

Université Bourgogne Franche-Comté
École doctorale Carnot-Pasteur
Institut UTINAM, UMR 6213 du CNRS

Mémoire
d'Habilitation à Diriger des Recherches

intitulé
Systèmes complexes classiques et quantiques
par
José Lages

présenté, le vendredi 29 novembre 2019, devant le jury composé de :

Pierre Borgnat	Président et Rapporteur	Directeur de recherche CNRS École Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France
Klaus Frahm	Examineur	Professeur Université Paul Sabatier, Toulouse, France
Bertrand Georgeot	Rapporteur	Directeur de recherche CNRS Université Paul Sabatier, Toulouse, France
Philippe Jacquod	Rapporteur	Professeur HES-SO/Valais-Wallis et Université de Genève, Suisse
Dima Shepelyansky	Examineur	Directeur de recherche CNRS Université Paul Sabatier, Toulouse, France
Ivan Shevchenko	Examineur	Professeur Observatoire Pulkovo de l'Académie des Sciences de Russie, Université de Saint-Pétersbourg, Russie

Table des matières

Avant-propos	xi
I Décohérence et ordinateur quantique	1
Présentation	5
1 Décohérence quantique induite par un bain de spins	7
1.1 Introduction	7
1.2 Modèle d'interaction système central - bain	9
1.2.1 Système central statique – traitement semi-classique	10
1.2.2 Validité du traitement semi-classique	11
1.3 Évolution temporelle du système central : cadre général	13
1.4 Décohérence induite par un bain chaotique versus régulier : atténuation des oscillations à court terme	16
1.4.1 Dépendance du processus de décohérence vis-à-vis de la chaotité du bain	16
1.4.2 Dépendance du processus de décohérence vis-à-vis du couplage système - bain et comparaison avec l'atténuation de l'écho de Loschmidt	19
1.5 Évolution à long terme du système central / états pointeurs	22
1.5.1 Décohérence à long terme du système central	22
1.5.2 Impact de la chaotité du bain sur les états pointeurs du système central	24
1.6 Conclusion	25
2 Supression du chaos quantique dans un hardware quantique	27
2.1 Introduction	27
2.2 Description du modèle d'ordinateur quantique	28
2.3 Résultats numériques	31
2.4 Conclusion	39
Bibliographie	41

II Dynamique chaotique de matière (noire) autour des systèmes binaires **47**

Présentation **51**

3 L'application de Kepler **55**

3.1 Problème à 2 corps / Problème de Kepler 55

3.2 Le problème à trois corps circulaire restreint 57

4 L'application de Halley **61**

4.1 Frappe du Système solaire 61

4.2 Portrait de phase de la dynamique de 1P/Halley 66

5 L'application noire **67**

5.1 Capture de matière noire par le Système solaire 68

5.1.1 Section efficace de capture 69

5.1.2 Injection, évolution, et éjection des particules capturées 71

5.1.3 Masse et distribution spatiale de la matière noire capturée par le Système solaire 74

5.2 Capture de matière noire par les systèmes binaires 77

5.2.1 Densité de matière noire capturée par un système binaire 78

6 Environnement dynamique des petits corps du Système solaire **83**

6.1 Généralisation de l'application de Kepler 86

6.2 Zone chaotique cricum-binaire 89

6.2.1 Détermination analytique du bord du chaos 89

6.2.2 Diagrammes de stabilité et zone chaotique centrale 91

6.3 Ida et Dactyl 95

6.4 Itokawa et *Hayabusa* 96

6.5 Noyaux cométaires 97

6.6 Capture de matière par les petits corps du Système solaire 104

Conclusion **105**

Bibliographie **107**

III Analyse de réseaux complexes **113**

Présentation **117**

7 Matrice de Google (réduite) **121**

7.1 Matrice de Google, algorithmes PageRank et CheiRank 121

7.1.1 Construction de la matrice de Google et du vecteur PageRank 121

7.1.2 Algorithme PageRank 125

7.2 Construction de la matrice de Google réduite 126

7.3 Sensibilité du vecteur de Perron ou Sensibilité du PageRank 128

8 Réseaux Wikipédia	131
8.1 Classement mondial des universités selon Wikipédia	131
8.1.1 Classements PageRank et CheiRank	133
8.1.2 Comparaison WRWU vs ARWU	133
8.1.3 Distribution géographique	136
8.1.4 Évolution à travers les siècles	138
8.1.5 Intrication des cultures	139
8.1.6 Écho médiatique	140
8.1.7 Réseaux réduits des universités	140
8.2 Maladies infectieuses dans Wikipédia	145
8.2.1 Classement PageRank et CheiRank des maladies infectieuses	146
8.2.2 Interactions mutuelles entre maladies infectieuses, et interactions entre maladies infectieuses et pays du globe	146
8.2.3 Sensibilités des pays du globe aux maladies infectieuses	151
9 Réseaux de protéines en interaction : application à l'oncologie	153
10 Réseau du commerce international	155
10.1 Matrice de Google pour le réseau du commerce international	156
10.2 Réseau réduit des échanges d'hydrocarbures dans l'UE	157
10.3 Sensibilité de la balance commerciale	159
Conclusion	163
Bibliographie	167

Table des figures

Figures de la partie I

1.1	Densité spectrale $N(\varepsilon)$ en fonction de l'énergie ε pour un bain régulier et un bain chaotique	10
1.2	Évolution temporelle des éléments de la matrice densité réduite $\rho(t)$ du système central couplé à un bain	14
1.3	Évolution temporelle de l'entropie linéaire Ω du système central	14
1.4	Valeur <i>état pointeur</i> , ρ_{12}^{pt} , de l'élément non-diagonal, ρ_{12} , de la matrice densité réduite en fonction du rapport J/b	16
1.5	Évolution à court terme de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$ pour un bain chaotique et pour un bain régulier	17
1.6	Temps de demi-vie de l'atténuation de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$ de la matrice densité réduite, de l'entropie linéaire $\Omega(t)$, et de la fidélité $F(t)$ du système central, en fonction de Γ_0	18
1.7	Temps de décohérence T_s en fonction de $1/b$ pour un bain chaotique et pour un bain régulier	20
1.8	Évolution à court terme de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$ dans le cas d'un bain chaotique et dans le cas d'un bain régulier	21
1.9	Évolution globale de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$ et de l'entropie linéaire $\Omega(t)$ du système central	22
1.10	Évolution à long terme de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$	23
1.11	Paramètre η , mesurant la chaoticité du bain, en fonction de Γ_0	23
1.12	Valeur état pointeur, $\rho_{12}^{\text{pt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{12}(t)$, de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$, en fonction du rapport J/b	24
2.1	Réseau désordonné de spins	29
2.2	Distribution $P(s)$ des espacements de niveaux	32
2.3	Paramètre η en fonction de ω_g/d et en fonction de ω_g/ω_g^c	33
2.4	Entropie S_n en fonction de ω_g/d et en fonction de θ	35
2.5	Paramètre η en fonction de l'angle θ et en fonction de l'intensité du désordre δ	36
2.6	Largeur Γ de la densité d'états locale, ρ_W , en fonction du décalage de fréquence ω_g	38

Figures de la partie II

3.1	Exemple d'évolution de l'énergie du troisième corps sur une orbite circumbinaire plane	57
-----	--	----

3.2	Schéma du problème à trois corps restreint et circulaire	58
4.1	Contributions des huit planètes à la fonction frappe du Système solaire $F(x)$ subie par 1P/Halley	62
4.2	Panneau a : amplitude maximale de la forme de la fonction de frappe $f_i(x_i)$ en fonction de la distance au péricentre q/a_i . Panneau b : domaine de variation de la fonction frappe du Système solaire $F(x)$ en fonction de la phase de Jupiter $x = x_5$	64
4.3	Section de Poincaré de l'application de Halley	66
5.1	Courbes de vitesse de rotation de la matière dans les galaxies UGC 2885 et NGC 2403	67
5.2	Section efficace de capture de matière noire par le Système solaire.	70
5.3	Évolution du nombre de particules de matière noire capturées par le Système solaire.	72
5.4	Densité radiale $\rho(r) = dN/dr$ de matière noire capturée.	74
5.5	Densité de matière noire dans le Système solaire	76
5.6	Facteur d'accroissement global de la densité de matière noire.	79
5.7	Facteur d'accroissement global de la densité de matière noire ζ_g en fonction de u/v_2 et J_0	81
6.1	Ultima Thulé par la sonde New Horizons.	83
6.2	Images et dimensions approximatives des noyaux cométaires de 1P/Halley, 19P/Borrelly, 67P/Churyumov-Gerasimenko, et 103P/Hartley.	84
6.3	Modélisation d'un petit corps par un système binaire de contact	85
6.4	Contours de la fonction $W_1(\omega, q)/W_2(\omega, q)$ en fonction de ω et q	88
6.5	Section de Poincaré de la dynamique orbitale de Dactyl, satellite de Ida.	90
6.6	Diagramme de stabilité pour $\mu = 1/2$ et $\omega/\omega_0 = 0.068, 0.4$, et 1	92
6.7	Zone chaotique centrale autour d'un petit corps en rotation	93
6.8	Diagramme de stabilité orbitale autour de 243-Ida.	95
6.9	Diagrammes de stabilité orbitale autour de quatre noyaux cométaires.	98
6.10	Étendue de la zone chaotique centrale autour des noyaux cométaires en fonction de la fréquence de rotation ω	100
6.11	Diagramme de stabilité orbitale autour du noyau cométaire de 1P/Halley.	101

Figures de la partie III

7.1	Exemple d'un réseau complexe orienté	122
8.1	Recouvrement des classements WRWU et ARWU	135
8.2	Distribution des universités sur le plan PageRank–CheiRank (K_U, K_U^*)	136
8.3	Distribution géographique des universités présentes dans les top 100 PageRank des 24 éditions Wikipédia	137
8.4	Distribution géographique des universités présentes dans les top 100 CheiRank des 24 éditions Wikipédia	137
8.5	Distribution géographique des universités présentes dans le top 100 du classement WPRWU	137

8.6	Distribution géographique des universités présentes dans le top 100 du classement ARWU	137
8.7	Distributions par pays et par nombre d'habitants des universités des top 100 WPRWU et ARWU	138
8.8	Réseau des cultures construit à partir des tops 100 des classements PageRank des universités dans les 24 éditions Wikipédia	139
8.9	Matrices G_{rr} et G_{qrd} associées au top 20 du classement ENWRWU	141
8.10	Réseau réduit des universités construit à partir du top 20 des classements ENWRWU et FRWRWU	142
8.11	Réseau réduit du top 20 des universités des classements DEWRWU et RUWRWU	143
8.12	Matrice de Google réduite G_R , et trois autres composantes matricielles G_{qrd} , G_{rr} , et $G_{rr} + G_{qrd}$, toutes associées au sous réseau d'articles consacrés aux pays et aux maladies infectieuses dans l'édition Wikipédia de mai 2017	147
8.13	Réseau réduit des maladies infectieuses	148
8.14	Sensibilité PageRank des articles consacrés aux pays vis-à-vis de l'article consacré à la tuberculose et de l'article consacré au sida	150
9.1	Chemin de signalisation AKT-mTOR reconstruit en utilisant la base de donnée SIGNOR et en inférant des connections indirectes grâce à l'approche Googlomics	154
10.1	Réseau réduit des importations et des exportations de pétrole entre les pays de l'UE et la Russie et l'Arabie Saoudite en 2016	158
10.2	Sensibilité, au sens du PageRank et CheiRank, de la balance commerciale des pays de l'UE à l'augmentation du prix du pétrole russe, saoudien, et américain	160

Liste des tableaux

Tables de la partie I

- 2.1 Paramètres physiques pour différents noyaux correspondant à $\omega_g/d = 10$ dans nos simulations 30

Tables de la partie II

- 4.1 Éléments orbitaux de l'orbite osculatrice de 1P/Halley calculés lors de son passage au périhélie le 9 février 1986 63
- 6.1 Données observationnelles pour cinq noyaux cométaires bilobés. 97
- 6.2 Caractéristiques des zones chaotiques entourant les noyaux cométaires 103

Tables de la partie III

- 8.1 Nombre N d'articles dans les 24 éditions Wikipédia extraites en février 2013 . 132
- 8.2 Nombre N d'articles dans les 24 éditions Wikipédia extraites en mai 2017 . . . 132
- 8.3 Les dix premières universités du classement Wikipédia élaboré avec l'algorithme PageRank 134
- 8.4 Les dix premières universités du classement Wikipédia élaboré avec l'algorithme CheiRank 134
- 8.5 Les dix premières universités du classement ARWU en 2013 134

Avant-propos

Ce mémoire présente certains travaux réalisés durant mes années de post-doctorat (2003-2005) au département de physique de la matière condensée de Ames Laboratory dans l'Iowa, et au laboratoire de physique théorique de Toulouse, ainsi que certains travaux réalisés dans le groupe de physique théorique de l'Institut UTINAM à l'Université de Franche-Comté où je suis en poste depuis 2005.

Au travers de ces travaux, plusieurs thèmes de recherche, qui à première vue peuvent apparaître éloignés, vont être abordés : la décohérence des états d'un ordinateur quantique, le chaos dans le Système solaire et la Galaxie, et les réseaux complexes analysés via la matrice de Google. Néanmoins, les premier et le deuxième thèmes partagent la notion de chaos, quantique dans le cas des ordinateurs quantiques, et classique dans le cas de l'astronomie. Les trois thèmes font appel à des processus stochastiques que l'on peut décrire, pour les premier et troisième thèmes, en terme d'opérateurs matriciels. Même si ces thèmes de recherche sont éloignés, ils peuvent être reliés deux à deux via certaines méthodes et certains concepts mathématiques employés pour l'étude des systèmes complexes classiques et quantiques.

J'ai effectué ma thèse de doctorat (1998-2001) au laboratoire de physique théorique de Toulouse (UMR CNRS 5152) sous la direction de Klaus Frahm et de Dima Shepelyansky. Durant ces trois années, j'ai étudié les effets de l'interaction et du désordre sur la localisation/délocalisation de particules à deux et trois dimensions. J'ai en particulier étudié le rôle du désordre dans la localisation de paires de Cooper et mis en évidence une phase où les particules en interaction attractive sont localisées par paires. Après ces années de doctorat, j'ai intégré le groupe de Pedro Sacramento au centre de physique des interactions fondamentales de l'Institut Supérieur Technique de Lisbonne. J'y ai étudié les effets conjugués du désordre et du champ magnétique sur les propriétés des quasi-particules véhiculant la supraconductivité. J'ai ensuite effectué un post-doctorat dans le groupe de Bruce Harmon et Slava Dobrovitski à Ames Laboratory, l'un des dix laboratoires nationaux du département à l'énergie des États-Unis. J'y ai étudié la décohérence d'un système quantique induit par un bain de spins-1/2. Nous avons, en particulier, mis en évidence la différence existant entre la décohérence induite par un bain quantique régulier et celle induite par un bain quantique chaotique. Je suis ensuite revenu au laboratoire de physique théorique de Toulouse pour étudier la fusion des registres, induite par le chaos quantique, dans le hardware d'un ordinateur quantique composé d'un réseau de noyaux de spins-1/2 individuellement adressables par un champ magnétique. En parallèle de ces travaux de post-doctorat, j'ai également développé avec des collaborateurs messins, Alain Bérard, Yves Grandati, et Hervé Mohrbach, des travaux généralisant la dérivation des équations de Maxwell par Feynman et permettant de restaurer les symétries d'algèbre angulaire, telles que les algèbres $so(3)$ et de Lorentz, habituellement brisées en présence d'un champ magnétique. Le prix à payer de cette restauration est l'apparition d'un dipôle magnétique de

Dirac. Nous avons appliqué nos résultats au gravitoélectromagnétisme et donné une condition sur la masse des dyons.

En 2005, j'ai été recruté à Besançon en tant que maître de conférences de l'Université de Franche-Comté. J'ai alors participé aux discussions concernant l'organisation de ce qui est actuellement l'Institut UTINAM¹ (UMR CNRS 6213), créé en 2007, en fusionnant deux UMR CNRS de physique et d'astrophysique, et une unité d'accueil de chimie. J'ai alors siégé en tant que membre élu au conseil scientifique de l'Institut UTINAM. Parallèlement, je me suis pleinement investi dans l'organisation de l'enseignement de la physique à Besançon, en étant élu dès 2008 au bureau du département de physique, puis en prenant la direction du département de physique de 2011 à 2016. J'ai également été responsable pédagogique de la troisième année de licence de physique et de physique-chimie de 2010 à 2015.

Peu après mon recrutement à Besançon, avec Remo Giust de l'Institut Femto-st (UMR CNRS 6174) et Jean-Marie Vigoureux de l'Institut UTINAM, nous avons étudié la loi de composition de plusieurs polariseurs, qu'il soient basés sur l'absorption anisotrope de la lumière ou bien sur la réflexion totale de celle-ci à l'interface d'un milieu biréfringent. Contrairement à ce qui était admis, nous avons montré que, pendant le processus de polarisation de l'onde lumineuse, la polarisation de l'onde ne suit pas forcément une géodésique sur la sphère de Poincaré. Également, en utilisant une analogie entre la polarisation de la lumière et la relativité restreinte, nous avons montré que l'action successive de plusieurs polariseurs sur la polarisation d'une onde lumineuse est équivalente à l'action d'un unique polariseur suivi d'une rotation pouvant être accomplie par un matériau optiquement actif. En fait, la loi de composition des polariseurs se trouve être similaire à la loi de composition des vitesses non colinéaires en relativité restreinte. L'équivalent de l'angle de Wigner en relativité, lié ici à la phase géométrique de Pancharatnam, peut alors être utilisé pour quantifier la qualité de la loi de composition de plusieurs polariseurs. J'ai également participé aux travaux de David Viennot de l'Institut UTINAM concernant la définition d'une phase géométrique pour les systèmes quantiques ouverts basée sur les C^* -algèbres.

