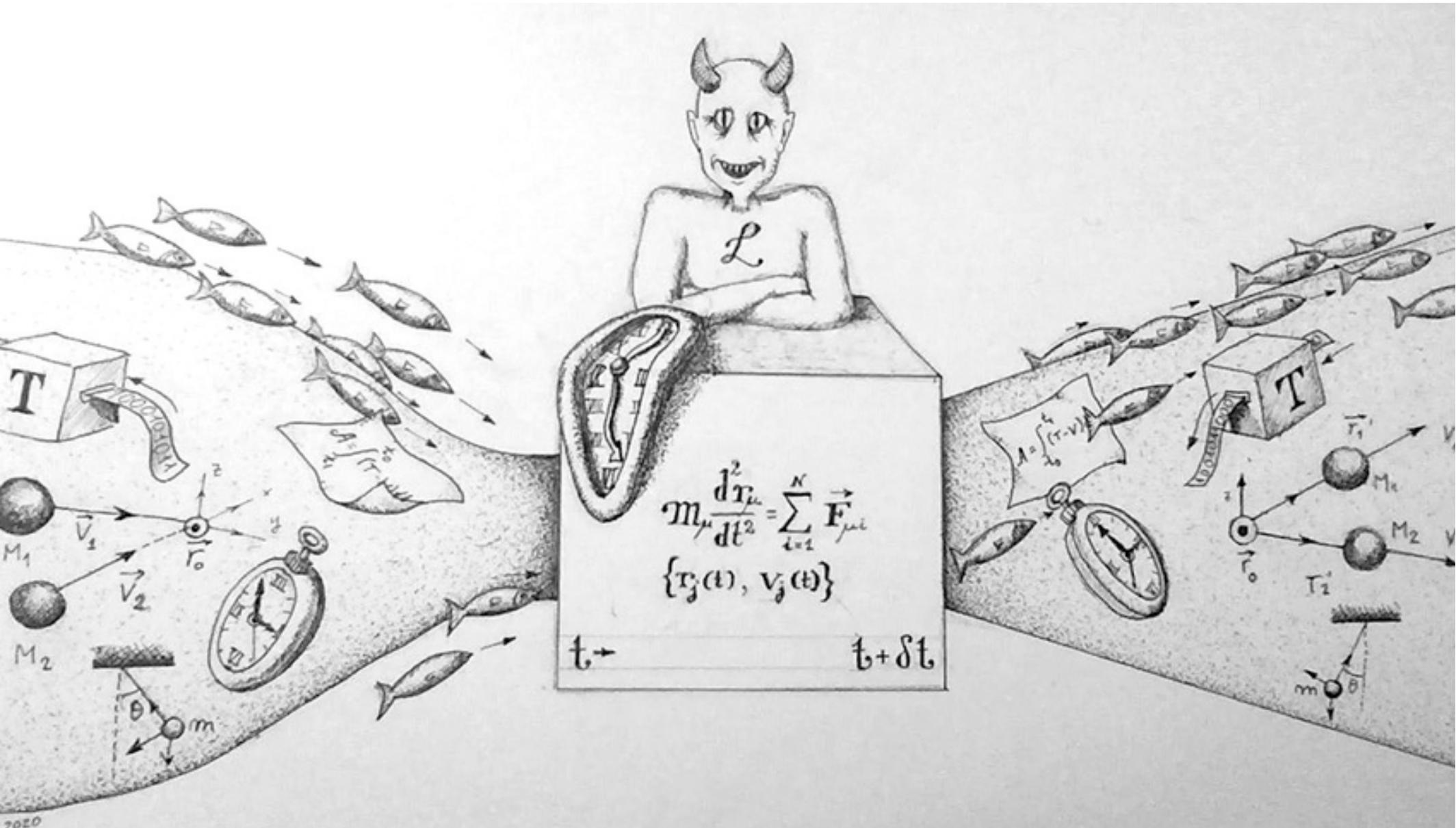


La théorie du chaos

II- Le démon de Laplace

David Viennot – Maître de Conférences en physique théorique
Observatoire de Besançon, Université Marie & Louis Pasteur



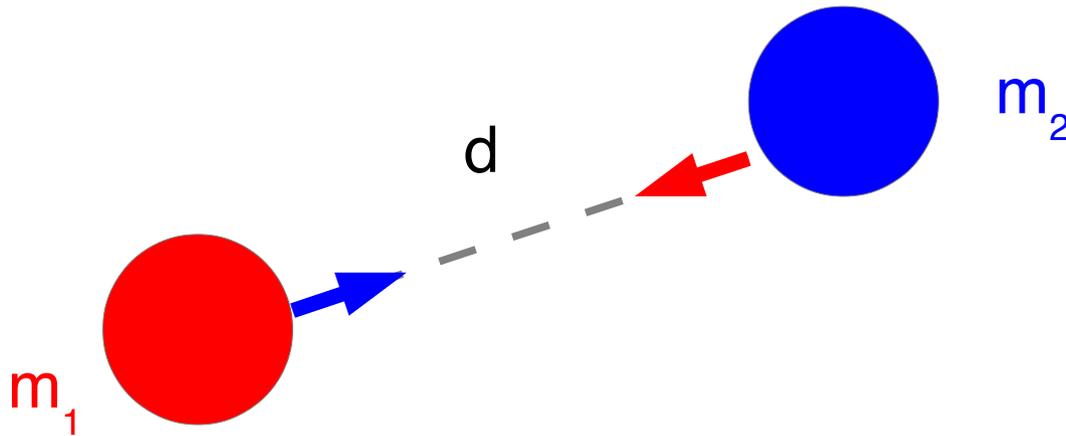
A white rabbit, resembling the White Rabbit from Alice in Wonderland, is depicted from the chest up. It is wearing a dark tuxedo jacket, a white dress shirt, and a dark bow tie. The rabbit has long, upright ears and a single, prominent red eye. The background is solid black. A semi-transparent grey horizontal bar is positioned across the middle of the image, containing the text 'Le démon de Laplace' in a bold, black, sans-serif font.

