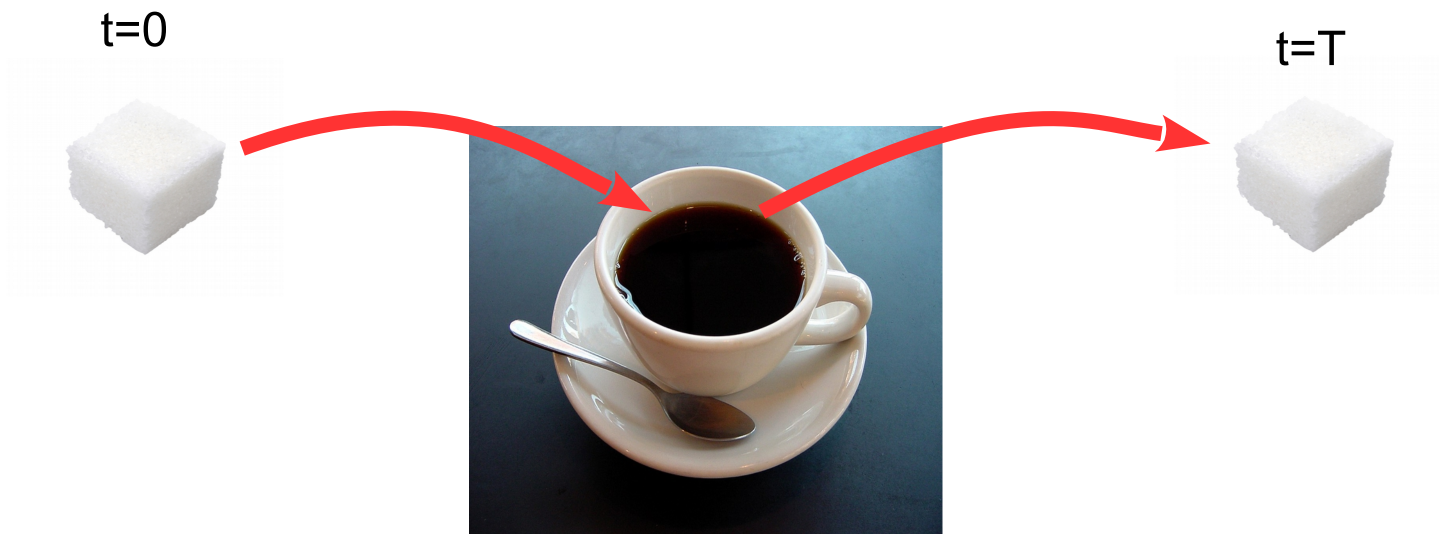
(n,p) : coordonnées d'un pixel

Sous l'effet du mélange, après 132 itérations, on a S_{132} grand.

Mais le théorème de récurrence de Poincaré s'applique, après 300 itérations on retrouve l'image initiale.

Ici il y a peu d'éléments (nombre de pixels), de plus l'application du chat d'Arnold présente des temps de récurrence de Poincaré exceptionnellement court !

Levée du paradoxe du Zermelo



Temps moyen de récurrence de Poincaré : $T = w^N \tau$

w : rapport entre le volume de la tasse et le volume d'un grain de sucre.
$w = (200 \text{ ml})/(2 \text{ mm}^3) = 10^5$

N : nombre de grains de sucre
$N = 2000$

τ : temps caractéristique de la dissolution du sucre
$\tau = 1$ min

$\rightarrow T = 10^{10\,000}$ min $\approx 2\times10^{9\,994}$ ans $\approx 2\times10^{9\,984}$ âge de l'Univers

(Ce calcul est très favorable car il suppose que la dissolution ne se fait que par dispersion des grains de sucre, et pas au niveau des molécules de saccharose!)