En 2012, j'ai été élu membre du conseil d'administration et membre du conseil scientifique du nouvellement créé OSU THETA² (UMS CNRS 3245) étendant le périmètre de l'Observatoire de Besançon aux sciences de la Terre et fédérant plusieurs laboratoires de la région Bourgogne Franche-Comté dont l'Institut UTINAM. J'ai, à cette époque, initié des travaux de recherche sur le chaos dynamique dans le Système solaire et la Galaxie. Notamment, avec Dima Shepelyansky, nous avons mis en évidence un processus de capture chaotique de la matière noire par les systèmes binaires. Nous avons pu alors calculer la masse de matière noire capturée par le Système solaire depuis sa création. L'utilisation de l'application symplectique de Kepler permet, à la fois d'estimer analytiquement le bord du chaos, via une linéarisation donnant l'application standard de Chirikov, et de simuler un très grand nombre de particules diffusées par un système binaire. Ce nombre est supérieur, de plusieurs ordres de grandeur, au nombre de particules pouvant, pour le même problème, être simulées en intégrant directement les équations de Newton. Ces travaux ont donné lieu à une thèse de doctorat *Chaos dynamique dans le problème à trois corps restreint* défendue en novembre 2015 par Guillaume

1. UTINAM : Univers, Temps-fréquence, Interfaces, Nanostructures, Atmosphère et environnement, Molécules

2. OSU THETA : Observatoire des Sciences de l'Univers Terre-Homme-Environnement-Temps-Astrophysique.

Rollin. Dans ce travail de thèse, avec Guillaume, nous avons également étudié, de manière précise, la dynamique chaotique de la comète de Halley, et nous avons mis en évidence l'existence d'un répulseur étrange formé par les particules ne s'échappant pas des abords d'un système binaire. Ce répulseur étrange possède une forme et une dimension fractale similaires à celles des galaxies spirales.

Avec Ivan Shevchenko de l'Observatoire de Saint-Pétersbourg de l'académie des sciences de Russie, nous avons étudié l'environnement orbital des petits corps irréguliers du Système solaire. Ces très nombreux petits corps, noyaux cométaires, astéroïdes, objets transneptuniens, objets de la ceinture de Kuiper, etc, ont des formes irrégulières et bon nombre d'entre eux sont assimilables à des systèmes binaires de contact. La généralisation de l'application de Kepler permet de prendre en compte la vitesse de rotation non képlérienne de ces petits objets et permet d'estimer analytiquement les zones orbitales chaotiques (non stables) aux alentours de ceux-ci. Nous avons mis en évidence un processus d'auto-nettoyage de la zone chaotique circumbinaire qui est d'autant plus efficace que l'objet irrégulier, par exemple, un noyau cométaire ou un astéroïde, opère une rotation lente autour de son axe. Les différents travaux ayant trait à l'astronomie et l'astrophysique ont été financés par le Soutien à la Recherche de l'OSU THETA (4 projets financés en 2012, 2014, 2016 et 2018). En 2016, nous avons organisé, avec Ivan Shevchenko et Dima Shepelyansky, un workshop *Dynamics and chaos in astronomy and physics* réunissant des physiciens théoriciens et des spécialistes des petits corps du Système solaire.

Parallèlement, aux recherches menées en astronomie et astrophysique, j'ai contribué à développer l'analyse des réseaux complexes à l'aide de la matrice de Google et de la matrice de Google réduite. En 2015, j'ai proposé avec Dima Shepelyansky, le Wikipedia Ranking of World Universities (WRWU). Ce classement mondial des universités selon Wikipédia est obtenu en sondant, à l'aide de l'algorithme PageRank, la structure du réseau que forme les articles de Wikipédia reliés entre eux par les hyperliens intra-Wikipédia. Ce classement a été effectué pour 24 éditions représentant environ 60% des articles contenus dans Wikipédia, toutes éditions confondues, et représentant en terme de langues parlées environ 60% de la population mondiale. Un interclassement de ces 24 palmarès donne un classement mondial prenant en compte, sur un même pied d'égalité, les différentes cultures encodées dans les différentes éditions linguistiques de Wikipédia. Ce classement global WRWU est similaire au classement dit de Shanghai, le Academic Ranking of World Universities (ARWU), puisque 9 (60) sur 10 (100) des universités des tops 10 (100) des deux classements, WRWU et ARWU, sont identiques. Notre classement, bien que ne faisant appel à aucun critère comptable, comme par exemple le nombre de prix Nobel dans une université, ou le nombre de publications dans Nature, mesure effectivement l'excellence académique des universités comme le fait le classement de Shanghai. Ce nouveau classement complémentaire de ceux déjà existants, incorporant une mesure de l'influence mondiale à long terme de chacune des universités, a suscité un certain intérêt médiatique. Nous avons été lauréats du défi MASTODONS 2016 de la mission interdisciplinarité du CNRS avec le projet *ApliGoogle : Application of Google matrix to directed networks and Big Data* porté par le laboratoire de physique théorique de Toulouse, l'Institut UTINAM, l'Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, et l'Institut Curie. Ce projet a, entre autres, permis d'initier une collaboration avec Andrei Zinovyev du groupe de biologie computationnelle de l'Institut Curie visant à étudier les réseaux d'interactions causales entre les dizaines de milliers de protéines du corps humain. Nous avons développé une méthode bap-

tisée, *Googlomics*, permettant notamment de quantifier le recâblage du réseau de protéines survenant lors de la cancérogenèse. En 2017, j'ai été lauréat de l'appel à projet recherche de la région Bourgogne Franche-Comté avec le projet *APEX : Analyse Physique des résEaux complexes* (2017-2020). Ce projet, regroupant les physiciens du groupe PhAs³ de l'Institut UTINAM, m'a permis, entre autres, de financer la thèse de Célestin Coquidé, *Analyse physique des matrices de Google associées aux réseaux complexes réels*, de recruter Guillaume Rollin en tant qu'ingénieur de recherche, et de financer un projet artistique (en cours de finalisation) avec les artistes de disnovation.org. L'année suivante en 2018, j'ai été lauréat de l'appel à projet I-SITE (ANR-15-IDEX-0003) de l'Université Bourgogne Franche-Comté avec le projet *GNETWORKS : Google matrix analysis of real complex networks* (2018-2021). À cette même période, j'ai été accueilli en délégation par le CNRS (1 an à mi-temps). Ces deux projets, APEX et GNETWORKS, m'ont permis de former localement un petit groupe de recherche autour de l'analyse des réseaux complexes. L'analyse des réseaux d'articles Wikipédia permet d'extraire une information pertinente concernant divers domaines des activités humaines comme par exemple l'influence mondiale des universités, des compagnies pharmaceutiques, ou même des maladies infectieuses. La construction de la matrice de Google réduite permet en plus d'appréhender les interactions cachées entre plusieurs nœuds du réseau, comme par exemple entre deux pays, deux maladies infectieuses, ou même entre une maladie infectieuse et un pays. Les mêmes méthodes ont été utilisées, pour l'analyse des réseaux d'interactions causales entre les protéines afin de déceler des voies de signalisation cachées associées à des fonctions biologiques bien connues, pour l'analyse des réseaux du commerce international permettant de mettre en exergue les dépendances économiques directes et indirectes entre les différents pays du globe, et pour l'analyse des réseaux des transactions bitcoin pour lesquels nous avons étudié un modèle de propagation de crise. J'ai été invité à présenter ces différents travaux à l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) lors de la conférence *Google matrix : fundamentals, applications and beyond* organisée dans le cadre des 60 ans de l'IHES.

Ce mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches est organisé de la façon suivante. Trois parties sont consacrées à la «[Décohérence et ordinateur quantique](#)», à la «[Dynamique chaotique de matière \(noire\) autour des systèmes binaires](#)», et à l'«[Analyse de réseaux complexes](#)». Ces trois parties sont totalement indépendantes et j'invite donc le lecteur intéressé par l'une de ces parties en particulier à s'y diriger directement.

Pour les membres du jury, une annexe, présentant un rapport d'activité synthétique, est jointe à ce mémoire. Je remercie très sincèrement les rapporteurs Pierre Borgnat, Bertrand Georgeot, et Philippe Jacquod, et les examinateurs Klaus Frahm, Dima Shepelyansky, et Ivan Shevchenko, qui m'ont fait l'honneur et l'amitié d'avoir accepté de participer au jury de mon Habilitation à Diriger des Recherches.

José Lages, été 2019, *Labarthe-Inard,*
Bidart,
Besançon

3. PhAs : Physique théorique et Astrophysique.

Première partie

Décohérence et ordinateur quantique

Table des matières

Présentation	5
1 Décohérence quantique induite par un bain de spins	7
1.1 Introduction	7
1.2 Modèle d'interaction système central - bain	9
1.2.1 Système central statique – traitement semi-classique	10
1.2.2 Validité du traitement semi-classique	11
1.3 Évolution temporelle du système central : cadre général	13
1.4 Décohérence induite par un bain chaotique versus régulier : atténuation des oscillations à court terme	16
1.4.1 Dépendance du processus de décohérence vis-à-vis de la chaoticité du bain	16
1.4.2 Dépendance du processus de décohérence vis-à-vis du couplage système - bain et comparaison avec l'atténuation de l'écho de Loschmidt	19
1.5 Évolution à long terme du système central / états pointeurs	22
1.5.1 Décohérence à long terme du système central	22
1.5.2 Impact de la chaoticité du bain sur les états pointeurs du système central	24
1.6 Conclusion	25
2 Supression du chaos quantique dans un hardware quantique	27
2.1 Introduction	27
2.2 Description du modèle d'ordinateur quantique	28
2.3 Résultats numériques	31
2.4 Conclusion	39
Bibliographie	41

Présentation

La compréhension du phénomène de décohérence est primordiale pour tous les domaines de la physique basés sur les lois quantiques, et en particulier pour le domaine de l'information quantique. Un système quantique sur lequel on aimerait pouvoir mesurer une observable est inévitablement plongé dans un environnement (ou bain). Un système réel n'est jamais totalement isolé, il y a toujours une interaction résiduelle entre les degrés de liberté du système central à étudier et les innombrables degrés de liberté de l'environnement. C'est cette interaction résiduelle qui engendre la décohérence et qui sélectionne les états quantiques accessibles à la mesure.

L'ordinateur quantique surpasse son alter ego classique en utilisant les propriétés quantiques de ses constituants fondamentaux : les qubits. Un grand nombre de propositions expérimentales permettent de penser qu'un tel ordinateur accroîtra considérablement la puissance de calcul par rapport à nos machines actuelles et de communiquer sans risque sur de longues distances grâce à la cryptographie quantique.

La décohérence induite par l'environnement de l'ordinateur quantique est une première source d'inopérabilité de celui-ci. En effet, pour fonctionner correctement, les états d'un ordinateur quantique doivent conserver leur cohérence tout au long du calcul. Cependant, même en le supposant isolé de son environnement, une autre source d'inopérabilité de l'ordinateur quantique provient du désordre inhérent au système, à savoir les imperfections du couplage entre les qubits internes ou les imperfections dans l'adressage des qubits. Ces imperfections peuvent engendrer l'établissement d'un régime de chaos quantique au niveau des registres quantiques et mener à la *fusion* de ceux-ci.

Nous allons, ci-après, présenter deux travaux étudiant ces deux sources d'inopérabilités d'un ordinateur quantique.

Le premier de ces travaux (Lages et al., [2005](#)), présenté au Chapitre [1](#), étudie numériquement la décohérence d'un système central, composé de deux spins, induite par un bain composé d'un grand nombre de spins-1/2. En ajustant finement les paramètres du système, le régime dynamique du bain peut opérer une transition entre un régime de chaos quantique et un régime régulier, tout en conservant toutes les autres caractéristiques dynamiques intactes. Nous montrons explicitement que pour un bain à plusieurs corps, l'émergence du chaos quantique mène à une décohérence manifestement plus rapide et plus forte en comparaison avec un bain équivalent non chaotique. De plus, les éléments non-diagonaux de la matrice densité, l'entropie linéaire, et la fidélité du système central s'atténuent de façon différente suivant que le bain est chaotique ou non chaotique. Ainsi, la connaissance seule des paramètres basiques du bain, à savoir l'intensité de l'interaction système-bain, et la densité spectrale des états du bain n'est pas toujours suffisante, et une connaissance plus détaillée de la dynamique du bain est nécessaire afin d'appréhender correctement le processus de décohérence.

Le second travail (Lages et Shepelyansky, [2006](#)), présenté au Chapitre [2](#), présente une étude numérique et analytique d'un ordinateur quantique proposé par le groupe de Yamamoto (Ladd et al., [2002](#)). Nous déterminons les régimes stables et chaotiques du hardware de cet ordinateur quantique en fonction du gradient de champ magnétique nécessaire à l'adressage des qubits et en fonction des interactions dipôle-dipôle entre les qubits formant un réseau à maille carrée. Nous montrons qu'un fort gradient de champ magnétique permet de supprimer le chaos quantique et d'éviter la fusion des registres quantiques.

Chapitre 1

Décohérence quantique induite par un bain de spins

1.1 Introduction

Les systèmes physiques réels ne sont jamais isolés. L'interaction d'un système quantique avec son environnement mène au phénomène de décohérence : un état pur initial devient rapidement une mixture de plusieurs états (Joos et al., 2003 ; von Neumann, 1955). Les expériences modernes fournissent beaucoup d'informations concernant la dynamique de la décohérence d'un ou plusieurs ions (Myatt et al., 2000), de paires de Cooper (Pashkin et al., 2003), ou de spins (Mamin et al., 2003), et nécessite une théorie globale permettant une meilleure compréhension. La décohérence est aussi un obstacle majeur à la conception d'un ordinateur quantique (Nielsen et Chuang, 2000). L'interaction d'un ordinateur quantique avec un environnement mène à la génération d'erreurs de calculs et une théorie adéquate permettant de contrôler ce processus est nécessaire.

La décohérence est un phénomène quantique à N -corps, et sa description détaillée est un problème ouvert actuel. De nombreuses approches théoriques ne considèrent pas l'environnement, approximant tout au plus son influence par des opérateurs, déterministes ou stochastiques, choisis de manière ad hoc, et ne retenant que des informations basiques : l'intensité de l'interaction système - bain, les énergies ou temps caractéristiques du bain, ... (Gardiner et Zoller, 2004). De telles méthodes fonctionnent bien pour certains problèmes, cependant de nombreuses situations requièrent un traitement détaillé de la dynamique interne du bain. Récemment, le rôle joué par le chaos quantique (Haake, 2001) dans la processus de décohérence est devenu un sujet de débat (Alicki, 2002 ; Cerruti et Tomsovic, 2002 ; Cucchiatti et al., 2002 ; Jacquod, 2004 ; Jacquod, Adagideli et Beenakker, 2002 ; Jacquod, Silvestrov et Beenakker, 2001 ; Jalabert et Pastawski, 2001 ; Jordan et Srednicki, 2001 ; Karkuszewski, Jarzynski et Zurek, 2002 ; Poulin et al., 2004 ; Prosen et Znidaric, 2002 ; Wang et Li, 2002 ; Wisniacki, 2003 ; Znidaric et Prosen, 2003 ; Zurek, 2001). Une des hypothèses suggère que le bain chaotique, i.e., un bain ne possédant que quelques intégrales du mouvement triviales, induit une plus forte décohérence (Zurek, 2001) qu'un bain possédant un jeu complet d'intégrales du mouvement. Dans cette hypothèse, le système central est remplacé par une perturbation statique agissant sur le bain. En général, les trajectoires semi-classiques du bain chaotique divergent de manière exponentielle sous une telle perturbation, et cela avec une vitesse gou-

vernée par les exposants de Lyapunov du bain, tandis que pour un bain régulier la divergence est plus lente. Cependant, d'autres régimes de la dynamique du bain sont aussi possibles, et le taux de décohérence dépend spécifiquement du régime dynamique. Par exemple, lorsque l'interaction entre le système et le bain devient extrêmement faible, de telle sorte que la théorie des perturbations est utilisable, il apparaît que le bain régulier conduit à une décohérence plus rapide que celle induite par un bain chaotique (Alicki, 2002; Prosen et Znidaric, 2002). Jusqu'à présent, de nombreux régimes dynamiques permettant de confronter un bain chaotique à un bain régulier ont été étudiés (Cerruti et Tomsovic, 2002; Cucchietti et al., 2002; Jacquod, 2004; Jacquod, Adagideli et Beenakker, 2002; Jacquod, Silvestrov et Beenakker, 2001; Jalabert et Pastawski, 2001; Jordan et Srednicki, 2001; Karkuszewski, Jarzynski et Zurek, 2002; Poulin et al., 2004; Wang et Li, 2002; Wisniacki, 2003; Znidaric et Prosen, 2003), et de nombreux résultats intéressants sur le phénomène de décohérence ont été obtenus. Cependant, l'approche basique, i.e., le remplacement d'un système central réaliste par une perturbation statique agissant sur le bain, n'est valide que dans les cas les plus simples. Même dans des situations légèrement plus complexes, il apparaît que le résultat dépend fortement du choix particulier de l'opérateur de perturbation (Emerson et al., 2002). De plus, la majeure partie des travaux cités (Cerruti et Tomsovic, 2002; Cucchietti et al., 2002; Jacquod, 2004; Jacquod, Adagideli et Beenakker, 2002; Jacquod, Silvestrov et Beenakker, 2001; Jalabert et Pastawski, 2001; Jordan et Srednicki, 2001; Karkuszewski, Jarzynski et Zurek, 2002; Poulin et al., 2004; Wang et Li, 2002; Wisniacki, 2003; Znidaric et Prosen, 2003) traitent le bain de manière semi-classique comme une particule ou un unique grand spin régi par un hamiltonien intégrable ou chaotique.

Ainsi, une importante question reste en suspend : est-ce que l'établissement du chaos quantique est important pour les situations réalistes pour lesquelles le système central et le bain sont fondamentalement tout deux des objets quantiques à N -corps avec des dynamiques non triviales ? Dans les travaux présentés ici, nous répondons par l'affirmative à cette question. Contrairement aux travaux précédents, nous ne remplaçons pas le système central ou le bain par une perturbation statique.¹ Nous allons au-delà de la description semi-classique à 1-corps, en considérant de manière réaliste un environnement composé de nombreux spins-1/2 en interactions, qui n'ont par essence pas de limite classique bien définie. Il est assez surprenant et intéressant que même en l'absence d'analogie classique pour notre bain, les résultats que nous obtenons sont en accord avec les conclusions basées sur des considérations qualitatives semi-classiques. Pour le cas d'interactions système - bain non extrêmement faibles, i.e., dans le régime non-perturbatif, nous montrons que le bain chaotique induit une décohérence plus forte et plus rapide du système central qu'un bain équivalent non-chaotique. De surcroît, la manière dont décroît les éléments non-diagonaux de la matrice densité réduite du système central est différente pour les deux bains.