Le démon de Laplace

La mécanique newtonienne

Le Principe Fondamental de la Dynamique : $F = ma$

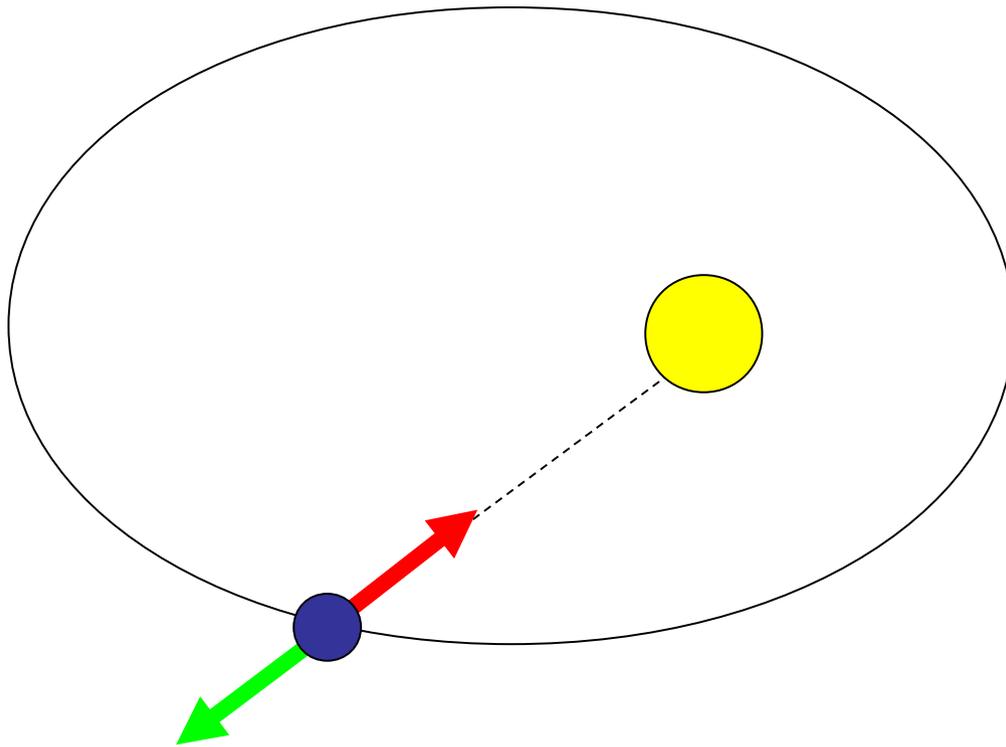
Loi de l'attraction universelle



$$F = Gm_1m_2/d^2$$

L'application au problème à 2 corps

Principes de la mécanique Newtonienne → Lois de Kepler



Force gravitationnelle
Force centrifuge

Dans \mathcal{R}_S : $m \cdot \ddot{s} = \mathbf{F}_g$
→ accélération dans la direction du soleil

Dans \mathcal{R}_T : $m \cdot \ddot{T} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_c = \mathbf{0}$
→ équilibre

→ $\mathbf{F}_c = -m \cdot \ddot{s}$

La question épistémologique

- On mesure les conditions initiales à $t=0$ d'un système (position et vitesse).
- On connaît les forces qui s'exercent sur le système.
- On applique le Principe Fondamental de la Dynamique de Newton.

→ On peut prédire l'évolution du système aussi loin que l'on veut dans le futur.

La Monde semble totalement **prédictible** et contrôlable.

Le démon de Laplace

« Une intelligence qui, à un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était suffisamment vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome ; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. »

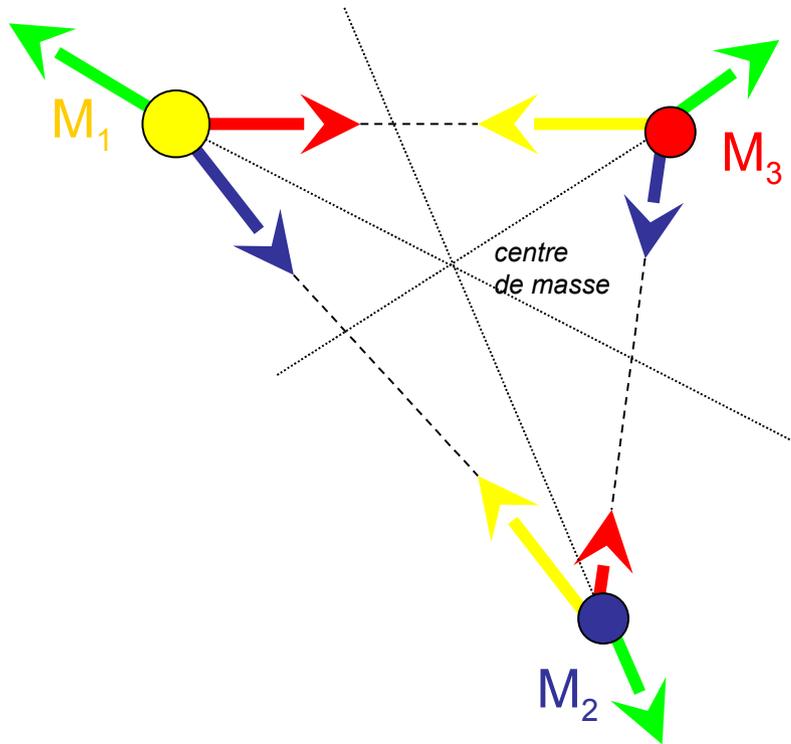
Pierre-Simon Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*





Le problème à 3 corps

Position du problème



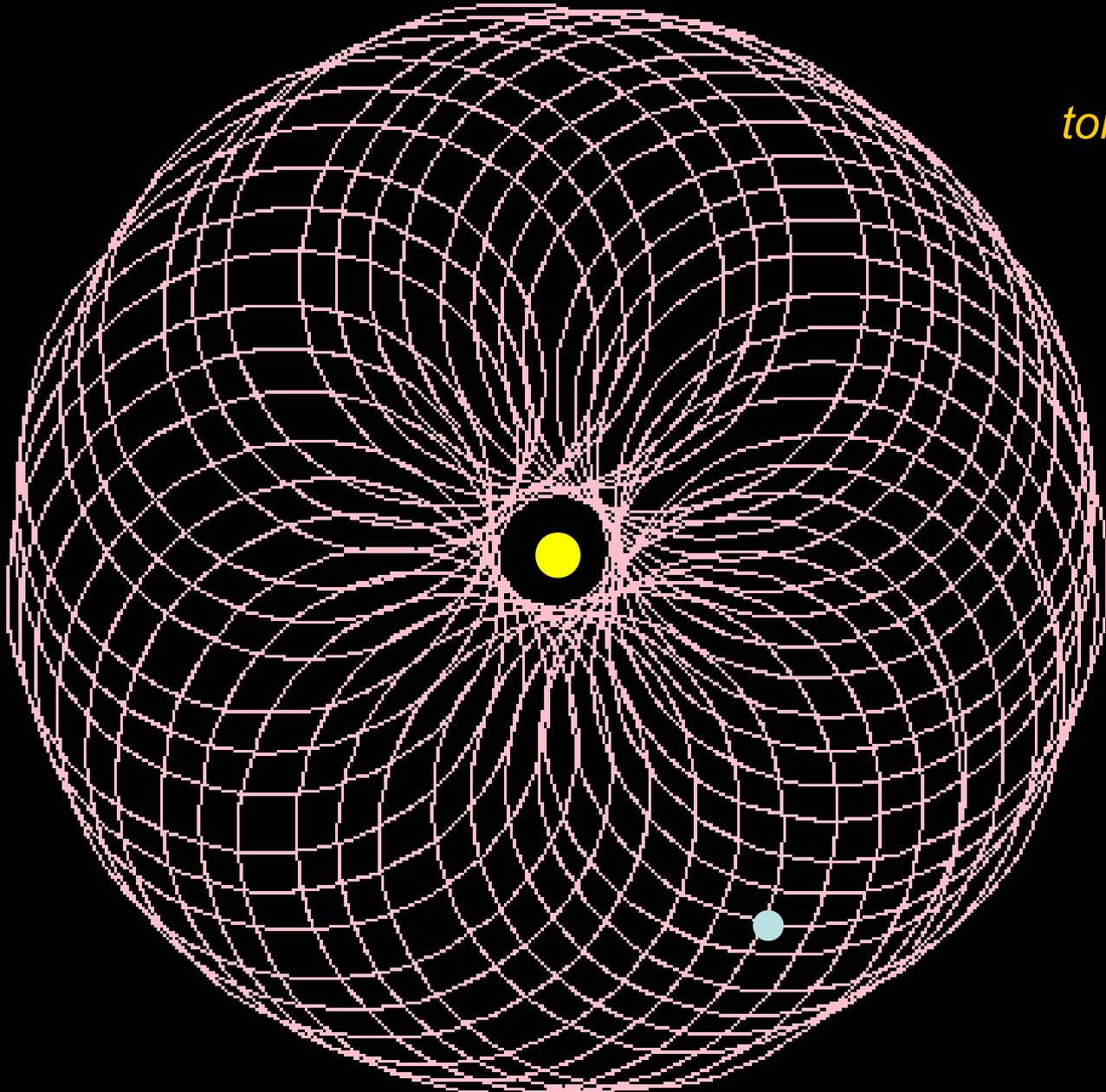
Problème très difficile =
pas de solution analytique