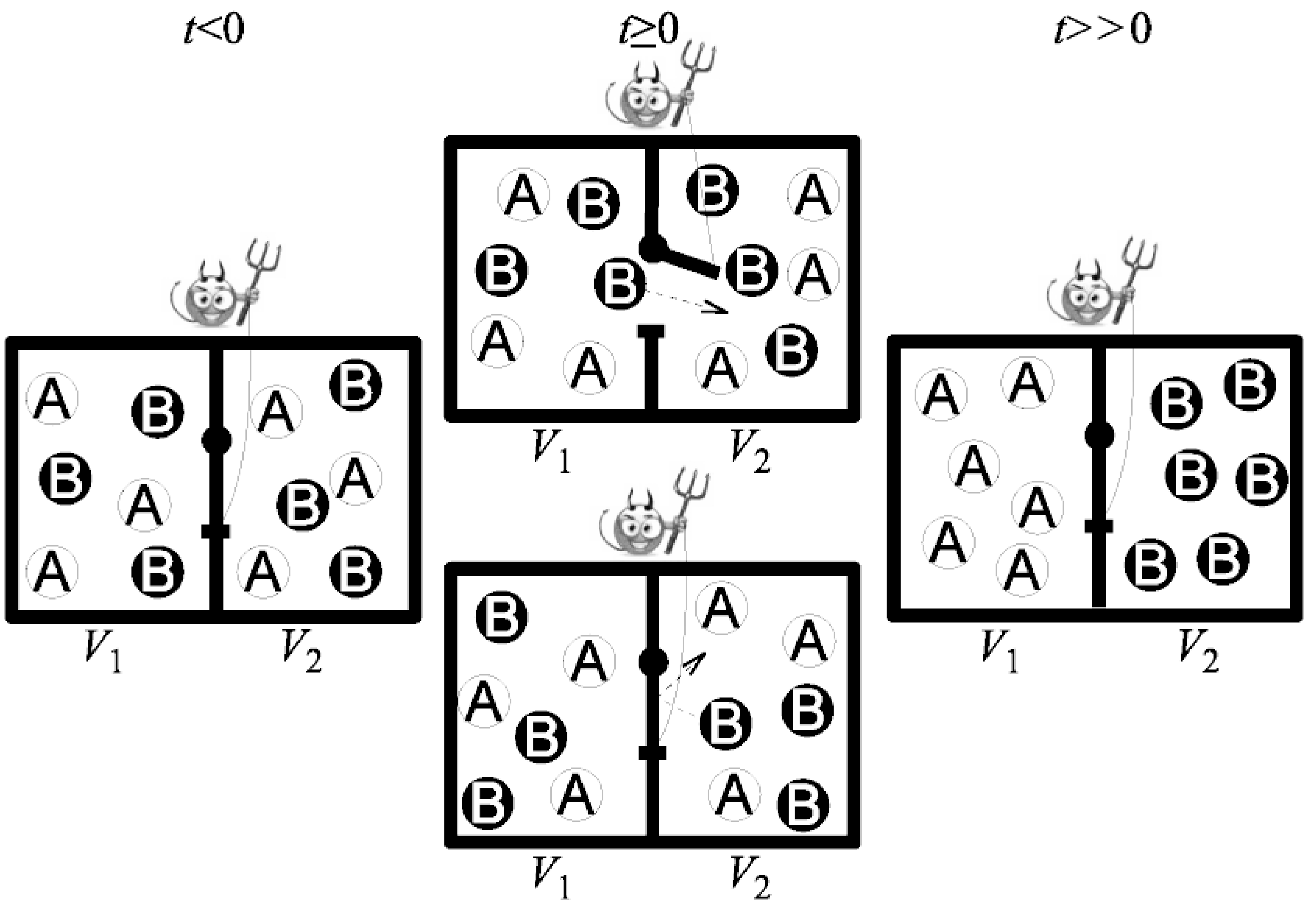
Précision du 2nd principe

L'entropie des systèmes isolés ne peut que croître sur des durées accessibles d'observation.

ou

L'entropie des système isolé ne peut probablement que croître.
(i.e. la probabilité d'observer l'entropie décroître sur des durées accessibles d'observation est négligeable).

Le démon de Maxwell



Le démon de Maxwell doit au minimum produire une quantité de chaleur de $Q=TS_0$.