Le bain de spins-1/2 (spins nucléaires ou électroniques, impuretés magnétiques) constitue une source majeure de décohérence pour les expériences de résonance magnétique nucléaire (RMN), de décohérence du spin d'un atome de phosphore donneur dans du Silicium (de Sousa et Das Sarma, 2003a,b), de spins dans les molécules magnétiques (Garg, 1995; Prokofev et Stamp, 2000), et dans les points quantiques (Vrijen et al., 2000). Les défauts à deux niveaux d'énergie, régissant la décohérence dans les jonctions Josephson (Simmonds et al., 2004), peuvent être modélisés par des spins-1/2. Même un faible couplage entre les spins du bain

1. En fait, comme nous allons voir après, pour notre modèle un tel remplacement n'est pas possible.

peut rendre le bain chaotique, et il est important de comprendre comment cela affecte le processus de décohérence.

Ce chapitre est organisé comme suit : la section 1.2 décrit le modèle utilisé et présente comment, en ajustant les paramètres, la dynamique du bain peut continûment varier de chaotique à régulière. Nous présentons aussi une discussion qualitative concernant l'influence du chaos quantique sur le processus de décohérence. La section 1.3 présente les propriétés générales de l'évolution du système central ainsi que les deux stades de décohérence. À la section 1.4, nous considérons le premier stade de décohérence, la décroissance des oscillations à court terme, et nous démontrons comment l'évolution temporelle du système central est affectée par l'établissement du chaos dans le bain. La section 1.5 est consacrée à l'étude de l'impact du chaos sur l'évolution à long terme du système et sur les *états pointeurs*² du système. La section 1.6 sert à conclure ce chapitre.

1.2 Modèle d'interaction système central - bain

La dynamique d'un système soumis au processus de décohérence induit par un bain de spins est affectée par plusieurs facteurs. Afin d'isoler l'impact essentiellement dû au chaos, et de fournir une base de compréhension pour des études ultérieures plus complexes, nous avons besoin d'un simple, bien caractérisé, mais réaliste modèle. Ici, nous considérons un système central composé de deux spins-1/2, $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$, couplés de manière isotrope, où seul le spin $\vec{S}_1$ interagit avec l'environnement composé d'un grand nombre de spins-1/2, $\{\vec{I}_k\}_{k=1,\dots,N}$. Ainsi, le hamiltonien décrivant ce système composite, les deux spins centraux et le bain de spins, est

$$H = H_S + H_{S-B} + H_B = J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_1 \cdot \sum_{k=1}^N A_k \vec{I}_k + H_B \quad (1.1)$$

où $\{A_k\}_{k=1,\dots,N}$ sont les constantes de couplage système - bain, et où H_B est le hamiltonien régissant la dynamique interne du bain. Un tel modèle (1.1) est souvent utilisé dans la description de la relaxation croisée et de la double résonance en RMN (Abragam, 1961). Il a été utilisé pour étudier la destruction de l'effet Kondo par la décohérence (Katsnelson et al., 2003).

Il est important de noter que le hamiltonien du système central, H_S , et celui de l'interaction système - bain, H_{S-B} , sont tout deux invariants par rotation. Ainsi, le système central ne peut pas être, en principe, remplacé par une perturbation, qu'elle soit statique ou dynamique. Une telle perturbation, si elle était possible, serait linéaire en un ou plusieurs opérateurs de spin $\vec{I}_k$, i.e, la perturbation serait composée de termes $\vec{H}_k \cdot \vec{I}_k$, ce qui briserait l'invariance par symétrie de l'interaction système - bain.

Également, nous avons besoin d'un simple, bien caractérisé, mais réaliste modèle à N spins pour le bain, permettant de passer d'un régime chaotique à régulier sans toutefois affecter fortement les autres propriétés du bain. Un bon candidat satisfaisant ces conditions est le modèle de *verre de spins brisé*³ (Georgot et Shepelyansky, 1998) dont le hamiltonien est

$$H_B = \sum_{\langle k,l \rangle} \Gamma_{kl} I_k^x I_l^x + \sum_{k=1}^N h_k^z I_k^z + \sum_{k=1}^N h_k^x I_k^x \quad (1.2)$$

2. *Pointer states* en anglais.

3. *Spin glass shard* en anglais.

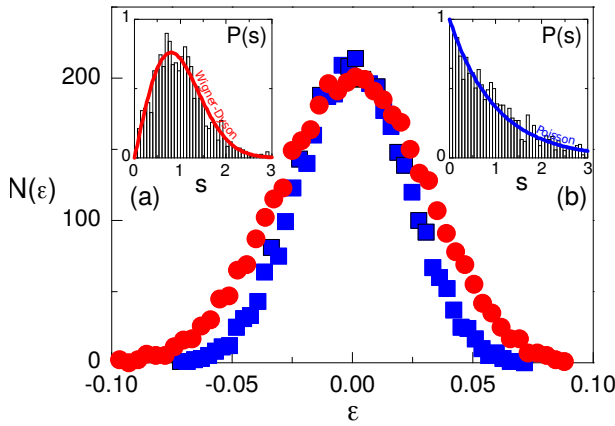


Figure 1.1 – Densité spectrale $N(\varepsilon)$ en fonction de l'énergie ε pour un bain régulier (■) avec $\Gamma_0 = 0.008$, et pour un bain chaotique (●) avec $\Gamma_0 = 0.04$. Tous les autres paramètres sont identiques pour les deux bains, $h_0 = 0.014$. Les encarts (a) et (b) montrent la distribution $P(s)$ des écarts de niveaux pour un bain chaotique (a) et pour un bain régulier (b). Les courbes épaisses décrivent la distribution de Wigner-Dyson (a) et la distribution de Poisson (b). Adaptée de Lages et al., 2005.

où les coefficients aléatoires $\{\Gamma_{kl}\}_{k,l=1,\dots,N}$ sont distribués dans l'intervalle $[-\Gamma_0, \Gamma_0]$ et où les coefficients aléatoires $\{h_k^z\}_{k=1,\dots,N}$ et $\{h_k^x\}_{k=1,\dots,N}$ sont distribués dans l'intervalle $[0, h_0]$. Les spins $\{\vec{I}_k\}_{k=1,\dots,N}$ sont placés sur un réseau bidimensionnel carré, et deux spins $\vec{I}_k$ et $\vec{I}_l$ sont couplés avec l'intensité Γ_{kl} si et seulement si ils sont plus proches voisins. Ce modèle décrit la transition entre un bain régulier et un bain chaotique de manière simple et claire, tout en permettant de contrôler la dynamique du bain (Georgeot et Shepelyansky, 1998). Pour Γ_0 faible, le bain est intégrable, et devient chaotique pour $\Gamma_0 > \Gamma_{\text{cr}} \propto h_0/(zN)$ où z est le nombre de voisins couplés par le terme $\Gamma_{kl} I_k^x I_l^x$. Pour des bains réels avec un nombre $N \sim 10^6$ ou plus de spins, l'établissement du chaos se fait à partir de couplages extrêmement faibles par rapport à h_0 . Cependant, l'établissement du chaos n'affecte que très faiblement les propriétés spectrales à grande échelle du bain, par exemple, la densité spectrale d'états, qui est régie presque complètement par les champs $\{h_k^x\}_{k=1,\dots,N}$ et $\{h_k^z\}_{k=1,\dots,N}$. Par exemple, la largeur W du spectre peut être estimée par $W^2 = (1/16) \sum (\Gamma_{kl})^2 + (1/4) \sum ((h_k^z)^2 + (h_k^x)^2)$, si bien que les contributions provenant des couplages $\Gamma_{kl} I_k^x I_l^x$ sont négligeables pour les bain réalistes avec un très grand nombre N de spins. Du fait de petits pré-facteurs, les contributions provenant des termes Γ_{kl} sont faibles dès $N = 12-16$. Nous avons vérifié les propriétés spectrales du bain en diagonalisant le hamiltonien (1.1), en gardant constante la valeur de h_0 et en variant Γ_0 . Le calcul de $P(s)$, la distribution des écarts de niveaux (Haake, 2001), montre clairement une transition d'une distribution de Wigner-Dyson pour un bain chaotique vers une distribution de Poisson pour un bain régulier (voir encarts (a) et (b) sur la Figure 1.1). Concomitamment, la densité spectrale n'est que faiblement sensible à cette transition pour $N = 12$: la largeur du spectre varie de $W = 0.048$ pour un bain régulier à $W = 0.060$ pour un bain chaotique.

1.2.1 Système central statique – traitement semi-classique

Notre but est de comprendre comment l'établissement du chaos au sein du bain influence le processus de décohérence. Rappelons des notions basiques sur le processus de la décohérence et sur la compréhension qualitative du rôle joué par la dynamique interne du bain d'après Zurek, 2001. Par simplicité, considérons un système central statique couplé à un bain, de telle sorte que le hamiltonien du système composite, système central-bain, soit $H = gQ \otimes P + 1 \otimes H_B$. Ici, Q et P sont des opérateurs agissant le premier sur le système, le deuxième sur le bain, g est l'intensité du couplage système central-bain, et H_B est le hamiltonien du bain déterminant

si ce dernier est chaotique ou régulier. Initialement, l'état quantique du système central est une superposition d'états $\sum_{i=1}^n \alpha_i |q_i\rangle$, où les $\{|q_i\rangle\}_{i=1,\dots,n}$ sont les vecteurs propres de l'opérateur Q , i.e., $\{Q|q_i\rangle = q_i|q_i\rangle\}_{i=1,\dots,n}$, et l'état du bain est $|\chi_0\rangle$. L'état initial du système composite

$$|\Psi(0)\rangle = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i |q_i\rangle \right) \otimes |\chi_0\rangle \quad (1.3)$$

devient après évolution temporelle

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |q_i\rangle \otimes |\chi_i(t)\rangle \quad (1.4)$$

où $\{|\chi_i(t)\rangle = \exp(-iH_B t - igq_i P t) |\chi_0\rangle\}_{i=1,\dots,n}$. L'état du système est caractérisé par la matrice de densité réduite $\rho(t) = \text{Tr}_B |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$, et, en particulier, par les éléments non-diagonaux de la matrice de densité réduite $\{\rho_{ij}(t) = \langle q_i | \rho(t) | q_j \rangle\}_{i \neq j}$. Compte tenu du couplage système - bain, des corrélations sont établies entre les états du système et du bain, et les éléments non-diagonaux $\{\rho_{ij}(t) = \alpha_i \alpha_j \langle \chi_i(t) | \chi_j(t) \rangle\}_{i \neq j}$ sont déterminés par la dynamique du bain. Initialement, le bain se trouve dans un état bien déterminé, $\{|\chi_i(0)\rangle = |\chi_0\rangle, \forall i = 1, \dots, n\}$, mais au cours de l'évolution temporelle, ces états $\{|\chi_i(t)\rangle\}_{i=1,\dots,n}$ se différencient et le recouvrement entre ces états devient de plus en plus petit, de telle sorte que les valeurs des éléments $\{\rho_{ij}\}_{i \neq j}$ décroissent. Aux temps longs, lorsque ces éléments approchent zéro, la superposition initiale d'états du système central est devenue un mélange incohérent d'états $\{|q_i\rangle\}_{i=1,\dots,n}$.

Les taux de décroissance des recouvrements $\{\langle \chi_i(t) | \chi_j(t) \rangle\}_{i=1,\dots,n}$, liés par conséquent au temps de décohérence du système, est fortement affecté par la dynamique interne du bain. L'évolution temporelle du carré de la valeur absolue des recouvrements

$$\{O_{ij} = |\langle \chi_i(t) | \chi_j(t) \rangle|^2 = |\langle \chi_0 | \exp(iH_{ij}t) \exp(-iH_{ij}t + iV_{ij}t) | \chi_0 \rangle|^2\}_{i \neq j} \quad (1.5)$$

où $\{V_{ij} = g(q_i - q_j)P\}_{i \neq j}$, est un problème très connu en théorie du chaos quantique. La quantité $O_{ij}(t)$, appelée **l'écho de Loschmidt** (EdeL), décrit la réaction du système à une petite perturbation du hamiltonien au travers de l'évolution du recouvrement de deux paquets d'ondes $\chi_i(t)$ et $\chi_j(t)$ soumis à des hamiltonien légèrement différents. Si ces paquets d'ondes peuvent être considérés de manière quasi-classique alors leurs positions sont déterminées par les équations classiques du mouvement, et la distance entre les deux trajectoires classiques et chaotiques diverge de manière exponentielle avec un taux déterminé par l'exposant maximal de Lyapunov. Ainsi, on peut supposer que les recouvrements $O_{ij}(t)$ décroissent de manière exponentielle avec le temps pour un système chaotique, et de manière sous-exponentielle pour un système dont la dynamique est régulière. En conséquence, le processus de décohérence devrait être plus rapide pour un bain chaotique que pour un bain équivalent régulier.

1.2.2 Validité du traitement semi-classique

L'argumentaire semi-classique qui vient d'être exposé souffre de nombreuses faiblesses. Par exemple, la critique s'est focalisée sur le traitement simplifié de l'EdeL : la décroissance exponentielle déterminée par l'exposant de Lyapunov (le régime de Lyapunov) n'est qu'un régime

parmi d'autres de régimes de décroissance de l'EdeL (Cerruti et Tomsovic, 2002; Cucchiatti et al., 2002; Jacquod, 2004; Jacquod, Adagideli et Beenakker, 2002; Jacquod, Silvestrov et Beenakker, 2001; Jalabert et Pastawski, 2001; Jordan et Srednicki, 2001; Karkuszewski, Jarzynski et Zurek, 2002; Poulin et al., 2004; Prosen et Znidaric, 2002; Wang et Li, 2002; Wisniacki, 2003; Znidaric et Prosen, 2003). Pour de très faibles couplages, i.e., pour de très faibles perturbations $V = V_{12}$, la décroissance de l'EdeL peut être étudiée en utilisant la théorie des perturbations, et les résultats peuvent être généralisés pour inclure de nombreux cas de décohérence d'un système par un bain chaotique versus régulier. Une telle approche perturbative donne exactement le résultat opposé : le processus de décohérence est moins efficace lorsqu'il est induit par un bain chaotique que lorsqu'il est induit par un bain régulier. Les arguments *perturbatifs* sont faciles à comprendre d'un point de vue qualitatif : la décohérence est principalement déterminée par les excitations de basse énergie du bain, et pour les bains chaotiques, du fait de la répulsion des niveaux, la densité des excitations de basse énergie est bien plus faible que celles des bains réguliers (ceci car la distribution de Wigner-Dyson $P_{WD}(s)$ des écarts de niveaux s tend vers zéro lorsque s tend vers zéro, i.e., le nombre d'excitations de basse énergie dans un bain chaotique tend vers zéro, tandis que la distribution de Poisson $P_P(s)$ décrivant les bains réguliers donne un nombre fini d'excitations de basse énergie, $P_P(0) = 1$).

Le traitement simplifié de la décroissance de l'EdeL n'est pas le seul inconvénient de l'argumentaire semi-classique. Tout d'abord, la décohérence n'est pas uniquement quantifiée par la vitesse du processus mais aussi par la *force* de celui-ci, i.e., à quel point l'état final du système ayant subi le processus de décohérence⁴ diffère fortement des états propres du hamiltonien du système central. L'influence du chaos n'avait pas été étudiée dans ce contexte. Ensuite, un plus minutieux examen de l'argumentaire semi-classique révèle des problèmes plus sérieux :

1. les systèmes centraux réalistes sont rarement statiques (e.g., dans l'équation (1.1), le système central possède un hamiltonien interne non-nul, $J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$); si bien que la perturbation V_{ij} dépend usuellement du temps,
2. la décroissance de l'EdeL est, en général, non universelle, et dépend de la forme spécifique de la perturbation V_{ij} , si bien qu'en choisissant différents opérateurs P et Q , il est possible d'obtenir différentes conclusions s'excluant mutuellement (Emerson et al., 2002),
3. le traitement semi-classique ne peut pas s'appliquer à une large classe de bains constitués par des spins-1/2, qui n'ont pas de limite semi-classique bien définie, et dont l'interprétation du mouvement en terme de paquet d'ondes n'est pas possible,
4. plus important, pour la majorité des systèmes réalistes, le problème de la décohérence ne peut pas être réduit au problème de la décroissance de l'EdeL : e.g., le couplage système central-bain décrit par (1.1) ne peut pas être mis sous la forme $Q \otimes P$.⁵

Ainsi, afin de comprendre la décohérence dans des systèmes réalistes, nous devons aller au-delà du traitement semi-classique de la décroissance de l'EdeL⁶, et au-delà du traitement perturbatif, valide uniquement pour des couplages système - bain extrêmement faibles. Des

4. L'état final est appelé un *état pointeur*, voir une discussion plus détaillée à la section 1.3.

5. Voir aussi la discussion à la suite de (1.1).

6. Tout en gardant à l'esprit leur grande valeur heuristique.

études détaillées satisfaisant ces conditions et considérant des bains à N -corps n'avaient pas encore été menées et notre travail fournit une telle étude. Nous montrons qu'en dépit de sa formelle inapplicabilité aux bains de spins-1/2, le traitement semi-classique saisit de nombreux détails physiques du processus de décohérence.

1.3 Évolution temporelle du système central : cadre général

Nous supposons qu'initialement, à $t = 0$, le système central est dans un état singulet

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (1.6)$$

et que celui-ci est non corrélé avec le bain. Dans cet état singulet, les deux spins-1/2 sont maximalement intriqués, la connaissance de l'état d'un des deux spins nous renseigne directement sur l'état de l'autre spin. Nous supposons aussi que l'état initial du bain, $|\chi_0\rangle$, est une superposition de tous les états propres du bain avec des coefficients aléatoires. Cette configuration est valide en général pour un bain de spins nucléaires pour des températures de plus de quelques dizaines de Kelvin, ce qui est le cas de la majorité des situations réalistes intéressantes du point de vue expérimental. Nous étudions la décohérence en résolvant numériquement l'équation de Schrödinger dépendante du temps afin d'obtenir la fonction d'onde $|\Psi(t)\rangle$ du système composite, les deux spins centraux plus le bain, en utilisant les hamiltoniens (1.1) et (1.2). Nous utilisons le développement polynomial de Chebyshev de l'opérateur d'évolution afin de pouvoir travailler avec des espaces de Hilbert de grande dimension et afin d'étudier la dynamique du système à long terme (De Raedt et Dobrovitski, 2004 ; Dobrovitski et De Raedt, 2003). La validité des simulations sur les temps très longs est garantie par une méthode basée sur le développement polynomial de Chebyshev, pourvu qu'un nombre suffisamment important de termes du développement soient retenus pour décrire l'opérateur d'évolution. De plus, nous avons vérifié la validité des simulations directement en utilisant des méthodes standards (comparaison avec des modèles solubles exactement, et comparaison avec différentes simulations avec des paramètres de tolérance différents). Nous avons étudié des bains contenant jusqu'à $N = 16$ spins. Nos études montrent que l'évolution de la matrice de densité réduite ne change pas beaucoup au-delà de $N = 10$ spins. La plupart des résultats présentés ci-après sont obtenus pour $N = 12$ spins et les simulations avec $N = 16$, plus intensives du point de vue numérique, ont été utilisées pour vérifier les résultats les plus importants. Une large gamme de paramètres J , h_0 , Γ_0 , N , et différents jeux de paramètres $\{A_k\}_{k=1,\dots,N}$ ont été explorés, nous présentons ici les résultats les plus représentatifs. Dans la suite, l'énergie et le temps sont des quantités adimensionnées.