Simplifications possibles :
 M_3 est négligeable
le corps 3 est très loin
les corps 1 et 2 sont fixes

Cas perturbatif

Soleil
Terre
Jupiter
(50 000
masses
terrestres)

réalité : 318
masses terrestres



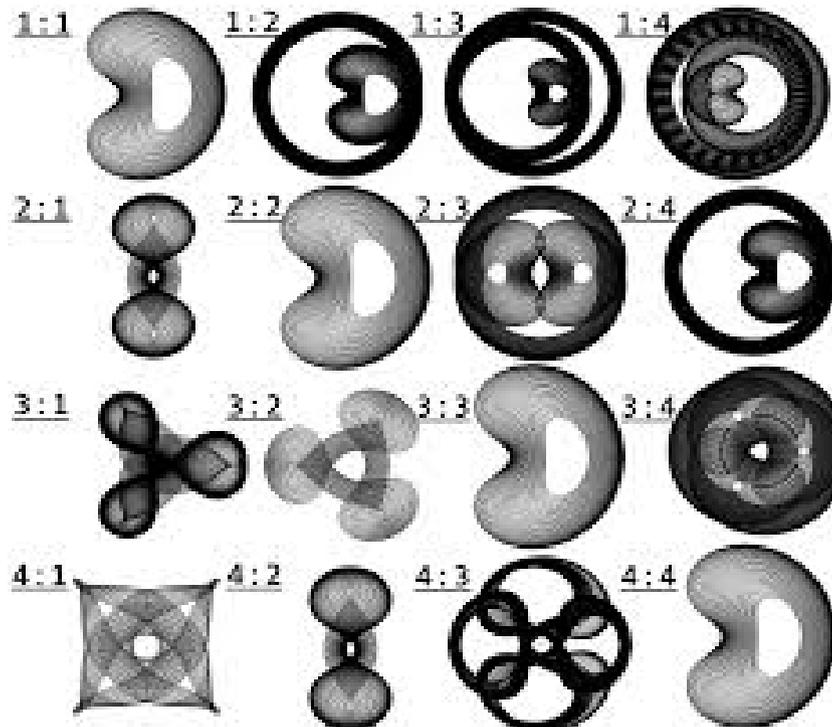
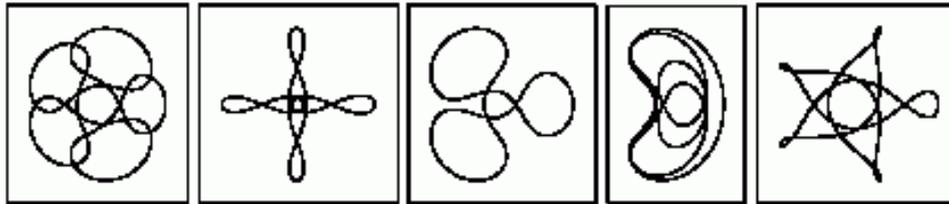
tore de KAM



Les orbites de Poincaré

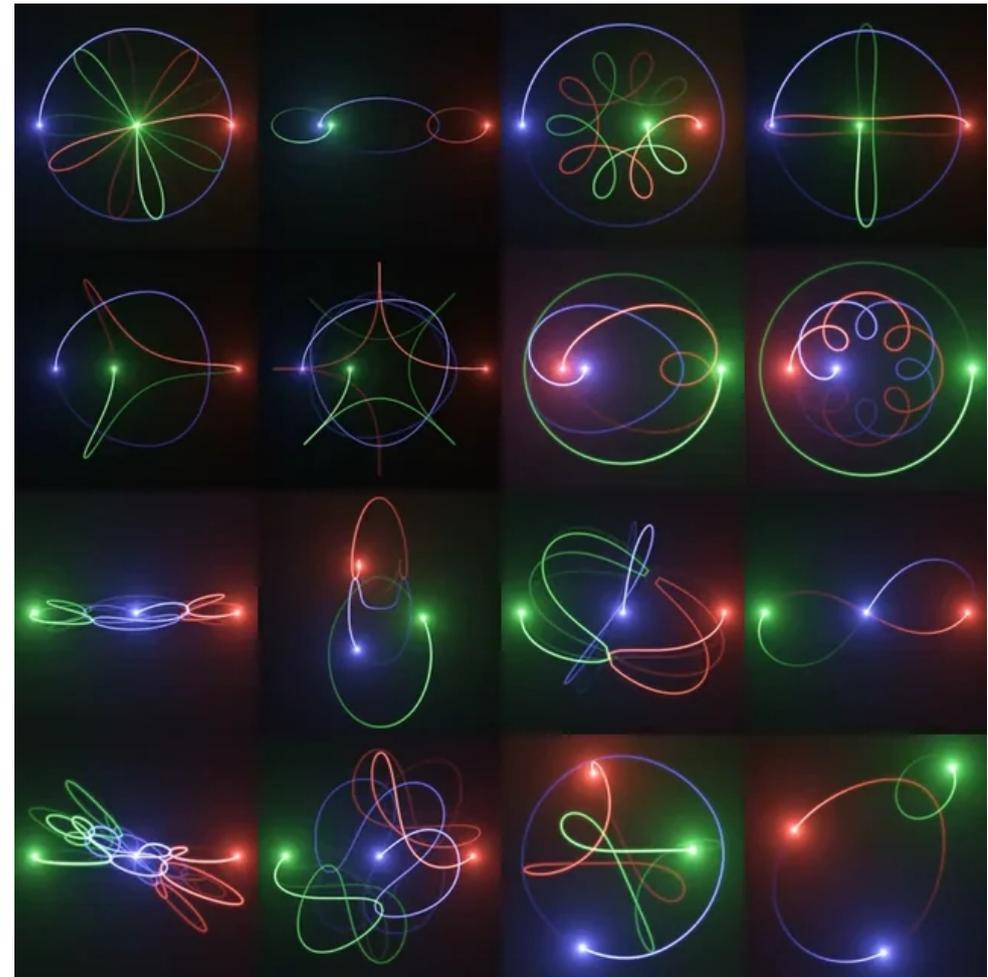
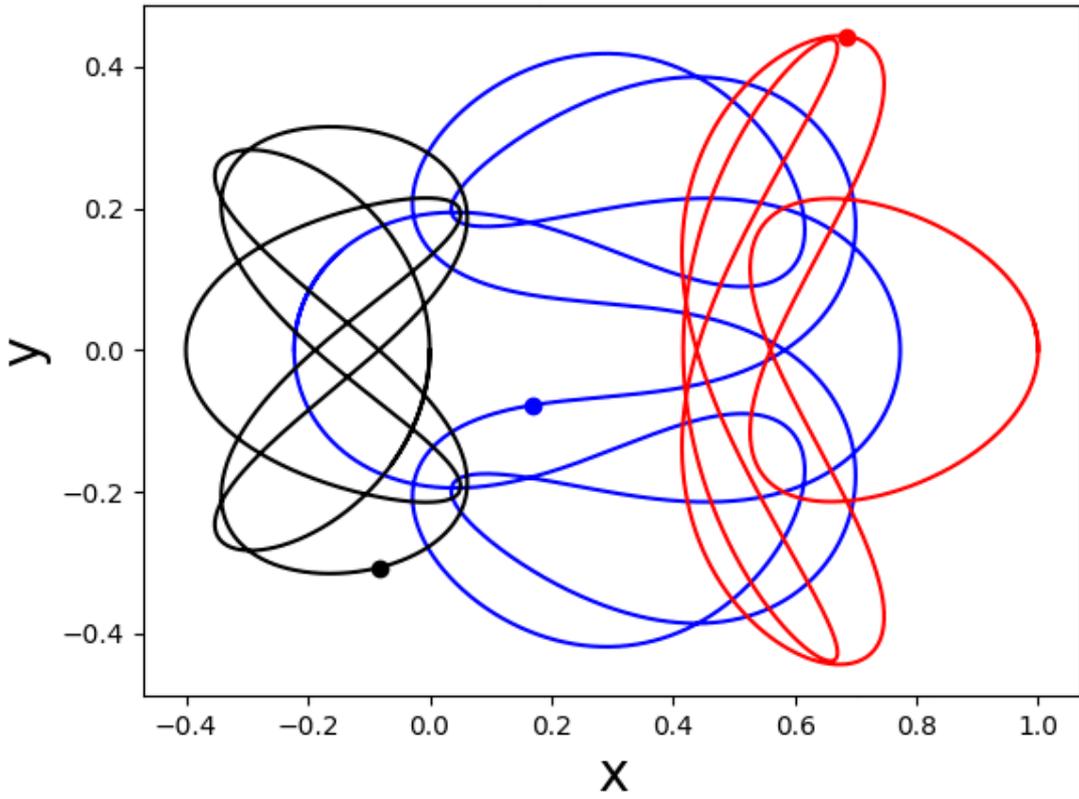
un corps en orbite autour d'un système d'étoiles binaires (fixes)

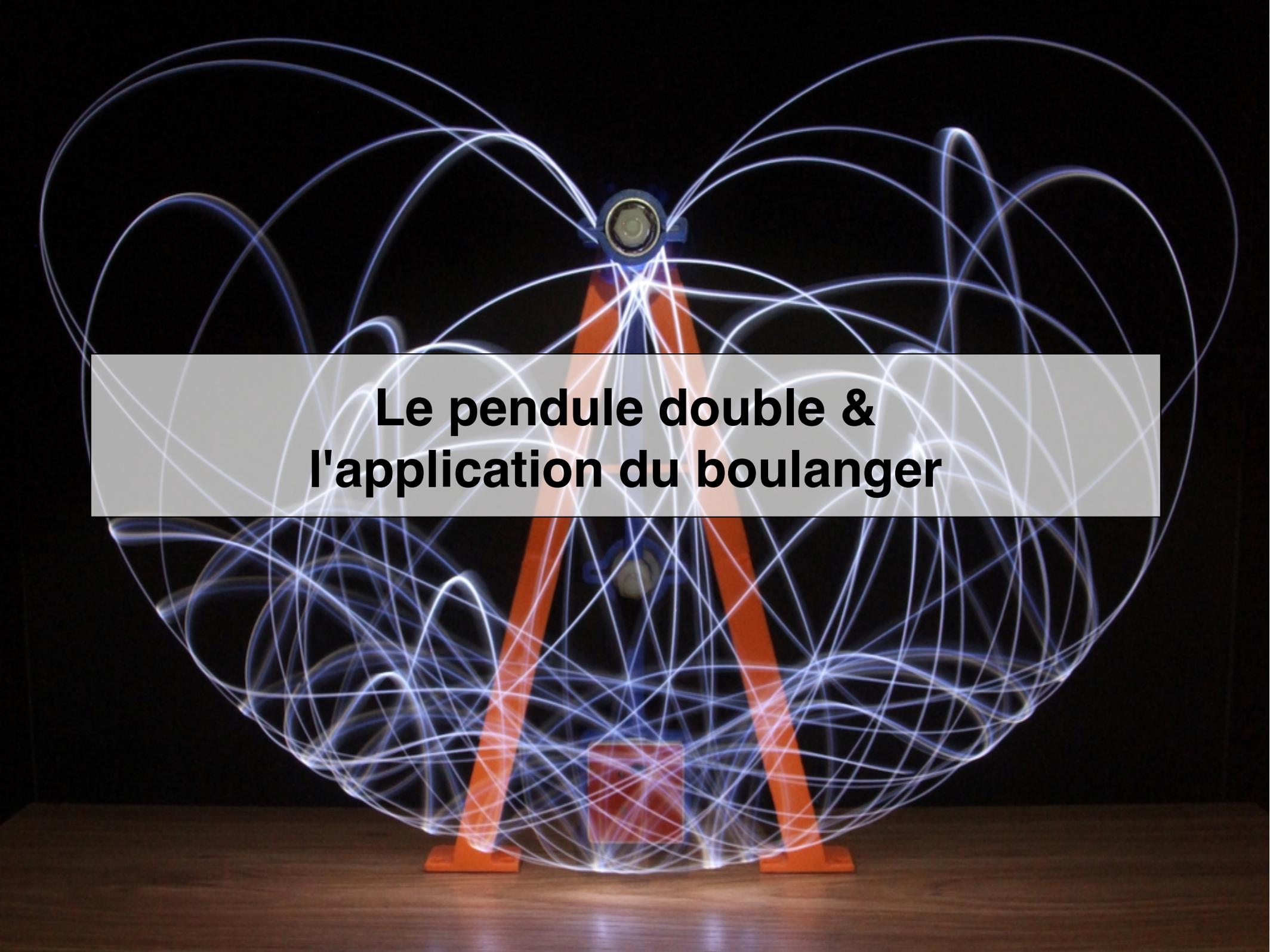
orbites pour différentes conditions initiales :