À $t = 0$, la matrice densité réduite du système central $\rho(t)$ décrit un état pur, et les seuls éléments non nuls sont les éléments diagonaux $\langle\uparrow\downarrow|\rho(0)|\uparrow\downarrow\rangle = \langle\downarrow\uparrow|\rho(0)|\downarrow\uparrow\rangle = 1/2$ et les éléments non-diagonaux $\langle\downarrow\uparrow|\rho(0)|\uparrow\downarrow\rangle = \langle\uparrow\downarrow|\rho(0)|\downarrow\uparrow\rangle = -1/2$. Du fait des interactions système - bain, les éléments de la matrice densité réduite $\rho(t)$ évolue avec le temps t . Leurs évolutions typiques sont montrées à la Figure 1.2. Deux étapes sont clairement observées. À la première étape, le bain induit une décohérence rapide du système central, et l'état du système central devient mixte. La parfaite corrélation initiale entre les états $|\downarrow\uparrow\rangle$ et $|\uparrow\downarrow\rangle$

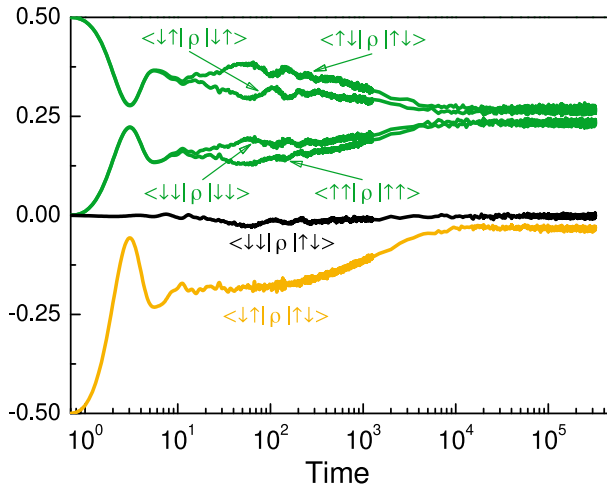


Figure 1.2 – Évolution temporelle des éléments de la matrice densité réduite $\rho(t)$ du système central pour un bain avec $\Gamma_0 = 0.04$ et $h_0 = 0.014$. Les dynamiques des éléments diagonaux $\langle \uparrow\uparrow | \rho(t) | \uparrow\uparrow \rangle$, $\langle \downarrow\downarrow | \rho(t) | \downarrow\downarrow \rangle$, $\langle \uparrow\downarrow | \rho(t) | \uparrow\downarrow \rangle$, $\langle \downarrow\uparrow | \rho(t) | \downarrow\uparrow \rangle$, (—), et des éléments non-diagonaux $\text{Re} \langle \downarrow\uparrow | \rho(t) | \uparrow\downarrow \rangle$, (—), $\text{Re} \langle \downarrow\downarrow | \rho(t) | \uparrow\uparrow \rangle$, (—), sont illustrées. L'énergie de couplage entre les deux spins centraux est $J = 0.1$ et le couplage entre le bain et le système central est caractérisé par $b = 1.37$. L'énergie et le temps sont ici des quantités adimensionnées. Adaptée de Lages et al., 2005.

est progressivement détruite, si bien que les éléments non-diagonaux $\langle \downarrow\uparrow | \rho(t) | \uparrow\downarrow \rangle$ oscillent rapidement et déclinent vers zéro. Le processus de décohérence est accompagné de l'excitation des états triplet du système, incluant les états $|\uparrow\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\downarrow\rangle$ initialement absents. Tous les éléments de $\rho(t)$ oscillent reflétant les oscillations quantiques entre état singulet et état triplet du système central. À la seconde étape, arrivant bien plus tard dans l'échelle de temps⁷, la thermalisation du système s'effectue avec une vitesse plus lente. Dans l'exemple montré à la Figure 1.2, le couplage système - bain est assez fort pour presque complètement détruire l'intrication entre les spins centraux (l'élément non-diagonal $\langle \downarrow\uparrow | \rho(t) | \uparrow\downarrow \rangle$ est presque nul à $t \rightarrow \infty$), et pour peupler de manière presque équivalente tous les niveaux du système central ($\langle \uparrow\uparrow | \rho(t) | \uparrow\uparrow \rangle \simeq \langle \uparrow\downarrow | \rho(t) | \uparrow\downarrow \rangle \simeq \langle \downarrow\uparrow | \rho(t) | \downarrow\uparrow \rangle \simeq \langle \downarrow\downarrow | \rho(t) | \downarrow\downarrow \rangle \simeq 1/4$ à $t \rightarrow \infty$). Tout au long de l'évolution temporelle du système les autres éléments non-diagonaux de la matrice densité réduite restent proches de zéro (voir par exemple l'élément $\langle \downarrow\downarrow | \rho(t) | \uparrow\uparrow \rangle$ à la Figure 1.2).

La perte de pureté de l'état du système peut être caractérisée par la déclin de l'entropie linéaire du système central, $\Omega(t) = \text{Tr} \rho^2(t)$. Si le système central est dans un état pur, la

7. On notera l'emploi de l'échelle logarithmique de temps à la Figure 1.2.

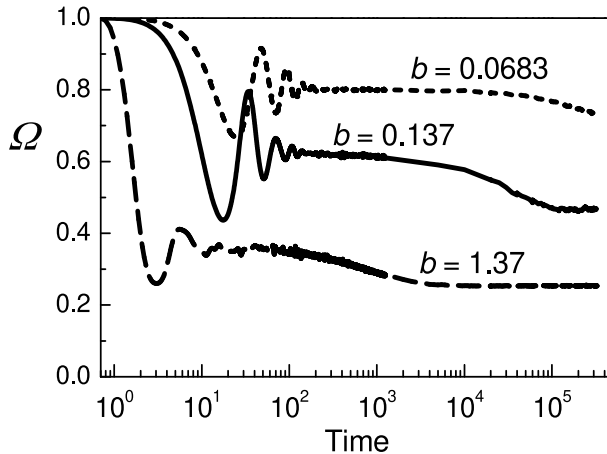


Figure 1.3 – Évolution temporelle de l'entropie linéaire Ω du système central pour différentes valeurs du couplage système central-bain $b = 1.37$, 0.137 et 0.0683 . Les paramètres du hamiltonien du bain sont les mêmes que ceux adoptés à la Figure 1.2 : $\Gamma_0 = 0.04$, $h_0 = 0.014$, et l'intensité du couplage entre les deux spins centraux est $J = 0.1$. D'après Lages et al., 2005.

matrice densité réduite ρ est idempotente, $\rho^2 = \rho$, et par conséquent $\Omega = 1$, tandis que pour un état mixte $\Omega < 1$. L'évolution temporelle, $\Omega(t)$, est montrée sur la Figure 1.3. Nous retrouvons les deux étapes précédentes : une décroissance avec oscillations pour $0 < t < 300$, suivie, après $t \approx 300$, d'une évolution très lente vers la saturation. L'évolution temporelle de Ω est montrée pour trois bains avec différentes intensités du couplage système central-bain. Comme montré plus loin, ce couplage peut être caractérisé par la quantité

$$b = \sqrt{\sum_{k=1}^N A_k^2}. \quad (1.7)$$

La vitesse de la décohérence s'accroît avec b , et l'entropie linéaire, Ω , sature à des temps plus courts pour des grands b . Aussi, la valeur de saturation de Ω pour $t \rightarrow \infty$ est plus petite pour les grands b , le système central est alors plus mélangé pour les forts couplages système - bain. La valeur minimale de Ω pour un système composé de deux spins-1/2 est 0.25 ; cette valeur est atteinte à $t \rightarrow \infty$ pour $b = 1.37$.

Différents états initiaux du système sont différemment affectés par la décohérence, et les états qui sont affectés le moins survivent à l'interaction avec le bain plus longtemps que les autres. Ainsi, à $t \rightarrow \infty$, n'importe quel état initial du système se transformera en un mélange de ces états les moins affectés, qui sont appelés états pointeurs. Pour le système central composé ici de deux spins, les états pointeurs sont facilement repérés en considérant la valeur de l'élément non-diagonal $\langle \downarrow\uparrow | \rho(t) | \uparrow\downarrow \rangle$ de la matrice densité dont la valeur initiale est $-1/2$. Cet élément de matrice va être important dans le reste de cet exposé, ainsi nous introduisons une notation spéciale pour sa partie réelle, $\rho_{12} = \text{Re} \langle \downarrow\uparrow | \rho(t) | \uparrow\downarrow \rangle$.⁸ Le terme d'interaction entre le système et le bain, $\vec{S}_1 \cdot \sum A_k \vec{I}_k$ dans (1.1), intrique le spin $\vec{S}_1$ avec le bain, détruisant ainsi les corrélations quantiques entre $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$. Si le couplage système - bain est fort, ces corrélations sont détruites complètement, si bien que les états pointeurs du système central sont les *états produit* $|\uparrow\downarrow\rangle$ et $|\downarrow\uparrow\rangle$, avec $\rho_{12} = 0$. Cependant, le hamiltonien interne du système central $J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ préserve la corrélation initiale singulet entre $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$, poussant ainsi la valeur de ρ_{12} vers $-1/2$. Pour de faibles interactions entre le système central et le bain, les états pointeurs sont les états propres du hamiltonien interne au système central (Paz et Zurek, 1999), i.e., l'état initial singulet sera l'état pointeur. La compétition entre ces deux tendances détermine alors la valeur *état pointeur* de ρ_{12} lorsque $t \rightarrow \infty$.

Afin d'être un peu plus quantitatif, nous notons que l'intensité du couplage interne du système est déterminé par J . Comment pouvons-nous quantifier l'interaction système - bain ? Nous montrons ici que la quantité pertinente est $b = \sqrt{\sum_{k=1}^N A_k^2}$. La Figure 1.4 montre les valeurs *état pointeur*, ρ_{12}^{pt} , de ρ_{12} obtenues à partir de simulations effectuées avec des tailles différentes pour le bain et des valeurs différentes de b (tout en gardant les autres paramètres du bain inchangés). Nous observons que tous les résultats dessinent la même courbe maîtresse, i.e., pour des paramètres internes du bain, Γ_0 et h_0 , fixés, la valeur de ρ_{12}^{pt} n'est déterminée que par le seul rapport J/b . La Figure 1.4 confirme les arguments qualitatifs exposés au paragraphe précédent : pour $J/b \ll 1$, i.e., pour un couplage système - bain fort, $\rho_{12}^{\text{pt}} = 0$, et pour $J/b \gg 1$,

8. Nous gardons cette notation pour rester fidèle à l'article original (Lages et al., 2005) même si elle peut prêter à confusion, en effet plus avant nous avons défini ρ_{ij} comme l'élément de matrice entre deux états i et j , ρ_{12} n'exprime ici que la partie réelle de l'élément de matrice densité correspondant à deux états "1" et "2", en l'occurrence $|\downarrow\uparrow\rangle$ et $|\uparrow\downarrow\rangle$.

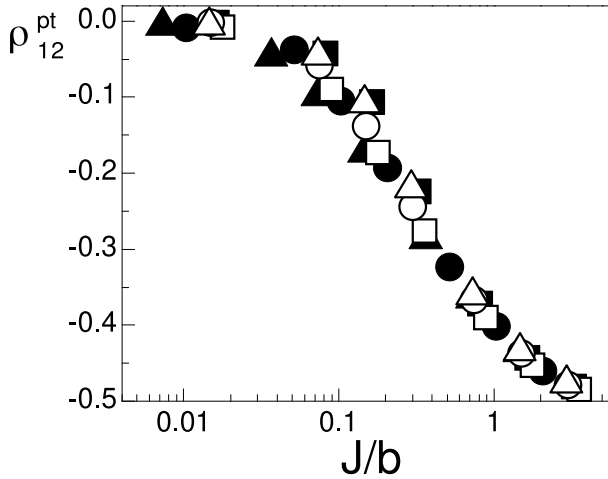


Figure 1.4 – Valeur état pointeur, ρ_{12}^{pt} , de l'élément non-diagonal, ρ_{12} , de la matrice densité réduite en fonction du rapport J/b pour $h_0 = 1/\sqrt{2}$ et $\Gamma_0 = 0.008$. Les résultats sont présentés pour différentes tailles N du bain et différentes intensités b du couplage système - bain : $N = 8$, $b = 0.518$ ($\square$), $N = 10$, $b = 0.562$ ($\circ$), $N = 12$, $b = 0.683$ ($\triangle$), $N = 12$, $b = 0.608$ ($\blacksquare$), $N = 12$, $b = 0.965$ ($\bullet$), $N = 12$, $b = 1.365$ ($\blacktriangle$). Tous les points sont distribués autour de la même courbe. D'après Lages et al., 2005.

i.e., pour les faibles couplages, $\rho_{12}^{\text{pt}} = -1/2$. Ainsi, la courbe $\rho_{12}^{\text{pt}}(J/b)$ fournit une information directe sur la force du processus de décohérence.

1.4 Décohérence induite par un bain chaotique versus régulier : atténuation des oscillations à court terme

1.4.1 Dépendance du processus de décohérence vis-à-vis de la chaoticité du bain

La différence évidente entre un bain chaotique et un bain régulier apparaît dès les temps courts. Pour $J \gg b$, la quantité $\rho_{12}(t)$ présente des oscillations s'atténuant lentement avec une fréquence de l'ordre de J , reflétant les oscillations quantiques du système central entre les états singulet et triplet. L'atténuation des oscillations de $\rho_{12}(t)$ est causée par la décohérence du système, et, par conséquent, elle permet de monitorer la dynamique du processus de décohérence. Nous comparons l'atténuation des oscillations pour des bains chaotiques et des bains réguliers en faisant varier le couplage interne du bain, Γ_0 , voir (1.2). L'apparition du chaos dans le bain, qui apparaît pour $\Gamma_0 > \Gamma_{\text{cr}}$, est vérifiée en calculant la distribution de l'espacement des niveaux, $P(s)$ (Haake, 2001). La distribution $P(s)$ se confond avec la distribution de Wigner-Dyson pour un bain chaotique et avec la distribution de Poisson pour un bain régulier. Nous avons également vérifié que les propriétés spectrales à grande échelle du bain restent sensiblement inchangées lorsque la dynamique du bain passe de régulière ($\Gamma_0 < \Gamma_{\text{cr}}$) à chaotique ($\Gamma_0 > \Gamma_{\text{cr}}$).

La Figure 1.5 montre clairement que, pour un couplage b modéré (voir plus loin pour les détails), l'atténuation de ces oscillations dépend fortement de la chaoticité du bain. Elle montre l'atténuation des oscillations pour deux bains : l'un, avec $\Gamma_0 = 0.04 > \Gamma_{\text{cr}} \simeq 0.013$, est chaotique (rouge), et l'autre, avec $\Gamma_0 = 0.008 < \Gamma_{\text{cr}} \simeq 0.013$, est régulier (bleu). La différence tant en forme que vitesse de l'atténuation est clairement visible. L'enveloppe des oscillations ρ_{12}^{env} pour le bain régulier semble suivre une décroissance gaussienne de la forme

$$\rho_{12}^{\text{env}} = \alpha + \beta \exp\left(-\left(\frac{t}{T_s}\right)^2\right) \quad (1.8)$$