Ballets étranges à 3 corps

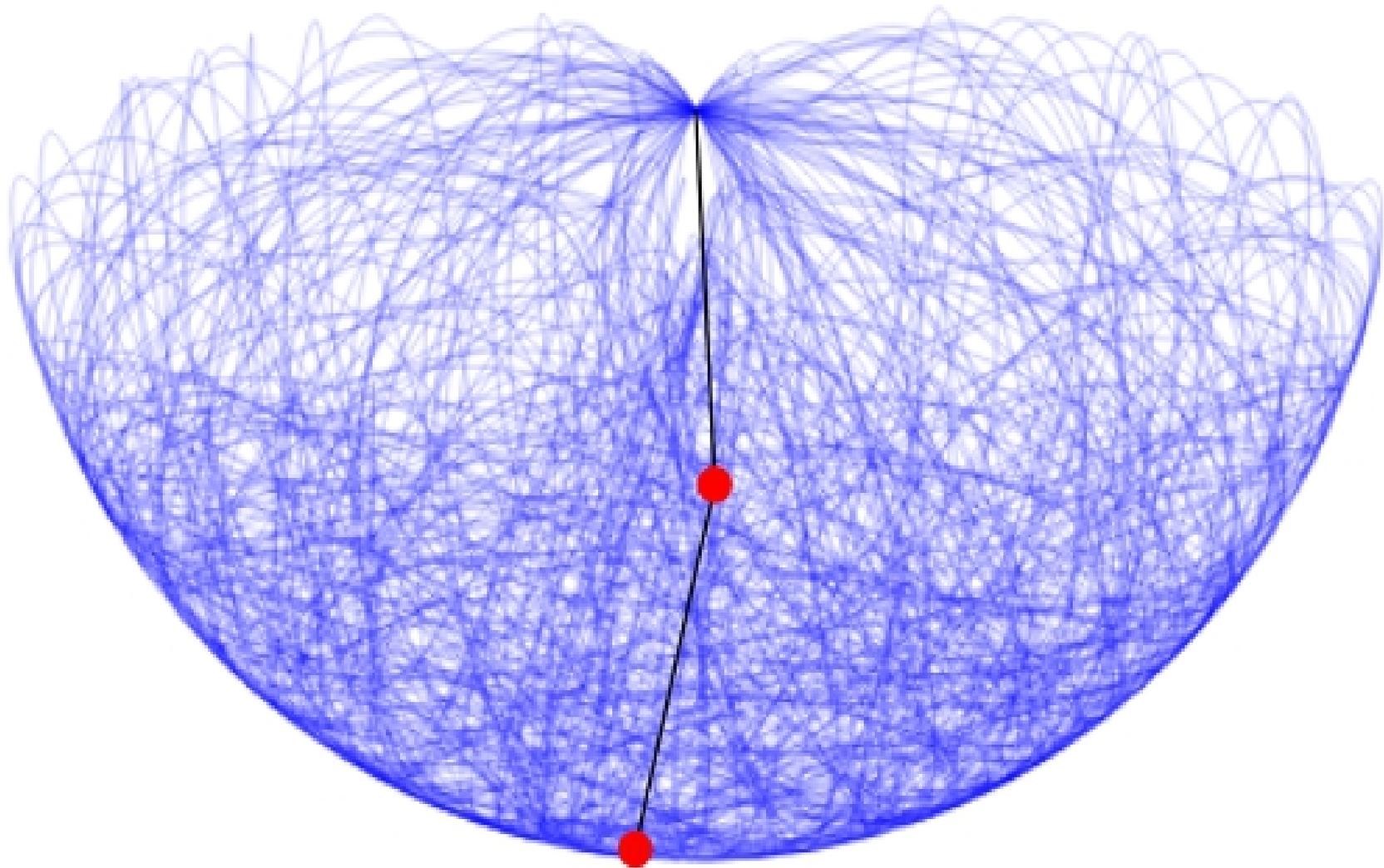
time=4.900000



A double pendulum experiment is shown against a black background. The pendulum consists of two orange rods connected by a pivot. The top pivot is at the top center, and the bottom pivot is at the end of the first rod. The pendulum is illuminated with a bright blue light, creating a complex, chaotic pattern of light trails that form a dense, circular shape. The trails are most concentrated in the center and become more sparse towards the edges. A semi-transparent white rectangular box is overlaid on the center of the image, containing the title text.