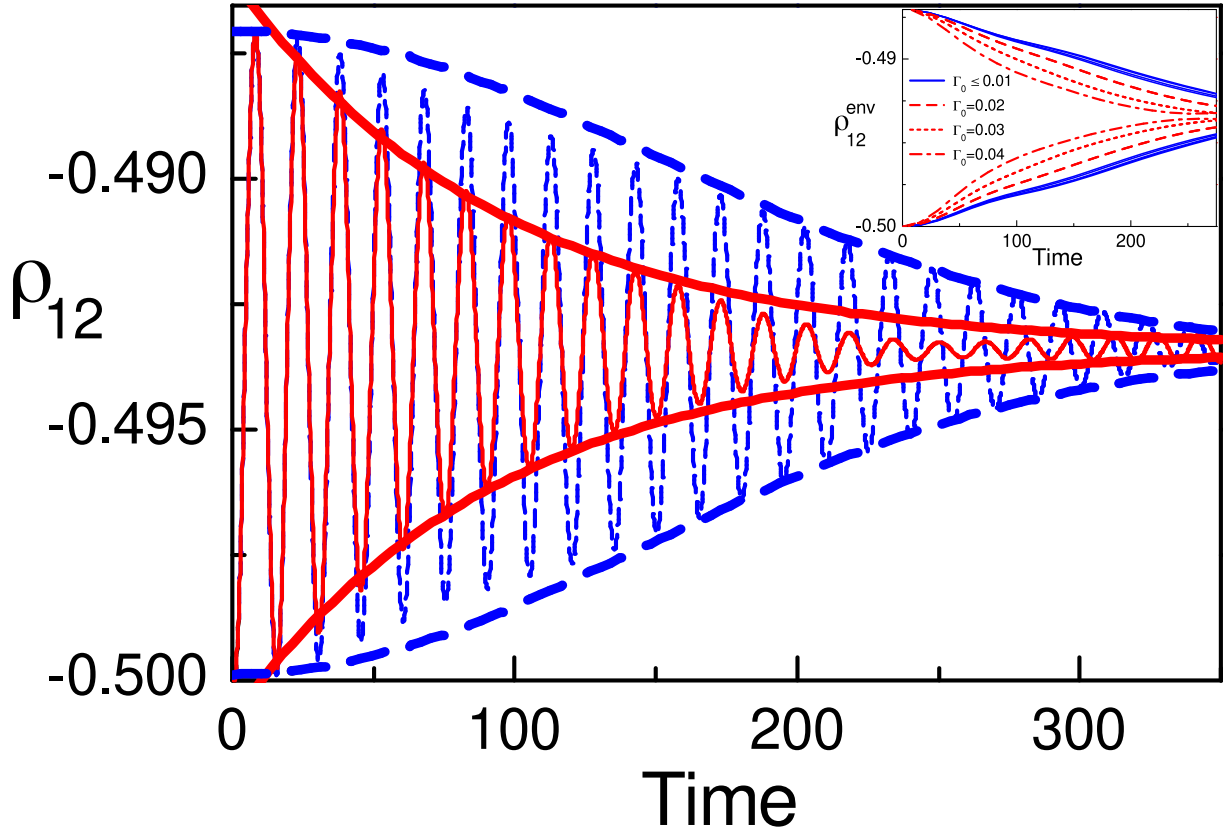


Figure 1.5 – Évolution à court terme de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$ pour un bain chaotique $\Gamma_0 = 0.04$ (—) et pour un bain régulier $\Gamma_0 = 0.008$ (---). Tous les autres paramètres des hamiltoniens (1.1) et (1.2) sont gardés constants, y compris les valeurs individuelles des paramètres $\{A_k\}_{k=1,\dots,N}$ et $\{h_k^x, h_k^z\}_{k=1,\dots,N}$. Encart : Enveloppe $\rho_{12}^{\text{env}}(t)$ de la fonction $\rho_{12}(t)$ pour les bains réguliers avec $\Gamma_0 = 0, 0.004, 0.008, 0.01$ (—, les quatre courbes externes se confondent) et pour les bains chaotiques avec $\Gamma_0 = 0.02$ (---), 0.03 (····), et 0.04 (-·-·). Pour l'ensemble de la figure, $h_0 = 0.014$, $J = 0.4$ et $b = 0.0683$. Adaptée de Lages et al., 2005.

où T_s est le temps d'atténuation, α et β sont constants. Pour le bain chaotique, l'atténuation des oscillations semble suivre une loi exponentielle de la forme

$$\rho_{12}^{\text{env}} = \alpha' + \beta' \exp\left(-\frac{t}{T_s}\right) \quad (1.9)$$

où T_s est le temps d'atténuation, α' et β' sont constants. La transition entre l'atténuation gaussienne et l'atténuation exponentielle est graduelle. Cette transition est fortement corrélée avec la transition vers le chaos qui s'opère dans le bain (voir encart de la Figure 1.5). Afin d'étudier plus précisément la forme de l'atténuation, seules les enveloppes $\rho_{12}^{\text{env}}(t)$ sont montrées dans l'encart de la Figure 1.5, en éliminant les oscillations de hautes fréquences. Plusieurs enveloppes sont présentées, qui correspondent à Γ_0 variant graduellement de 0 à 0.04. On observe que pour $\Gamma_0 < \Gamma_{\text{cr}} \simeq 0.013$, les enveloppes sont quasiment identiques; les quatre courbes (—) pour $\Gamma_0 = 0, 0.004, 0.008, 0.01$ coïncident pratiquement. Ainsi, tant que le bain est régulier, l'atténuation n'est pas affectée par la variation de Γ_0 . Cependant,

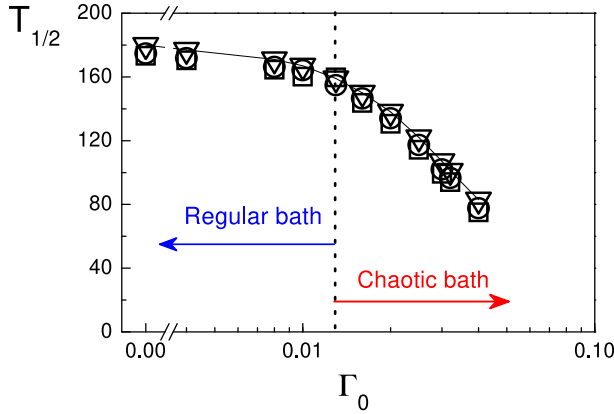


Figure 1.6 – Temps de demi-vie de l'atténuation de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$ de la matrice densité réduite ($\square$), de l'entropie linéaire $\Omega(t)$ (∇), et de la fidélité $F(t)$ du système central ($\circ$), en fonction de Γ_0 . Le paramètre du champ magnétique local est $h_0 = 0.014$ et le couplage système central-bain est $b = 0.0683$. Adaptée de Lages et al., 2005.

dès lors que Γ_0 dépasse la valeur Γ_{cr} , le bain devenant de plus en plus chaotique, le changement devient apparent : les courbes pour $\Gamma_0 = 0.02$ (---), 0.03 (-----), et 0.04 (---) sont vraiment distinctes, et leurs formes varient de gaussienne à exponentielle. Nous rappelons qu'exceptée la variation de Γ_0 , tous les autres paramètres des hamiltoniens (1.1) et (1.2) sont gardés constants.

Le même comportement peut être observé au travers du taux d'atténuation. La Figure 1.6 montre le temps de *demi-vie* $T_{1/2}$ des oscillations en fonction de Γ_0 . Le temps $T_{1/2}$ est le temps pour lequel l'amplitude des oscillations de $\rho_{12}(t)$ a été réduite de moitié par rapport à sa valeur initiale. La valeur de $T_{1/2}$ est déterminée sans aucune hypothèse concernant la forme de l'atténuation $\rho_{12}^{env}(t)$ et sert par conséquent de mesure directe du taux d'atténuation. Pour $0 < \Gamma_0 < \Gamma_{cr} \simeq 0.013$, i.e., pour des bains réguliers, le temps de demi-vie $T_{1/2}$ n'est pas sensible à l'accroissement du couplage interne Γ_0 du bain : la variation totale de $T_{1/2}$ n'est que de 8% lorsque Γ_0 varie de 0 à 0.013. Un changement drastique apparaît lorsque la dynamique du bain devient chaotique. Pour $\Gamma_0 > \Gamma_{cr}$, le temps de demi-vie décroît rapidement avec l'augmentation de Γ_0 . Dans l'intervalle $0.013 < \Gamma_0 < 0.04$, la valeur de $T_{1/2}$ diminue de plus de la moitié. La Figure 1.6 montre clairement que l'apparition du chaos dans le bain modifie abruptement la dépendance de $T_{1/2}$ vis-à-vis Γ_0 . Le bain chaotique mène à un processus de décohérence significativement plus rapide.

À noter que cette conclusion ne dépend pas des quantités monitorées. Par exemple, à court terme, l'entropie linéaire du système central $\Omega(t)$ oscille en s'atténuant, de manière analogue à ρ_{12} . L'enveloppe des oscillations de $\Omega(t)$ décroît de façon gaussienne pour les bains réguliers et de façon exponentielle pour les bains chaotiques. L'atténuation des oscillations de $\Omega(t)$ peut être quantifiée par son temps de demi-vie $T_{1/2}$. La Figure 1.6, montre que les oscillations de $\Omega(t)$ et $\rho_{12}(t)$ possèdent un temps de demi-vie $T_{1/2}$ presque identique. De même, nous pouvons observer la décohérence du système central via sa fidélité $F(t)$. La fidélité mesure la sensibilité aux perturbations du système central (la perturbation étant ici l'impact du bain), et est alors analogue à l'EdeL $O(t)$ (1.5) qui mesure la sensibilité du bain aux perturbations. La fidélité $F(t)$ est définie en comparant l'évolution du système central, décrit par la matrice densité $\rho(t)$, avec l'évolution *idéale* du système central n'interagissant pas avec le bain et décrite par la matrice densité $\rho'(t)$,

$$F(t) = \text{Tr}_S(\rho'(t)\rho(t)). \quad (1.10)$$

Ici, $\text{Tr}_S(\dots)$ désigne la trace sur les états du système central. La matrice densité du système central est $\rho(t) = \text{Tr}_B(\exp(-iHt)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|\exp(iHt))$ où $|\Psi(0)\rangle$ est l'état

initial du système composite et H est le hamiltonien donné par (1.1). La matrice densité du système central correspondant à une évolution idéale sans couplage avec le bain est $\rho'(t) = \text{Tr}_B(\exp(-iH't)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|\exp(iH't))$ où $H' = J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + H_B$. L'évolution à court terme de $F(t)$ est similaire à celle de $\rho_{12}(t)$ et à celle de $\Omega(t)$. Le temps de demi-vie $T_{1/2}$ des oscillations de la fidélité $F(t)$, présenté aussi à la Figure 1.6, est très proche des temps de demi-vie pour l'atténuation de $\rho_{12}(t)$ et de $\Omega(t)$.

1.4.2 Dépendance du processus de décohérence vis-à-vis du couplage système - bain et comparaison avec l'atténuation de l'écho de Loschmidt

Comme mentionné ci-avant, dans le cadre de notre modèle, le système central ne peut pas être traité comme une perturbation : le spin $\vec{S}_1$ ne peut pas être remplacé par un champ magnétique fictif puisque le couplage interne au système central et le couplage système - bain sont isotropes. De même, le bain que nous considérons ne possède pas de limite semi-classique. Néanmoins, il apparaît qu'il y a une analogie frappante entre nos résultats et ceux obtenus pour l'atténuation de l'EdeL dans les systèmes semi-classiques (Cerruti et Tomsovic, 2002; Cucchiatti et al., 2002; Jacquod, 2004; Jacquod, Adagideli et Beenakker, 2002; Jacquod, Silvestrov et Beenakker, 2001; Jalabert et Pastawski, 2001; Jordan et Srednicki, 2001; Karkuszewski, Jarzynski et Zurek, 2002; Poulin et al., 2004; Prosen et Znidaric, 2002; Wang et Li, 2002; Wisniacki, 2003; Znidaric et Prosen, 2003). Cette analogie suggère que nos résultats sont l'expression des propriétés génériques des systèmes chaotiques. Pour mettre en évidence cette analogie, nous étudions comment le processus de décohérence dépend du couplage système - bain b .

Pour b modérément petit, la différence entre la décohérence induite par le bain chaotique et celle induite par le bain régulier est significative (voir développements ci-avant). Cependant, lorsque b devient comparable à la largeur spectrale du bain, $W \simeq 0.05$, la différence devient moins prononcée, et, pour $b > W$, les oscillations de $\rho_{12}(t)$ deviennent identiques, que le bain soit chaotique ou régulier. Pour illustrer cet effet, nous présentons ici l'atténuation des oscillations de $\rho_{12}(t)$ pour deux bains, l'un régulier avec $\Gamma_0 = 0.008$, et l'autre chaotique avec $\Gamma_0 = 0.04$. Les enveloppes $\rho_{12}^{\text{env}}(t)$ obtenues à partir des simulations ont été soumises à des ajustements de courbe gaussienne (1.8) et exponentielle (1.9). Les valeurs de T_s obtenues pour les deux types d'ajustements sont très proches. Les temps de décohérence T_s sont présentés à la Figure 1.7 en fonction de $1/b$ en échelle log-log. La différence entre le bain chaotique et régulier est clairement visible pour $b < W$, les temps de décohérence correspondant diffèrent d'un facteur 2–2.5, en accord avec l'assertion énoncée précédemment, à savoir que le bain chaotique induit une décohérence plus rapide. Pour $b > W$, la différence devient plus petite, et disparaît rapidement avec l'augmentation de b (i.e., la diminution de $1/b$); pour $b \gg W$, le temps de décohérence T_s est inversement proportionnel à b pour les deux bains. Pour $b < W$, le comportement de $T_s(1/b)$ est différent pour les bains chaotiques et réguliers comme illustré dans l'encart de la Figure 1.7 qui représente les temps de cohérence en échelle linéaire. Dans la région $0.005 < b < 0.05$, pour le cas d'un bain régulier, le temps de décohérence varie à peu près d'un facteur deux.⁹ Par contraste, pour le bain chaotique, les temps de décohérence T_s

9. Il est intéressant de constater que, dans l'intervalle $0.01 < b < 0.1$, pour un bain régulier, le temps de

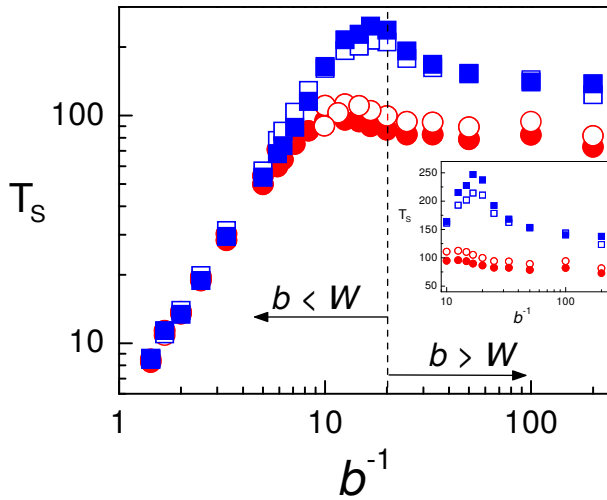


Figure 1.7 – Temps de décohérence T_s en fonction de $1/b$ pour un bain chaotique avec $\Gamma_0 = 0.04$, $h_0 = 0.014$ ($\circ$, $\bullet$), et pour un bain régulier $\Gamma_0 = 0.008$, $h_0 = 0.014$ ($\square$, $\blacksquare$). Les valeurs de T_s ont été obtenues après ajustements de courbe des enveloppes $\rho_{12}^{\text{env}}(t)$ pour une forme gaussienne ($\circ$, $\square$) et exponentielle ($\bullet$, $\blacksquare$). L'encart représente la même information que la figure globale, mais avec une échelle semi-logarithmique restreinte à l'intervalle $0.005 < b < 0.1$. Adaptée de Lages et al., 2005.

restent constants : la variation totale de T_s est inférieure à 15% dans cette région du paramètre b . Notons que les régimes observés à la Figure 1.7 sont indépendants de la quantité monitorée, et que l'étude approfondie de l'entropie linéaire $\Omega(t)$, et de la fidélité $F(t)$ donnerait les mêmes résultats que ceux obtenus avec $\rho_{12}(t)$.

D'un point de vue heuristique, nous pouvons établir une analogie avec l'atténuation de l'EdeL, en identifiant les états du système central $|\uparrow\downarrow\rangle$ et $|\downarrow\uparrow\rangle$ avec les états $|q_1\rangle$ et $|q_2\rangle$ de la section 1.2.1, et l'intensité b de l'interaction système central-bain avec l'intensité de la perturbation $V = V_{12}$. Le comportement de T_s en fonction de b montre clairement certaines similarités avec l'atténuation de l'EdeL. Pour des perturbations fortes, l'atténuation de l'EdeL est gaussienne, et la vitesse d'atténuation est la même pour les bains chaotiques et réguliers. Ceci est similaire à nos résultats pour T_s lorsque $b \gg W$. En diminuant l'intensité de la perturbation, le bain chaotique entre dans le régime de Lyapunov, où l'atténuation de l'EdeL est exponentielle avec une vitesse d'atténuation indépendante de la perturbation, tandis que l'atténuation de l'EdeL pour le bain régulier reste gaussienne avec un temps d'atténuation qui est plus petit que celui du système chaotique. Ceci est très similaire au comportement de T_s dans la région $b < W$. Lorsque b décroît davantage, nous nous attendons à entrer dans un régime de perturbation pour le processus de décohérence, mais, pour $b < 0.005$, les amplitudes des oscillations de $\rho_{12}(t)$ sont trop petites pour pouvoir tirer des conclusions définitives.

La forme de l'atténuation des oscillations de $\rho_{12}(t)$ est aussi similaire à ce qui est prédit pour l'atténuation de l'EdeL, bien que cet accord ne soit pas aussi bon que pour le temps d'atténuation T_s . Cela est dû au fait que l'atténuation initiale est toujours gaussienne, et que l'atténuation exponentielle, si elle existe, n'apparaît que plus tard. Pour quantifier la forme de l'atténuation des oscillations de $\rho_{12}(t)$, on effectue des ajustements de courbe gaussiens et exponentiels de $\rho_{12}^{\text{env}}(t)$ pour des bains chaotiques et réguliers. Pour chaque ajustement, la déviation χ^2 est calculée. Les exemples d'oscillations de $\rho_{12}(t)$ et d'ajustements de courbe sont montrés à la Figure 1.8abc, et la dépendance de χ^2 vis-à-vis de $1/b$ pour un bain chaotique et pour un bain régulier est présentée à la Figure 1.8d. La valeur de χ_E^2 (χ_G^2) mesure la distance moyenne entre l'enveloppe $\rho_{12}^{\text{env}}(t)$ obtenue et l'ajustement de courbe exponentielle

décohérence T_s décroît d'un facteur ~ 2 lorsque b décroît, i.e., la décohérence du système est plus rapide pour les petits couplages système - bain, tandis que pour le bain chaotique, le temps de décohérence T_s est resté presque constant (le changement est d'à peu près 13%). Cet effet reste à être expliqué.

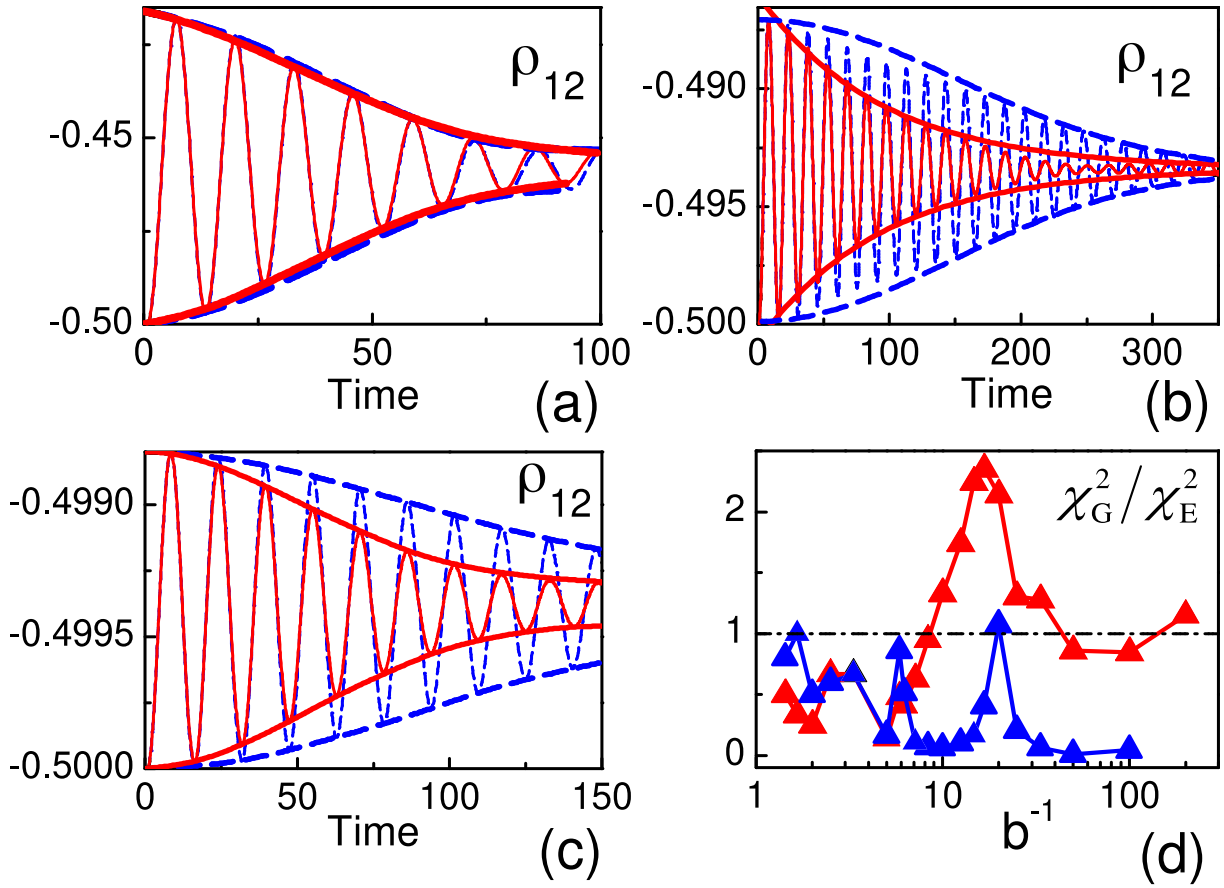


Figure 1.8 – Évolution à court terme de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$ dans le cas d'un bain chaotique $\Gamma_0 = 0.04$, $h_0 = 0.014$ (—) et dans le cas d'un bain régulier $\Gamma_0 = 0.008$, $h_0 = 0.014$ (---). Le couplage entre les deux spins centraux est $J = 0.4$. Les valeurs de l'interaction entre le système central et le bain est $b = 0.2$ (a), $b = 0.0683$ (b), et $b = 0.02$ (c). La largeur de bande $W \simeq 0.05$ du spectre des deux bains est maintenue inchangée. Le panneau (d) présente le rapport χ_G^2/χ_E^2 en fonction de $1/b$ dans le cas d'un bain chaotique (▲) et dans le cas d'un bain régulier (▲). Adaptée de Lages et al., 2005.

(gaussienne) le plus proche. Pour le cas de la décohérence induite par un bain régulier, l'atténuation de ρ_{12}^{env} est gaussienne presque partout : dans l'intervalle de l'ensemble des couplages considérés $0.005 < b < 1.37$, on a $\chi_G^2 \ll \chi_E^2$ excepté pour quelques valeurs de b près de $b \sim W$ où $\chi_G^2 \simeq \chi_E^2$. Pour le cas de la décohérence induite par un bain chaotique, dans la région $b < W$, lorsque l'atténuation de l'EdeL est exponentielle (régime de Lyapunov), l'atténuation des oscillations de $\rho_{12}(t)$ est aussi exponentielle (avec χ_E^2 notablement plus petit que χ_G^2), ou, au moins, montre une tendance exponentielle avec $\chi_G^2 \simeq \chi_E^2$.

Une question intéressante survient : est-ce qu'un bain chaotique pour $b < W$ est effectivement dans le régime de Lyapunov ? Nos résultats indiquent que oui (le temps de décohérence T_s est très peu dépendant de la valeur de b , et l'atténuation des oscillations de $\rho_{12}(t)$ est proche d'être exponentielle). Cependant, des études plus détaillées sont nécessaires afin de prouver cette conjecture. Puisque la notion de paquet d'ondes et de sa trajectoire n'est pas applicable à un bain de spins, il serait très intéressant de comprendre le sens physique du

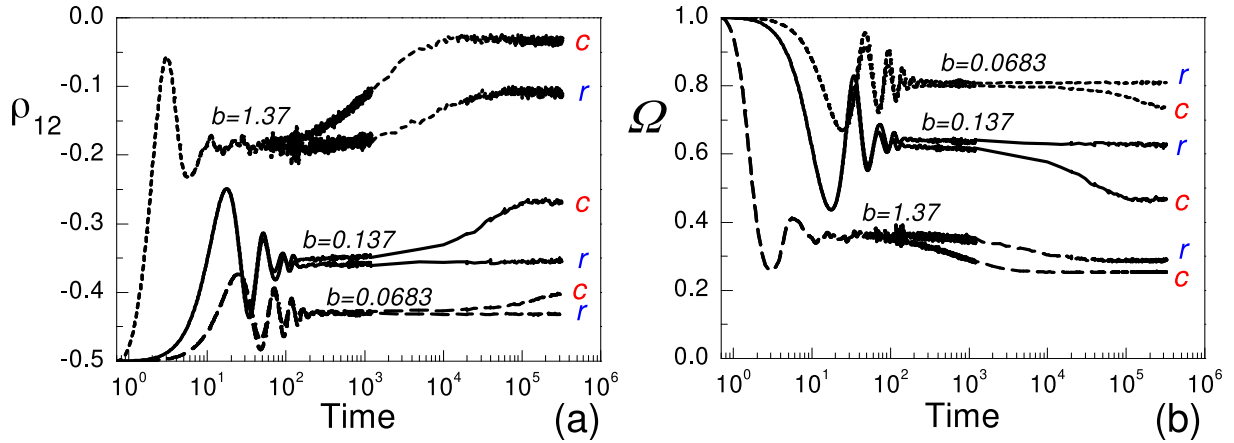


Figure 1.9 – Évolution globale (a) de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$ et (b) de l'entropie linéaire $\Omega(t)$ du système central dans le cas d'un bain chaotique $\Gamma_0 = 0.04$, $h_0 = 0.014$ (courbes marquées d'un **c**) et dans le cas d'un bain régulier $\Gamma_0 = 0.008$, $h_0 = 0.014$ (courbes marquées d'un **r**). Le couplage entre les spins centraux est $J = 0.1$. Les valeurs du couplage entre le système central et son bain sont $b = 0.0683$, $b = 0.137$, and $b = 1.37$. Adaptée de Lages et al., 2005.

régime de Lyapunov et des exposants de Lyapunov (Flambaum et Izrailev, 2001a,b). Il peut être également intéressant d'établir la connexion entre nos résultats numériques et les résultats expérimentaux de Pastawski et al., 2000.

1.5 Évolution à long terme du système central / états pointeurs

1.5.1 Décohérence à long terme du système central

L'évolution à long terme du système central présente également des différences prononcées entre les processus de décohérence induits par des bains chaotiques et par des bains réguliers. La Figure 1.9 montre l'évolution à long terme de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$ (Figure 1.9a) et de l'entropie linéaire du système central $\Omega(t)$ (Figure 1.9b) pour différents couplages système - bain b . Pour chaque valeur de b , deux courbes sont montrées, correspondant à un bain chaotique $\Gamma_0 = 0.04 > \Gamma_{cr}$ et à un bain régulier $\Gamma_0 = 0.008 < \Gamma_{cr}$. À la Figure 1.9a, nous observons que, pour une valeur fixe de b , le bain chaotique est plus efficace pour abaisser la valeur $\rho_{12}^{pt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{12}(t)$ vers zéro, i.e., pour briser l'intrication entre les deux spins. La Figure 1.9b confirme cette observation : l'entropie linéaire du système central $\Omega(t)$ est plus efficacement amené vers la valeur limite $1/4$ ¹⁰ en présence d'un bain chaotique.

Il est important de remarquer que dans le cas de la décohérence induite par un bain chaotique, même pour les très faibles couplages b , les deux étapes du processus de décohérence sont toujours présentes. Le système exhibe initialement des oscillations qui s'atténuent puis à long terme une relaxation de $\rho_{12}(t)$ et $\Omega(t)$ vers leurs valeurs *états pointeurs*. Par contre,

10. Cette valeur correspond à un système central maximale mixte.

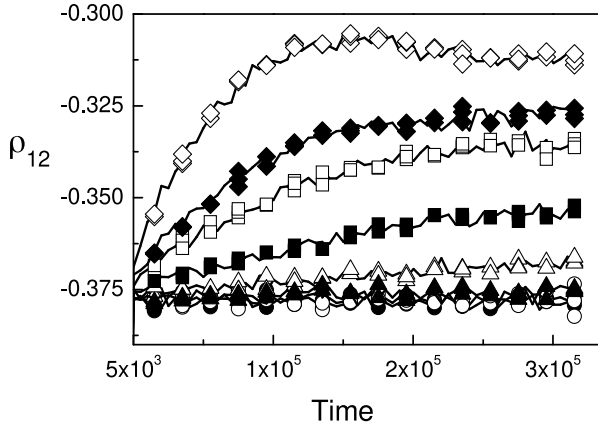


Figure 1.10 – Évolution à long terme de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$ pour un couplage système - bain $b = 0.114$, dans le cas de bains réguliers ($\bullet$) $\Gamma_0 = 0$, ($\circ$) $\Gamma_0 = 0.008$, ($\blacktriangle$) $\Gamma_0 = 0.013$, et dans le cas de bains chaotiques ($\triangle$) $\Gamma_0 = 0.02$, ($\blacksquare$) $\Gamma_0 = 0.025$, ($\square$) $\Gamma_0 = 0.03$, ($\blacklozenge$) $\Gamma_0 = 0.032$, ($\diamond$) $\Gamma_0 = 0.04$. Pour tous les bains, le paramètre du champ magnétique local est $h_0 = 0.014$. Le couplage entre les deux spins centraux est $J = 0.1$. D'après Lages et al., 2005.

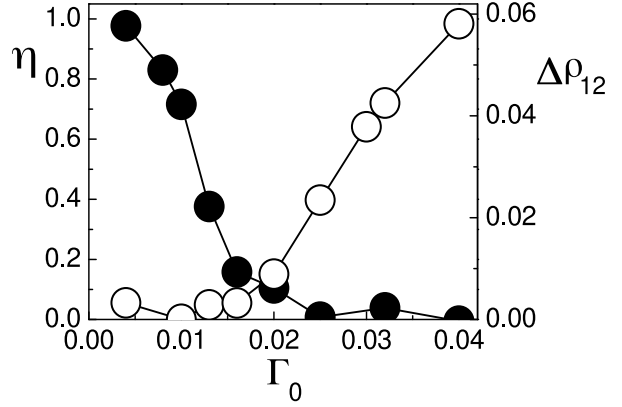


Figure 1.11 – Axe vertical gauche : paramètre η ($\bullet$), mesurant la chaotité du bain, en fonction de Γ_0 pour $h_0 = 0.014$. Axe droit vertical : variation $\Delta\rho_{12}$ ($\circ$) de l'élément non-diagonal ρ_{12} dans l'intervalle de temps $5 \times 10^3 < t < 3.2 \times 10^5$, pour $b = 0.114$ et $J = 0.1$, en fonction de Γ_0 .

pour le cas de la décohérence induite par un bain régulier, la seconde étape est généralement absente; après l'initial atténuation des oscillations, les valeurs de $\rho_{12}(t)$ et $\Omega(t)$ restent constantes (voir les courbes marquées r pour $b = 0.0683$ et 0.137 à la Figure 1.9). C'est uniquement pour les très forts couplages système - bain, $b > J > W$, que le bain régulier induit une décohérence à long terme du système central (voir courbe marquée r pour $b = 1.37$ à la Figure 1.9). Afin de démontrer que l'apparition du chaos est responsable de la seconde étape du processus de décohérence, nous avons calculé l'évolution à long terme de $\rho_{12}(t)$ pour une valeur fixe de $b = 0.114$ et pour différents bains chaotiques et réguliers. La Figure 1.10 montre clairement qu'il n'y a pas de processus de décohérence à long terme supplémentaire tant que $\Gamma_0 < \Gamma_{cr}$, i.e., tant que le bain n'est pas chaotique. Cependant, dès que $\Gamma_0 > \Gamma_{cr}$, un processus à long terme de décohérence apparaît, et la valeur état pointeur ρ_{12}^{pt} s'approche davantage de zéro à mesure que Γ_0 augmente.

Ce comportement est exactement le même que celui observé pour la décohérence à court terme : il n'y a pas de changement de forme ou de vitesse de l'atténuation pour $\Gamma_0 < \Gamma_{cr}$, mais, dès que Γ_0 dépasse Γ_{cr} , la forme et la vitesse d'atténuation sont rapidement modifiées.

Afin d'être plus précis, nous quantifions la chaotité du bain par la distribution de l'écart des niveaux du bain $P(s)$, en utilisant le paramètre

$$\eta = \frac{\int_0^{s_0} ds (P(s) - P_{WD}(s))}{\int_0^{s_0} ds (P_P(s) - P_{WD}(s))} \quad (1.11)$$

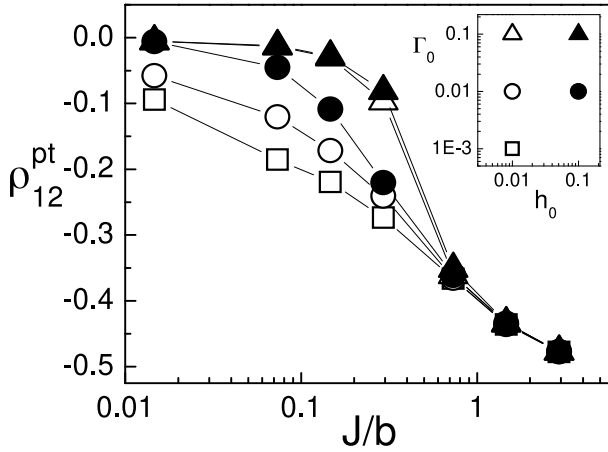


Figure 1.12 – Valeur état pointeur, $\rho_{12}^{pt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{12}(t)$, de l'élément non-diagonal $\rho_{12}(t)$, en fonction du rapport J/b pour différents paramètres Γ_0 et h_0 du bain : $\Gamma_0 = 0.1$, $h_0 = 0.1$ ($\blacktriangle$), $\Gamma_0 = 0.1$, $h_0 = 0.01$ ($\triangle$), $\Gamma_0 = 0.01$, $h_0 = 0.1$ ($\bullet$), $\Gamma_0 = 0.01$, $h_0 = 0.01$ ($\circ$), $\Gamma_0 = 0.001$, $h_0 = 0.01$ ($\square$). Les courbes correspondant à $\Gamma_0 = 0.1$, $h_0 = 0.1$ ($\blacktriangle$), et à $\Gamma_0 = 0.1$, $h_0 = 0.01$ ($\triangle$) coïncident presque. Les valeurs de Γ_0 et h_0 peuvent également être lues dans l'encart. D'après Lages et al., 2005.

où $P_P(s) = \exp(-s)$ est la distribution de Poisson caractéristique des bains réguliers, et $P_{WD}(s) = (\pi s/2) \exp(-\pi s^2/4)$ la distribution de Wigner-Dyson caractéristique des bains chaotiques. La quantité η est une mesure standard du degré de chaos dans le système (Georgot et Shepelyansky, 1998, 2000a). L'abscisse $s_0 \simeq 0.4729 \dots$ détermine l'une des deux intersections¹¹ entre les deux distributions, $P_P(s_0) = P_{WD}(s_0)$. La valeur $\eta = 0$ signifie que le bain est chaotique, $P(s) = P_{WD}(s)$, alors que la valeur $\eta = 1$ signifie que le bain est régulier, $P(s) = P_P(s)$. À la Figure 1.11, nous présentons le paramètre η en fonction de Γ_0 . Sur le même graphe, nous présentons la variation $\Delta\rho_{12}$ à long terme de $\rho_{12}(t)$ dans l'intervalle de temps $5 \times 10^3 < t < 3.2 \times 10^5$. La corrélation entre les deux paramètres η et $\Delta\rho_{12}$ est claire. La transition vers le chaos apparaît autour de $\Gamma_{cr} \sim 0.013$, et pour $\Gamma_0 < \Gamma_{cr}$ la valeur de $\Delta\rho_{12}$ reste petite, inférieure à 0.003, tandis que, entre $\Gamma_0 = \Gamma_{cr}$ et $\Gamma_0 \simeq 3\Gamma_{cr}$, la valeur de $\Delta\rho_{12}$ change d'un facteur 30. Cela montre clairement que l'établissement du chaos dans le bain induit un changement drastique dans le processus de décohérence à long terme du système central.

1.5.2 Impact de la chaotité du bain sur les états pointeurs du système central

Nous étudions finalement l'impact du chaos du bain sur l'état pointeur du système central, en considérant comment la courbe $\rho_{12}^{pt}(J/b)$ change avec la variation des paramètres du bain. La Figure 1.12 présente les courbes $\rho_{12}^{pt}(J/b)$ pour différents bains avec différentes valeurs de Γ_0 et de h_0 .¹² Pour une valeur fixe du rapport J/b , l'augmentation du champ magnétique local h_0 mène à la diminution de $|\rho_{12}^{pt}|$. La même chose se produit lors que le couplage interne au bain Γ_0 augmente. Augmenter Γ_0 ou h_0 rend la dynamique du bain plus rapide, si bien que la tendance principale donnée par la Figure 1.12 est que plus la dynamique interne du bain est rapide, plus le processus de décohérence est fort. Cependant, l'apparition du chaos influence aussi les états pointeurs, bien que pas de façon drastique. Par exemple, la comparaison des courbes $\Gamma_0 = 0.01$, $h_0 = 0.1$ ($\bullet$), et $\Gamma_0 = 0.1$, $h_0 = 0.01$ ($\triangle$) montre que l'augmentation de Γ_0 , qui rend le bain plus chaotique, mène à des changements plus importants de la courbe

11. Celle la plus proche de zéro.

12. À noter que Γ_0 et h_0 varie d'un ordre de grandeur d'une courbe à une autre.