**Le pendule double &
l'application du boulanger**

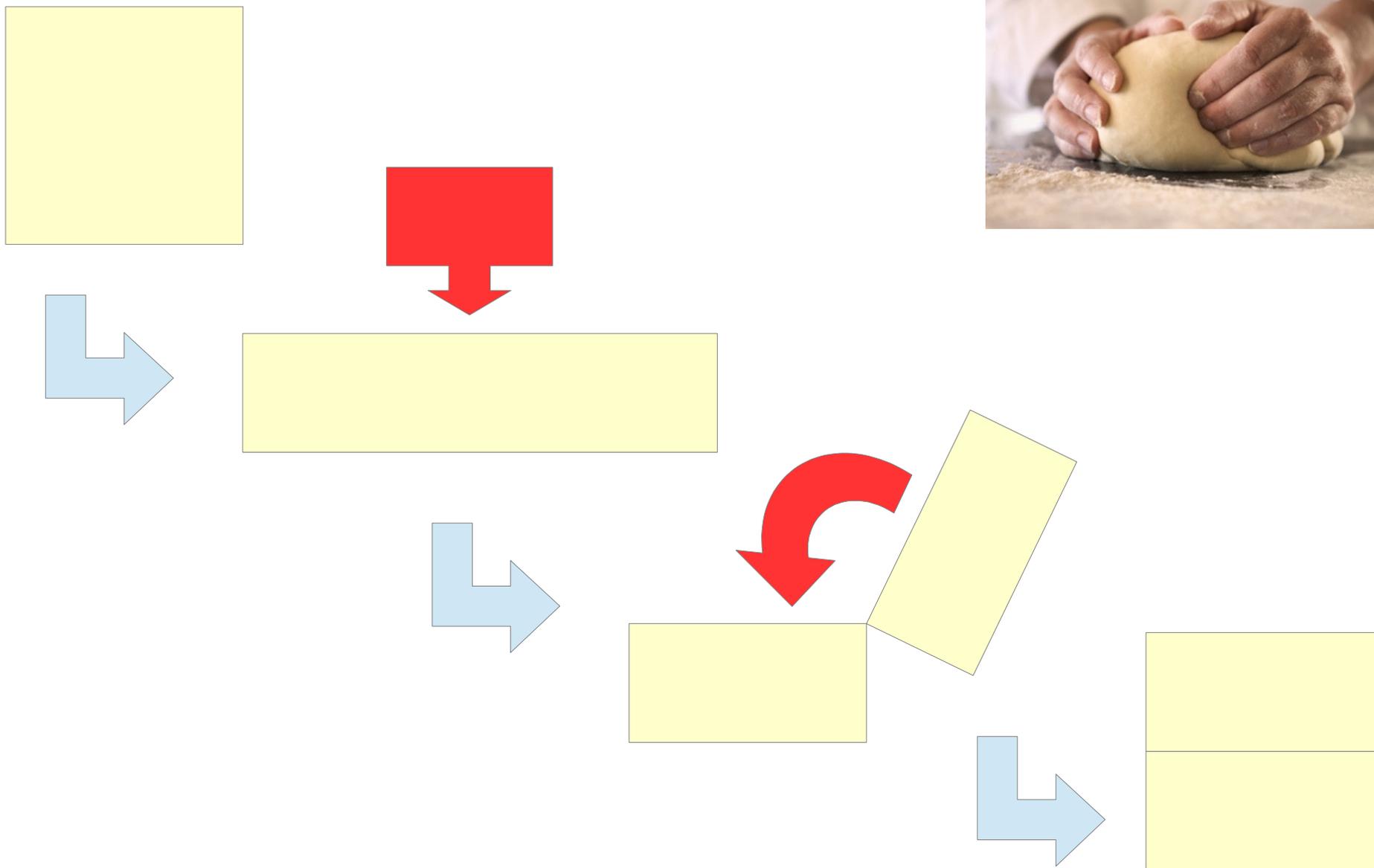
Le pendule double



L'application du boulanger

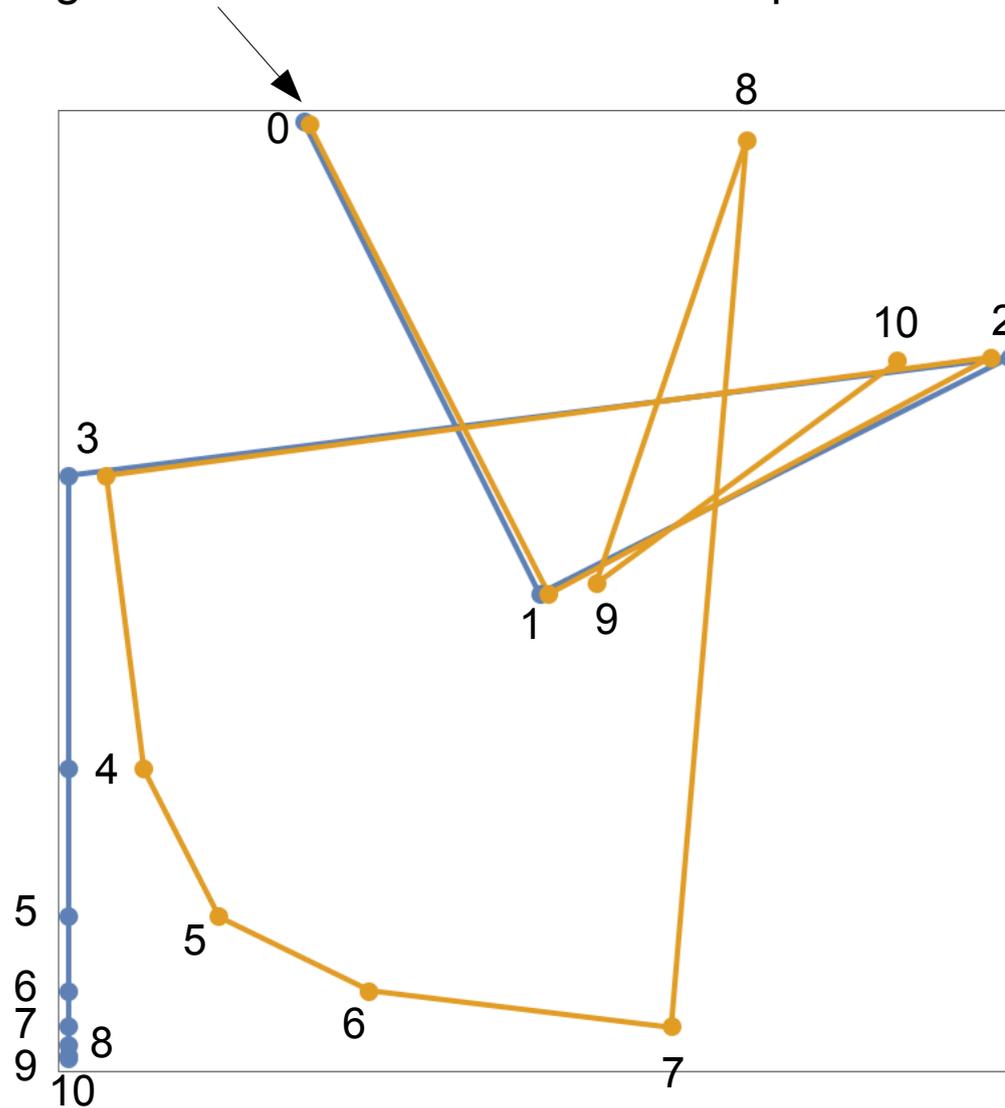
Modélisation simple du pétrissage de la pâte à pain.

pâton = carré



L'application du boulanger : dynamique du p \hat{a} ton

On place deux « grains » de levure au sommet du p \hat{a} ton.



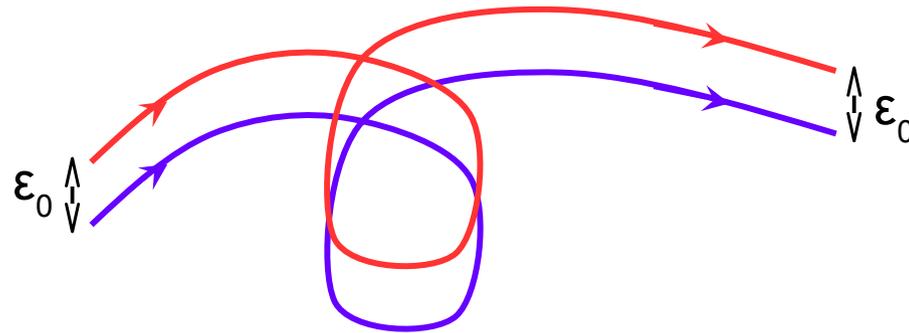
$n \bullet$ indique la position d'un grain au bout de n cycles de pétrissage.



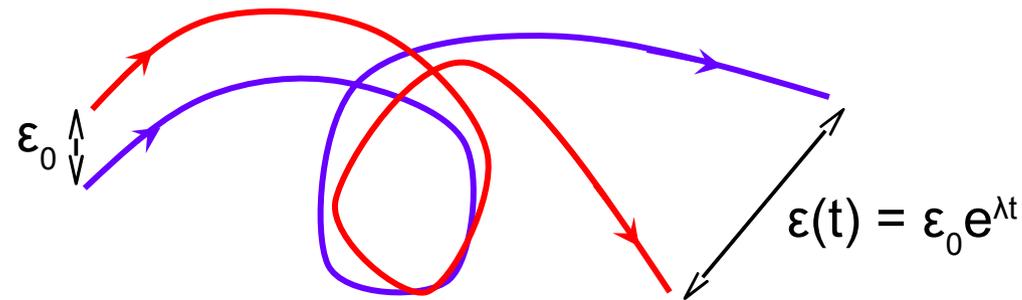
La théorie du chaos

La sensibilité aux conditions initiales

Dynamique des systèmes
intégrables
(problème à 2 corps,
pendule simple,...)