$\rho_{12}^{\text{pt}}(J/b)$ que l'augmentation de h_0 , qui rend la dynamique du bain plus rapide mais moins chaotique. Pour une même valeur de J/b , un bain chaotique est plus efficace pour faire tendre la valeur de ρ_{12}^{pt} vers zéro, i.e., pour détruire les corrélations entre les spins centraux $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$.

1.6 Conclusion

Nous avons étudié la décohérence d'un système de deux spins induite par des bains réguliers et chaotiques. Nous sommes allés au-delà de la description à un corps semi-classique, en considérant des environnements composés de nombreux spins-1/2. Nous ne remplaçons pas le système ou le bain par une perturbation, comme cela a été fait dans les études de l'écho de Loschmidt. À mesure que $t \rightarrow \infty$, le bain chaotique, par rapport au bain régulier, produit des valeurs plus petites de l'élément $\langle \uparrow\downarrow | \rho | \downarrow\uparrow \rangle$ de la matrice densité du système central, ainsi que des valeurs plus petites de l'entropie du système central. En d'autres termes, à long terme, le bain chaotique produit une décohérence plus efficace. À court terme, le bain chaotique engendre une rapide atténuation des oscillations quantiques dans le système, et modifie la forme de l'atténuation, de gaussienne pour les bains réguliers à exponentielle pour les bains chaotiques. Ainsi, l'émergence du chaos dans le bain modifie drastiquement la dynamique de la décohérence, tout en n'affectant que de façon marginale les propriétés globales du spectre du bain (telles que par exemple la largeur spectrale). Il est intéressant de noter que les conclusions antérieures basées sur des arguments qualitatifs semi-classiques sont en accord avec nos calculs numériques, alors que le bain composé des spins 1/2 n'a pas d'analogue semi-classique. En se basant sur l'analogie établie avec l'atténuation de l'écho de Loschmidt, nous avons produit des arguments montrant que le bain chaotique se situe bien dans le régime dynamique de Lyapunov.

Chapitre 2

Suppression du chaos quantique dans un hardware quantique

2.1 Introduction

L'idée fascinante du calcul quantique a stimulé de nombreux efforts expérimentaux destinés à réaliser des qubits basés sur différentes implémentations physiques de systèmes quantiques à deux niveaux couplés (voir par exemple Nielsen et Chuang, 2000). Les implémentations de calculs quantiques utilisant la RMN liquide ont permis de réaliser plusieurs algorithmes quantiques avec quelques qubits, comme par exemple, l'algorithme de factorisation de Shor (Vandersypen et al., 2001) et des simulations de dynamique complexe (Weinstein et al., 2002). Cependant, le contexte de la RMN liquide ne permet pas d'adresser individuellement les qubits et ne peut aboutir à construire un **ordinateur quantique** (OQ) à grande échelle (Braunstein et al., 1999). La situation est bien plus optimiste pour le cas de l'implémentation de calcul quantiques utilisant la RMN dite solide (Nielsen et Chuang, 2000). Certaines propriétés de cette dernière sont aussi partagées par l'OQ *tout-silicone* proposé par le groupe de Yamamoto (Fu et al., 2004; Goldman et al., 2000; Ladd et al., 2002; Yamaguchi et al., 2004). Dans cette proposition, les qubits sont des noyaux de spin-1/2 (e.g., des isotopes ^{29}Si) agencés en un réseau bidimensionnel, lui-même enchâssé dans une matrice cristalline solide (e.g., des noyaux de ^{28}Si de spin-0). Un gradient de champ magnétique est appliqué dans le plan du réseau pour permettre l'adressage individuel des qubits. À présent, de très puissants gradients peuvent être réalisés expérimentalement (Mamin et al., 2003; Rugar et al., 2004) et, d'après Goldman et al., 2000; Ladd et al., 2002, des milliers de qubits peuvent alors être adressés. En plus de cela, l'interaction entre qubits nécessaire pour construire un OQ est le couplage dipôle-dipôle existant entre deux qubits (Slichter, 1990; Vandersypen et Chuang, 2005). Ces deux ingrédients, à savoir le gradient de fréquences et le couplage dipôle-dipôle entre qubits, sont également présents dans de nombreuses autres propositions de réalisation d'un OQ comme celle basée, par exemple, sur des molécules polaires piégées avec un gradient électrique (DeMille, 2002), ou sur des ions piégés avec un gradient magnétique (Mc Hugh et Twamley, 2005). Ainsi, il apparaît important d'étudier les propriétés génériques de tels systèmes pour les futures implémentations expérimentales.

En effet, les couplages résiduels entre les qubits sont, tout particulièrement, connus pour mener à l'apparition du chaos quantique et à la fusion du hardware de l'OQ (Flambaum, 2000;

Georgeot et Shepelyansky, 2000a,b ; Shepelyansky, 2001). Il a été montré (Benenti et al., 2001 ; Frahm, Fleckinger et Shepelyansky, 2004) que ces imperfections statiques occasionnent une décroissance rapide de la fidélité des calculs quantiques et par conséquent l'étude de celles-ci est importante pour essayer de préserver la précision des calculs quantiques. Pour une chaîne unidimensionnelle de qubits, il a été montré que l'introduction d'un gradient de fréquences renforce généralement la stabilité du hardware de l'OQ vis-à-vis des couplages statiques inter-qubits. Ce résultat a d'importantes implications pour les propositions expérimentales similaires telles que celle de DeMille, 2002 et de Mc Hugh et Twamley, 2005. Cependant, le cas générique bidimensionnel proposé par Ladd et al., 2002 requière une attention toute particulière. C'est cette étude qui est présentée dans ce chapitre. Afin d'analyser les propriétés génériques du hardware de l'OQ proposé par Ladd et al., 2002, nous avons effectué des simulations numériques intensives prenant en compte jusqu'à 18 qubits. Nos études montrent qu'un gradient de champ magnétique suffisamment intense mène à la suppression du chaos quantique et à l'émergence d'un régime intégrable où les états propres réels sont proches de ceux de l'OQ idéal sans imperfections (Lages et Shepelyansky, 2006). Nous avons déterminé la frontière entre le régime intégrable et le régime de chaos quantique.

2.2 Description du modèle d'ordinateur quantique

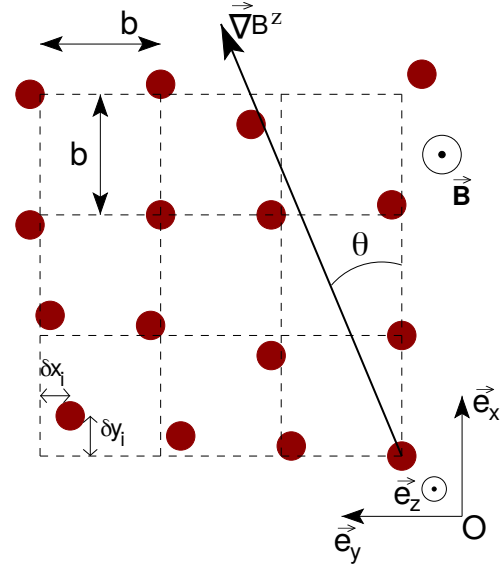
En suivant la proposition du groupe de Yamamoto (Ladd et al., 2002), nous présentons un modèle mathématique (OQY)¹ d'un OQ réaliste avec un gradient de champ magnétique et un couplage dipôle-dipôle entre les qubits. Nous considérons ainsi un réseau bidimensionnel de n_q spins-1/2 nucléaires enchâssés dans un solide cristallin, e.g., des noyaux de ^{31}P de spins-1/2 dans un puits quantique de GaAs/AlGaAs, ou bien, des noyaux de ^{29}Si de spins-1/2 dans une matrice de noyaux ^{28}Si de spins-0 (Ladd et al., 2002). Afin de manipuler les spins nucléaires en utilisant les champs radio-fréquence, chaque qubit doit être individuellement adressable, i.e., une fréquence de Larmor spécifique doit être assignée à chacun d'entre eux. Le hamiltonien de ce réseau de spins nucléaires est le suivant

$$H = \sum_{i=1}^{n_q} (\omega_0 + \delta\omega_i) I_i^z + \sum_{i<j} d_{ij} (2I_i^z I_j^z - I_i^x I_j^x - I_i^y I_j^y). \quad (2.1)$$

Cet hamiltonien est très couramment utilisé en RMN (Slichter, 1990). Les opérateurs $I_i^{x,y,z} = \prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{1}_2 \otimes \frac{1}{2} \sigma^{x,y,z} \otimes \prod_{j=i+1}^{n_q} \mathbf{1}_2$ sont les opérateurs agissant sur le i ème spin où les matrices $\sigma^{x,y,z}$ sont les usuelles matrices de Pauli. La fréquence $\omega_0 + \delta\omega_i$ est la fréquence de Larmor associée au i ème spin. En considérant les noyaux de spins-1/2 comme un ensemble de qubits, $\omega_0 + \delta\omega_i$ est l'énergie entre les deux états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ d'un seul qubit. La double somme permet d'effectuer une somme sur toutes les paires de qubits disposés dans un plan (xOy), et le terme $d_{ij} = d/q_{ij}^3$ est le couplage dipolaire entre les spins i et j . Ici, $q_{ij} = r_{ij}/b$ est la distance entre deux spins i et j en unités du pas b du réseau carré de spins ; d est le couplage entre deux spins voisins sur un réseau ($q_{ij} = 1$). Dans la géométrie de Faraday, i.e., telle que le champ magnétique est orthogonal au plan contenant les noyaux de spins-1/2 ($\vec{B} = B^z \vec{e}_z$), le couplage est $d = \mu_0 \gamma^2 \hbar^2 / 8\pi b^3$ où γ est le rapport gyromagnétique des noyaux considérés.

1. OQY pour **ordinateur quantique de Yamamoto**.

Figure 2.1 – Réseau désordonné de spins : la déviation locale du spin i par rapport à sa position idéale de coordonnées $(n_{x_i}b, n_{y_i}b)$ est donnée par $\delta x_i = \delta_{x_i}b$ et $\delta y_i = \delta_{y_i}b$ (voir explications dans le texte). Les indexes $i = 1, \dots, n_q = n_x n_y$ permettent de repérer les spins sur le réseau. La direction du gradient de champ magnétique fait un angle θ avec l'axe (Ox) . Adaptée de Lages et Shepe-lyansky, 2006.



Un schéma de la structure du modèle est montré à la Figure 2.1. Nous allons concentrer notre étude sur le régime $\omega_0 \gg \delta\omega_i, d$ pour lequel l'énergie d'un seul qubit ω_0 est plus grande que les décalages de fréquences de Larmor $\delta\omega_i$ et plus grande que le couplage dipolaire d_{ij} entre deux qubits. Ce régime correspond aux conditions expérimentales typiques discutées dans Ladd et al., 2002 et dans Goldman et al., 2000.

Dans (2.1), un décalage de fréquence de Larmor $\delta\omega_i$ est assigné à chaque spin nucléaire. Ces décalages de fréquence de Larmor permettent de discerner un spin nucléaire d'un autre, et jouent le même rôle que les décalages chimiques en RMN liquide (Slichter, 1990). Ici, ces décalages de fréquence de Larmor sont dus au gradient de champ magnétique $\vec{g} = \vec{\nabla} B^z = g \vec{e}_z$ disposé sur le plan (xOy) . Pour le i ème spin nucléaire situé à la position $\vec{r}_i = n_{x_i}b \vec{e}_x + n_{y_i}b \vec{e}_y$, le décalage de la fréquence de Larmor est

$$\delta\omega_i = \frac{\gamma}{2\pi} \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla} B^z = n_{x_i}\omega_g \cos \theta + n_{y_i}\omega_g \sin \theta \quad (2.2)$$

où nous définissons $\omega_g = \frac{\gamma}{2\pi}bg$ le décalage caractéristique de fréquence de Larmor. L'espace-ment des fréquences de Larmor entre deux spins nucléaires adjacents le long de l'axe $\vec{e}_x$ ($\vec{e}_y$) est $\omega_{gx} = \omega_g \cos \theta$ ($\omega_{gy} = \omega_g \sin \theta$). Dans la Table 2.1, les paramètres physiques typiques sont donnés pour le cas des noyaux ^{31}P et ^{29}Si . Par exemple, si nous considérons un réseau cubique à face centrée de noyaux de ^{31}P avec une distance de $b = 3.9974 \text{ \AA}$ entre noyaux plus proches voisins alors $d = 154 \text{ Hz}$. Le régime $\omega_g/d = 10$ choisi pour nos simulations correspond alors à $\omega_g = 1540 \text{ Hz}$ qui est équivalent à un gradient de champ magnétique $g = 0.224 \text{ T}/\mu\text{m}$. Si nous considérons un réseau de noyaux de ^{29}Si avec une distance de $b = 1 \text{ \AA}$ entre noyaux voisins alors $d = 2.4 \text{ kHz}$. Le régime $\omega_g/d = 10$ de nos simulations correspond alors à $\omega_g = 24 \text{ kHz}$ qui est équivalent à un gradient de champ magnétique $g = 28 \text{ T}/\mu\text{m}$.

Sur un réseau carré, nous considérons l'index $i = \{1, \dots, n_q = n_x n_y\}$ repérant les noyaux lignes par lignes. Ainsi, le noyau situé à la position $(n_{x_i}b, n_{y_i}b)$, avec $n_{x_i} \in \{1, \dots, n_x\}$ et $n_{y_i} \in \{1, \dots, n_y\}$, est associé à l'index $i = (n_{x_i} - 1)n_y + n_{y_i}$. L'angle entre la direction du gradient de champ magnétique et, par exemple, l'axe $\vec{e}_x$ est, par symétrie, compris entre 0 et $\pi/4$. D'un point de vue expérimental, il est pratique d'associer des fréquences de Larmor croissantes aux noyaux le long du chemin indexé par i . Ceci assure la possibilité de discerner

	$ \gamma/2\pi $ (MHz/T)	b (Å)	d (Hz)	$\omega_g = 10d$ (kHz)	$g \sim 10d/b$ (T/ μm)
^{31}P	17.20	4.0	154	1.54	0.224
^{29}Si	8.47	1.9	346	3.46	2.150
^{29}Si	8.47	1.0	2374	23.74	28.000

Table 2.1 – Paramètres physiques pour différents noyaux correspondant à $\omega_g/d = 10$ dans nos simulations. Les paramètres sont γ le rapport gyromagnétique, b le pas du réseau cristallin à maille carrée, d la constante de couplage dipolaire, ω_g l'espacement caractéristique des fréquences de Larmor, et g l'intensité du gradient de champ magnétique. Adaptée de Lages et Shepelyansky, 2006.

chaque noyau. Cette condition est réalisée si $n_y \omega_g \sin \theta < \omega_g \cos \theta$. Comme le nombre de noyaux recensés dans un point quantique peut être aussi grand que $n_q = n_x n_y \sim 10^4$, cette condition est alors $\theta < n_y^{-1}$. Le long de la direction $\vec{e}_x$, les noyaux sont *hautement discernables* puisque l'espacement des fréquences de Larmor entre deux noyaux voisins est $\omega_{gx} \simeq \omega_g \gg d$. Le couplage dipolaire dans (2.1) est alors négligeable. Le long de la direction $\vec{e}_y$, l'espacement des fréquences de Larmor entre deux noyaux voisins est $\omega_{gy} \simeq \omega_g/n_y \ll \omega_g$, par conséquent, les noyaux le long de cette direction sont *faiblement discernables*. Avec $n_y \sim 10^2$ et en considérant les paramètres physiques de la Table 2.1, nous remarquons aisément que, le long de la direction $\vec{e}_y$, le couplage dipolaire d_{ij} ne peut pas être négligé puisque $d \sim \omega_{gy}$.

Afin d'être plus réaliste, nous considérons le fait que les spins ne peuvent pas former un réseau régulier idéal, i.e., il n'est pas possible, expérimentalement, de placer exactement chaque noyau sur un nœud du réseau rectangulaire. Considérons le spin i au voisinage du nœud (n_{x_i}, n_{y_i}) . Nous définissons les déviations δ_{x_i} et δ_{y_i} qui caractérisent les déviations du placement du spin i par rapport à la position idéale du nœud (n_{x_i}, n_{y_i}) . La position du spin i est alors $\vec{r}_i = (n_{x_i} + \delta_{x_i}) b \vec{e}_x + (n_{y_i} + \delta_{y_i}) b \vec{e}_y$ (voir Figure 2.1). Nous supposons que les déviations δ_{x_i} et δ_{y_i} sont aléatoires et distribuées dans l'intervalle $[-\delta/2, \delta/2]$ où δ est l'inévitable erreur expérimentale dans le positionnement des noyaux. Ces déviations spatiales modifient faiblement les couplages dipolaires d_{ij} entre les spins nucléaires puisque ceux-ci dépendent de l'inverse du cube de la distance r_{ij} entre les spins. L'effet principal est la modification des décalages de la fréquence de Larmor, et par conséquent des différences de fréquences de Larmor entre deux spins nucléaires. Pour le i ème spin, le décalage de fréquence de Larmor est donc

$$\delta\omega_i = (n_{x_i} + \delta_{x_i}) \omega_{gx} + (n_{y_i} + \delta_{y_i}) \omega_{gy}. \quad (2.3)$$

Ainsi, l'espacement minimal de la fréquence de Larmor entre deux spins nucléaires adjacents est

$$\omega'_{gx} = \min \left\{ \delta\omega_{i+n_y} - \delta\omega_i \right\}_{i=1, n_q-n_y} = (1 - \delta) \omega_{gx} - \omega_{gy} \delta \quad (2.4)$$

le long de la direction $\vec{e}_x$ et

$$\omega'_{gy} = \min \left\{ \delta\omega_{i+1} - \delta\omega_i \right\}_{i=1, n_q-1} = (1 - \delta) \omega_{gy} - \omega_{gx} \delta \quad (2.5)$$

le long de la direction $\vec{e}_y$. Pour $\theta \in [0, \pi/4]$ et $\delta < 0.5$, nous avons $\omega'_{gx} > 0$, ce qui assure que, le long du chemin indexé par i , d'une ligne à l'autre, la fréquence de Larmor augmente.