Dynamique des systèmes
non-intégrables
(problème à 3 corps,
pendule double,...)



→ : trajectoire réelle du système.

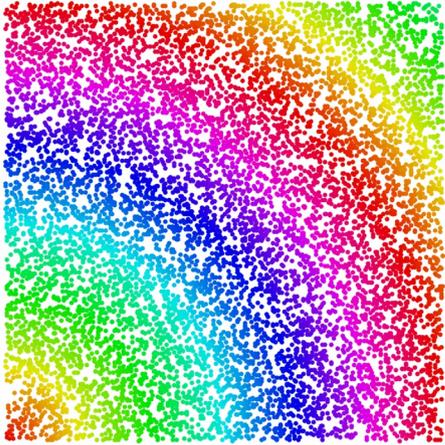
→ : prédiction sur la trajectoire du système.

ε_0 : erreur de mesure sur les conditions initiales (position, vitesse).

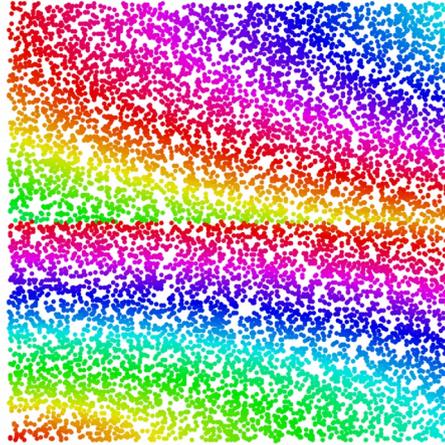
$\varepsilon(t)$: erreur de la prédiction au cours du temps.

Le mélange topologique

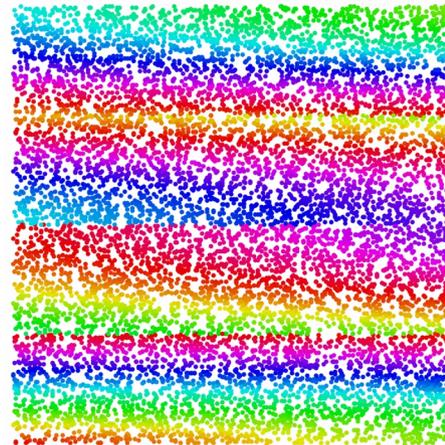
n=0



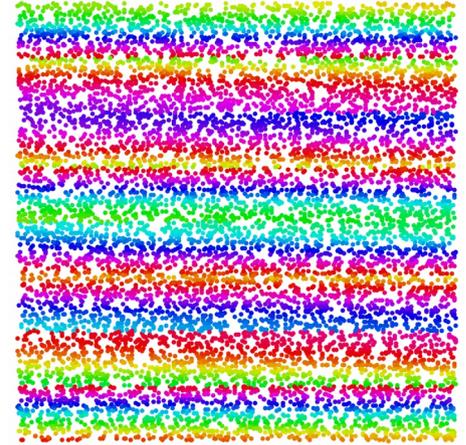
n=1



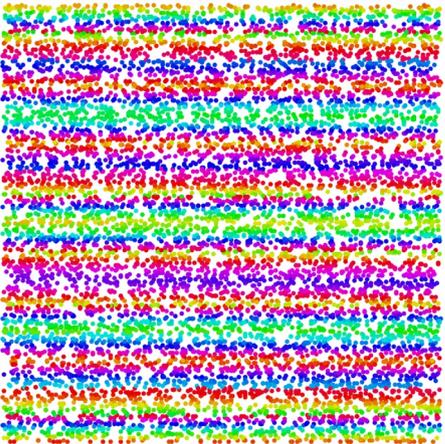
n=2



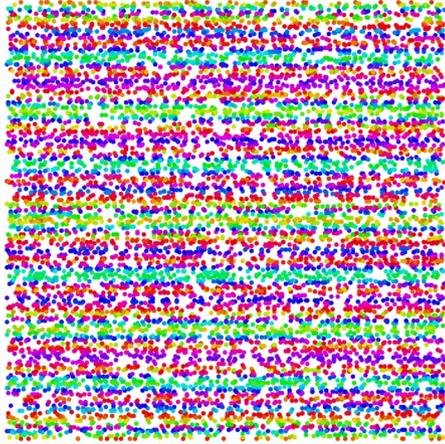
n=3



n=4



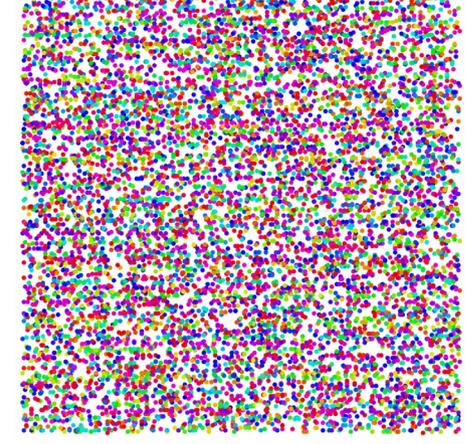
n=5



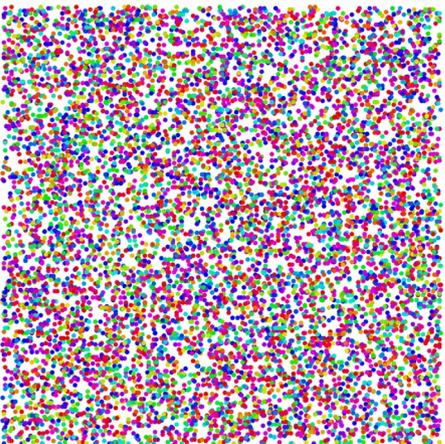
n=6



n=7



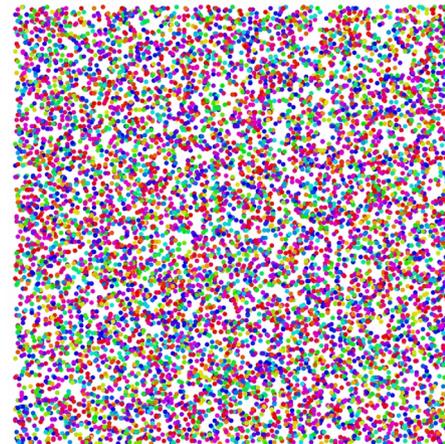
n=8



n=9



n=10



Mélange de la pâte
sous l'effet du
pétrissage
(application du
boulangier) au n ième
cycle de pétrissage.

La définition du chaos

Un système dynamique est dit chaotique si :

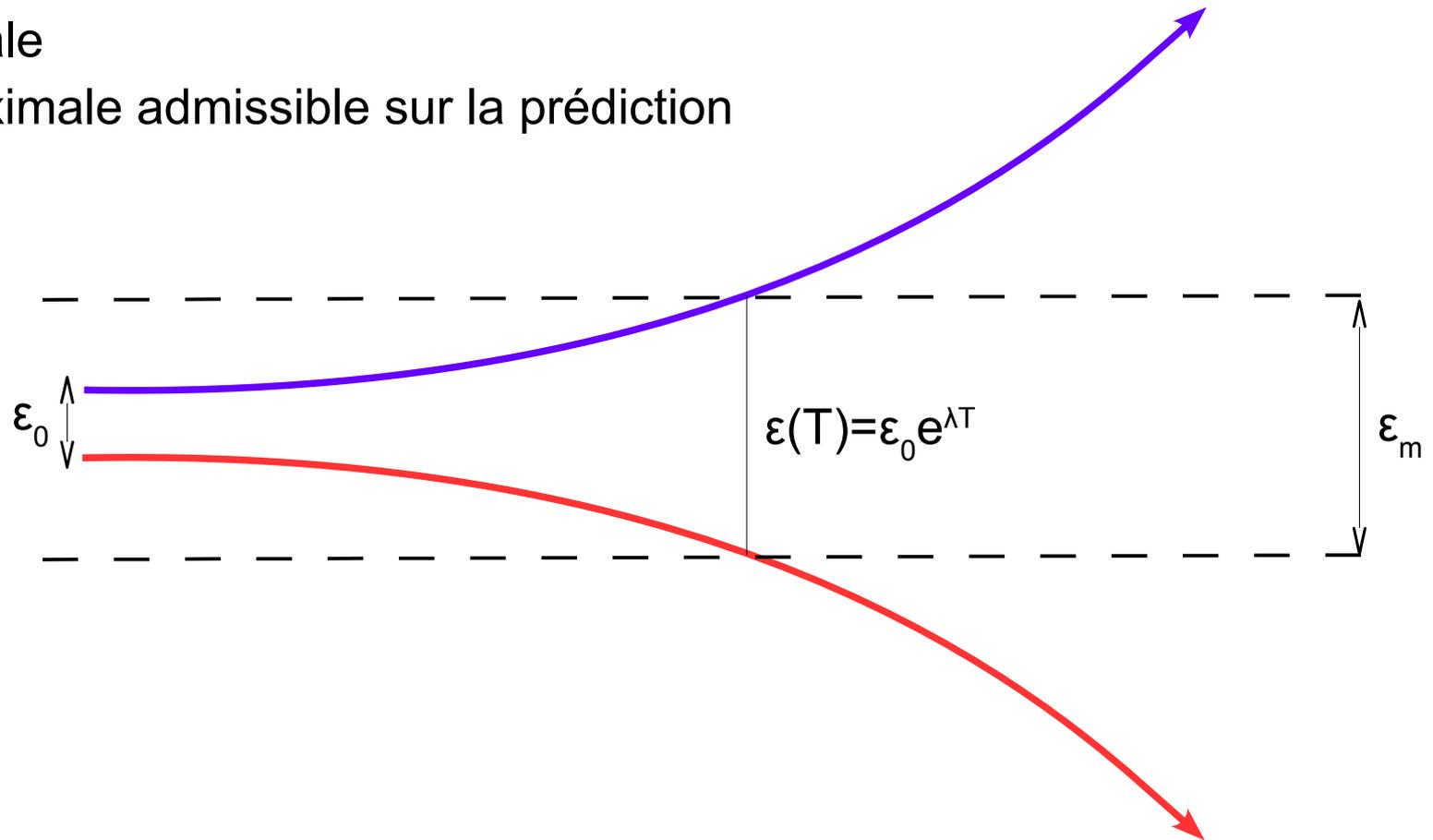
- il est sensible aux conditions initiales ;
- il est mélangeant.

De tels systèmes se caractérisent par des trajectoires erratiques (\neq aléatoires).

L'horizon de prédictibilité

ε_0 : erreur initiale

ε_m : erreur maximale admissible sur la prédiction



$T = \ln(\varepsilon_m / \varepsilon_0) / \lambda$: horizon de prédictibilité (*horizon de Lyapunov*)
<=> durée maximale sur laquelle la prédiction est fiable.

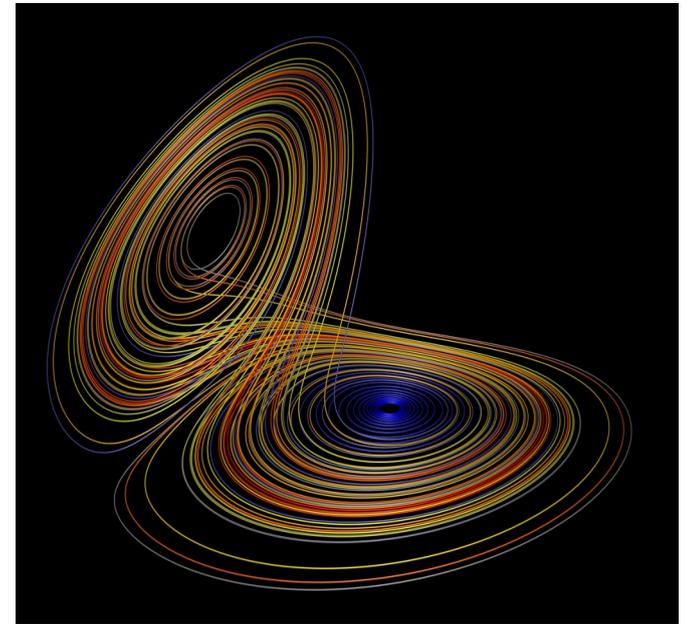
L'effet papillon (*butterflies and hurricanes*)

La métaphore de Lorenz pour expliquer la théorie du chaos en météorologie :
« Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer un ouragan au Texas ? »

Il ne faut pas interpréter la question comme une relation de cause à effet direct !!!

mais comme...

L'erreur commise sur les conditions initiales atmosphériques en négligeant le battement d'ailes du papillon, peut induire de rater la prédiction d'un ouragan (au delà de l'horizon de Lyapunov).



*Ce sont les effets conjugués (**mélangés**) du battement d'ailes et de plein d'autres variations atmosphériques qui sont la cause de l'ouragan.*

Le démon de Laplace

« Une intelligence qui, à un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était suffisamment vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome ; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. »

Pierre-Simon Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*

Dans la réalité tous les systèmes sont chaotiques (*les systèmes considérés comme non-chaotiques sont juste des systèmes pour lesquels l'horizon de prédictibilité est suffisamment lointain par rapport à la durée d'observation*).

L'erreur expérimentale/observationnelle sur les conditions initiales ne peut jamais être réduite à zéro.

→ Les systèmes physiques réalistes sont tous imprédictibles à plus ou moins long terme !