Comme cela a été dit précédemment, il est pratique, d'un point de vue expérimental, que $\delta\omega_{i+1} - \delta\omega_i > 0$ pour chaque couple de fréquence de Larmor adjacente le long d'une ligne, i.e., le long de la direction $\vec{e}_y$. En utilisant (2.5), cette condition mène à l'inégalité suivante $\tan \theta > \delta / (1 - \delta)$. Ainsi, pour un grand nombre n_y de noyaux le long de la direction $\vec{e}_y$, et pour de petites fluctuations spatiales $\delta \ll 1$, la discernabilité totale des noyaux dans le plans (xOy) est assurée si la condition suivante est remplie

$$\delta < \theta < n_y^{-1}. \quad (2.6)$$

Notons que le désordre introduit par (2.3) peut aussi modéliser l'inhomogénéité spatiale du gradient de champ magnétique $\vec{g}$. Puisque l'inégalité $\delta < n_y^{-1}$ doit être réalisée, la condition de discernabilité totale (2.6) impose une très bonne précision expérimentale sur la position des noyaux et sur le gradient bidimensionnel de champ magnétique.

Nous allons considérer une situation expérimentale typique pour laquelle les couplages dipolaires et les décalages de fréquence de Larmor sont comparables, $d \sim \omega_g$ mais avec $\omega_0 \gg \omega_g, d$. Dans ce régime, les états propres du hamiltonien (2.1) peuvent être ordonnés par les secteurs de spins $\langle I^z \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n_q} I_i^z \rangle$. Les états propres partageant la même valeur de $\langle I^z \rangle$ forment une bande spectrale de largeur $\delta\omega \simeq \omega_g \sqrt{n_q}$. A l'intérieur d'une bande spectrale, il y a $n_{\langle I^z \rangle} = n_q! / (n_q/2 + \langle I^z \rangle)! (n_q/2 - \langle I^z \rangle)!$ états propres. Des bandes spectrales proches, i.e., des bandes dont la valeur $\langle I^z \rangle$ diffère de ± 1 , sont bien séparées en énergie puisque leur espacement est $\omega_0 \gg \delta\omega$. Dans ce cas, en utilisant les opérateurs de retournement de spin $I_j^\pm = I_j^x \pm iI_j^y$, le hamiltonien (2.1) peut être réécrit comme

$$H = H_{\text{diag}} + H_{\text{non-diag}} \quad (2.7)$$

où

$$H_{\text{diag}} = \sum_{i=1}^{n_q} (\omega_0 + \delta\omega_i) I_i^z + 2 \sum_{i < j} d_{ij} I_i^z I_j^z \quad (2.8)$$

est la partie diagonale et

$$H_{\text{non-diag}} = -\frac{1}{2} \sum_{i < j} d_{ij} (I_i^+ I_j^- + I_i^- I_j^+) \quad (2.9)$$

la partie non-diagonale du hamiltonien. À partir de (2.8), nous remarquons que la partie non-diagonale du hamiltonien (2.7) est bloc diagonale, i.e. chaque bloc correspond à un secteur de spin $\langle I^z \rangle$. Ainsi, seuls les états propres sans interaction avec la même valeur de $\langle I^z \rangle$ sont directement couplés par l'interaction dipolaire. La diagonalisation de n'importe lequel des secteurs $\langle I^z \rangle$ peut être effectué indépendamment des autres.

Le hamiltonien (2.7) régit le modèle mathématique de l'OQY. Puisque le chaos quantique apparaît préférentiellement au centre du spectre (Georgot et Shepelyansky, 2000a), nous étudions les propriétés du hamiltonien (2.1) dans la bande centrale associée au secteur de spin $\langle I^z \rangle = 0$ ($\langle I^z \rangle = \pm 1/2$) pour un nombre pair (impair) de spins. Cette partie du spectre est la plus sensible aux imperfections du réseau et la plus prompte à l'émergence du chaos quantique.

2.3 Résultats numériques

Afin de caractériser l'émergence du chaos quantique dans le modèle de l'OQY (2.7), nous utilisons la distribution $P(s)$ des $n - 1$ espacements $\{s_i = (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) / \Delta\}_{i=1, \dots, n-1}$ des n

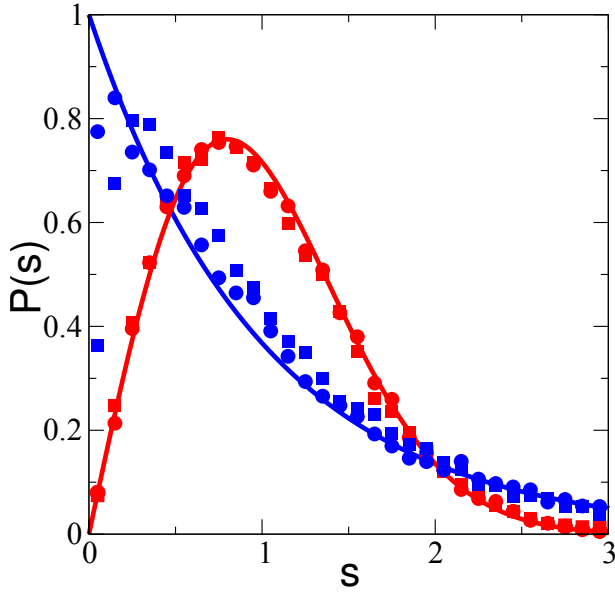


Figure 2.2 – Distribution $P(s)$ des espacements de niveaux du spectre du hamiltonien (2.1) pour le cas d'une amplitude $\delta = 0.1$ du désordre spatial, pour un angle $\theta = 0.3$, et pour $\omega_g/d = 1$ (●), 4 (■), 7 (■), et 10 (●). Les distribution poissonnienne $P_P(s)$ (—) et de Wigner-Dyson $P_{WD}(s)$ (—) sont montrées. Le nombre de réalisations du désordre est $N_d = 10$. Le calcul a été effectué avec $n_q = 16$ qubits placés sur un réseau de taille 4×4 . Adaptée de Lages et Shepelyansky, 2006.

niveaux quantiques ordonnés par énergie croissante ($\varepsilon_i < \varepsilon_{i+1}$). Ici, $\Delta = (\varepsilon_n - \varepsilon_1) / (n - 1)$ est l'écart moyen entre deux niveaux adjacents en énergie. Cette distribution $P(s)$ des espacements de niveaux permet de suivre la transition entre les états propres intégrables et les états propres ergodiques (voir par exemple Haake, 2001, et aussi la section 1.2 page 10 du présent mémoire). Les n niveaux d'énergie pour lesquels $P(s)$ est calculée correspondent aux états propres du voisinage immédiat du centre de la bande centrale du spectre (nous utilisons 10% de la bande spectrale $\delta\omega$) ; Δ est alors l'espacement moyen de ces états. Nous rappelons que si la distribution $P(s)$ suit une loi poissonnienne, $P(s) = P_P(s) = \exp(-s)$, alors le système est intégrable. À l'inverse, si la distribution $P(s)$ suit la distribution de Wigner-Dyson, $P(s) = P_{WD}(s) = \pi s/2 \exp(-\pi s^2/4)$, alors le système est chaotique. La Figure 2.2 montre des exemples typiques de distributions $P(s)$ des espacements de niveaux pour une amplitude du désordre $\delta = 0.1$ et pour un angle $\theta = 0.3$ du gradient du champ magnétique avec l'axe $\vec{e}_x$. Chaque distribution $P(s)$, présentée à la Figure 2.2, a été calculée en utilisant 128700 niveaux d'énergie et $N_d = 10$ réalisations du désordre. Lorsque la valeur de ω_g/d augmente de 0 à 10, la distribution $P(s)$ est modifiée passant d'une distribution de Wigner-Dyson à une distribution poissonnienne. Il existe donc une fréquence critique ω_g^c telle que pour $\omega_g < \omega_g^c$, le hardware de l'OQY est dans un régime de chaos quantique, et pour $\omega_g > \omega_g^c$, ce même hardware est dans un régime intégrable. D'après la Figure 2.2, la valeur de ω_g^c se situe dans l'intervalle $4 < \omega_g^c/d < 7$.

Afin de décélérer plus finement le bord du chaos quantique ω_g^c , il est pratique d'introduire le paramètre (Jacquod et Shepelyansky, 1997, voir aussi la section 1.5.1 page 23 du présent mémoire)

$$\eta = \frac{\int_0^{s_0} (P(s) - P_{WD}(s)) ds}{\int_0^{s_0} (P_P(s) - P_{WD}(s)) ds} \quad (2.10)$$

où $s_0 \simeq 0.4729 \dots$ est une des deux intersections, $s_0 < s_1$, entre les deux distributions $P_P(s)$ et $P_{WD}(s)$. Ainsi, $\eta \rightarrow 0$ ($\eta \rightarrow 1$) si le système étudié est chaotique (intégrable). Ce paramètre, utile pour appréhender la transition entre intégrabilité et chaos quantique, a été

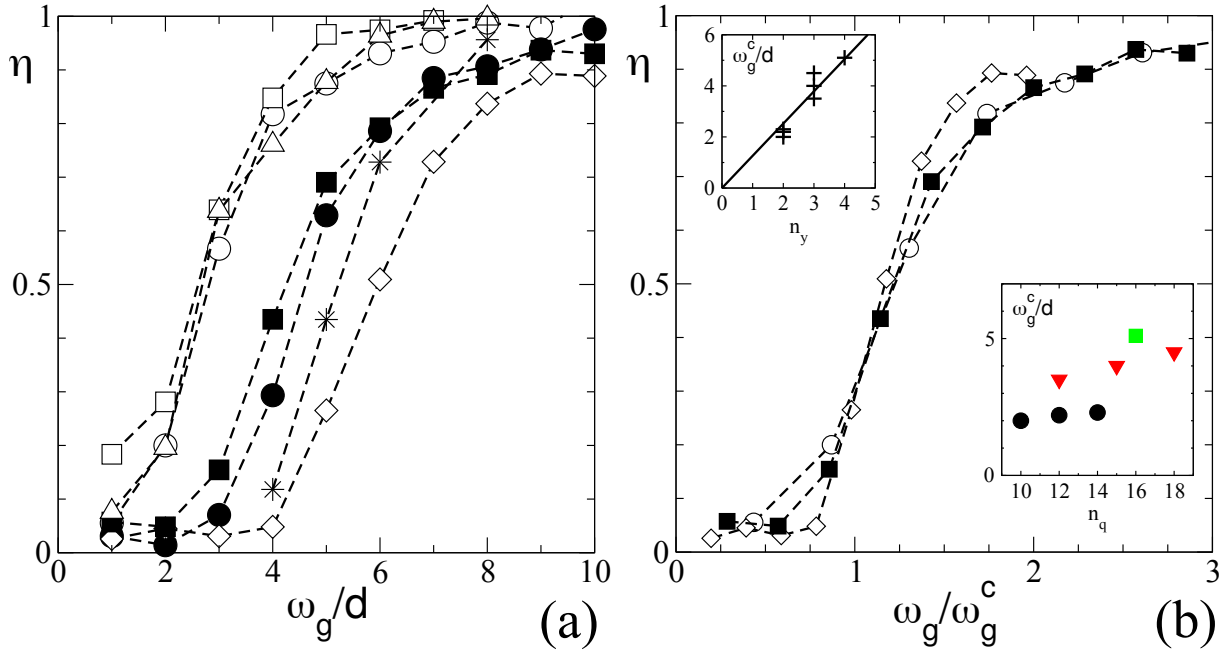


Figure 2.3 – Paramètre η en fonction de ω_g/d (a) et en fonction de ω_g/ω_g^c (b) pour différentes tailles de réseaux 5×2 (□), 6×2 (△), 7×2 (○), 4×3 (■), 5×3 (●), 6×3 (*), et 4×4 (◇). Le déplacement de fréquence critique ω_g^c est défini tel que $\eta(\omega_g^c/d) = 0.3$. Par soucis de clarté, seules quelques courbes de la figure (a) ont été reportées sur la figure (b). Figure (b), encart du haut : déplacement de fréquence critique ω_g^c en fonction de n_y . La ligne droite est issue d'une régression linéaire (voir explications dans le texte). Figure (b), encart du bas : déplacement de fréquence critique ω_g^c en fonction du nombre total de qubits $n_q = n_x n_y$ pour $n_y = 2$ (●), $n_y = 3$ (▼), et $n_y = 4$ (■). Pour tous les calculs présentés $\delta = 0.1$ et $\theta = 0.3$. Le nombre de réalisations du désordre est $N_d = 10$ ($N_d = 4$ pour le cas 6×3). Adaptée de Lages et Shepelyansky, 2006.

utilisé dans de nombreuses recherches concernant les systèmes quantiques à N corps (Benenti, G., Casati, G. et Shepelyansky, D. L., 2001 ; Georgeot et Shepelyansky, 1998, 2000a,b ; Jacquod et Shepelyansky, 1997 ; Lages, 2001).

À la Figure 2.3, nous montrons la dépendance du paramètre η vis-à-vis du déplacement de fréquence ω_g pour différentes tailles du réseau pour un angle $\theta = 0.3$ et pour une intensité du désordre $\delta = 0.1$. La transition du régime régulier ($\omega_g > \omega_g^c$) vers le régime chaotique ($\omega_g < \omega_g^c$) est clairement visible pour chaque taille de réseau considérée. Afin de suivre cette transition de manière plus quantitative, définissons le bord du chaos ω_g^c tel que $\eta(\omega_g^c/d) = 0.3$. La Figure 2.3b montre η en fonction de décalage de fréquence renormalisé ω_g/ω_g^c . L'encart du bas de cette même figure montre clairement que ω_g^c est une fonction multivaluée de n_q . Ceci peut également être vu sur la Figure 2.3a, par exemple, pour les configurations 6×2 et 4×3 correspondant au même nombre de qubits $n_q = 12$, mais donnant deux courbes η différentes, et, par conséquent, deux valeurs différentes pour ω_g^c . L'encart du haut de la Figure 2.3b montre que ω_g^c semble être décrite par une loi linéaire $\omega_g^c = 1.26 n_y d$. Nous observons également que d'après la Figure 2.3b, la transition vers le chaos devient de plus en plus abrupte à mesure que n_y augmente. Ainsi, pour un réseau de taille 100×100 de spins nucléaires de ^{31}P avec

une distance $b = 4\text{\AA}$ entre plus proche voisins ^{31}P - ^{31}P , un gradient de champ magnétique d'au moins $g_c = 2.8\text{T}/\mu\text{m}$ est nécessaire afin d'éviter l'émergence du chaos quantique dans le hardware statique de l'OQ.

La loi linéaire qui vient d'être trouvée de manière numérique

$$\omega_g^c = Cdn_y, \quad (2.11)$$

où $C \approx 1.3$ est une constante, peut être comprise sur la base du **critère de Åberg** (Åberg, 1990). Ce critère a été proposé pour comprendre les conditions de l'émergence du chaos quantique et de l'ergodicité dans les systèmes quantiques à N -corps. Également, des tests numériques intensifs combinés avec des estimations analytiques ont été effectuées par Benenti, G., Casati, G. et Shepelyansky, D. L., 2001 ; Berman et al., 2001 ; Georgeot et Shepelyansky, 1998, 2000a,b ; Jacquod et Shepelyansky, 1997 ; Shepelyansky, 2001 ; Shepelyansky et Sushkov, 1997 permettant d'établir les conditions de l'émergence du chaos quantique et de la thermalisation dynamique dans une large variété de systèmes quantique à N -corps. D'après les résultats de ces études, le chaos quantique émerge lorsque l'intensité du couplage U devient comparable à l'espacement Δ_c entre les états propres du hamiltonien sans interaction,² i.e. quand $U \sim \Delta_c$. Il est important de noter que Δ_c est exponentiellement plus grand que l'espacement entre les états du système quantique à N -corps. Pour l'OQY, cet espacement est de l'ordre de $\Delta_{n_q} \sim \omega_g n_q 2^{-n_q}$.

Dans notre modèle, en l'absence d'interaction, les registres quantiques sont les états propres $|\phi_i\rangle$ de la partie diagonale H_{diag} (2.8) du hamiltonien (2.7). La partie non-diagonale $H_{\text{non-diag}}$ (2.9) contient des opérateurs de renversement de spin, et, par conséquent, couple les états non-interactifs, permettant alors l'émergence du chaos quantique dans le système. L'ensemble des états non-interactifs $\{|i\rangle = |i_2\rangle\}_{i=0, N_H-1}$ forme la base des $N_H = 2^{n_q}$ registres quantiques. Il est pratique d'écrire $i = i_{10} = \sum_{k=1}^{n_q} a_k 2^{k-1}$ en base binaire, $i_2 = a_{n_q} a_{n_q-1} \dots a_2 a_1$ où $\{a_k \in \{0, 1\}\}_{k=1, \dots, n_q}$. On associe alors $|0\rangle$ à l'état de spin $|\downarrow\rangle$ et $|1\rangle$ à l'état de spin $|\uparrow\rangle$. Par exemple, pour $n_q = 3$, le registre quantique $i = 5$ est l'état $|5\rangle = |101\rangle = |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$. La base des registres quantiques est une base particulièrement intéressante pour effectués les calculs quantiques (Nielsen et Chuang, 2000). Chaque état multi-qubits est alors une combinaison linéaire des registres quantiques $\{|i\rangle\}_{i=0, N_H-1}$.

Afin d'appliquer le critère de Åberg à l'OQY, nous notons que les interactions dipolaires $\{d_{ij} = d/q_{ij}\}_{i \neq j}$ s'évanouissent rapidement lorsque la distance inter-qubit augmente. Ainsi, nous pouvons considérer que seuls les qubits premiers voisins (voire les qubits seconds voisins) sont couplés, et donc $U \sim d$. Pour $\theta \ll 1$, les états couplés par les transitions encodés dans $H_{\text{non-diag}}$ (2.9) subissent un changement d'énergie typique ω_g (cela en supposant que seules quelques lignes³ contribuent) et le nombre de ces transitions est de l'ordre de n_y . Ainsi, $\Delta_c \sim \omega_g/n_y$, ce qui n'est autre que le résultat (2.11). Pour $\theta \sim 1$, les transitions dans une direction perpendiculaire au gradient de champ magnétique dominant, si bien que la relation (2.11) s'écrit maintenant

$$\omega_g^c = Cd\sqrt{n_q}, \quad (\theta \sim 1) \quad (2.12)$$

avec $C \sim 1$.

2. Appelés ci-après **états non-interactifs**.

3. Les lignes sont parallèles à $\vec{e}_y$, ce sont les lignes horizontales de spins de la Figure 2.1.

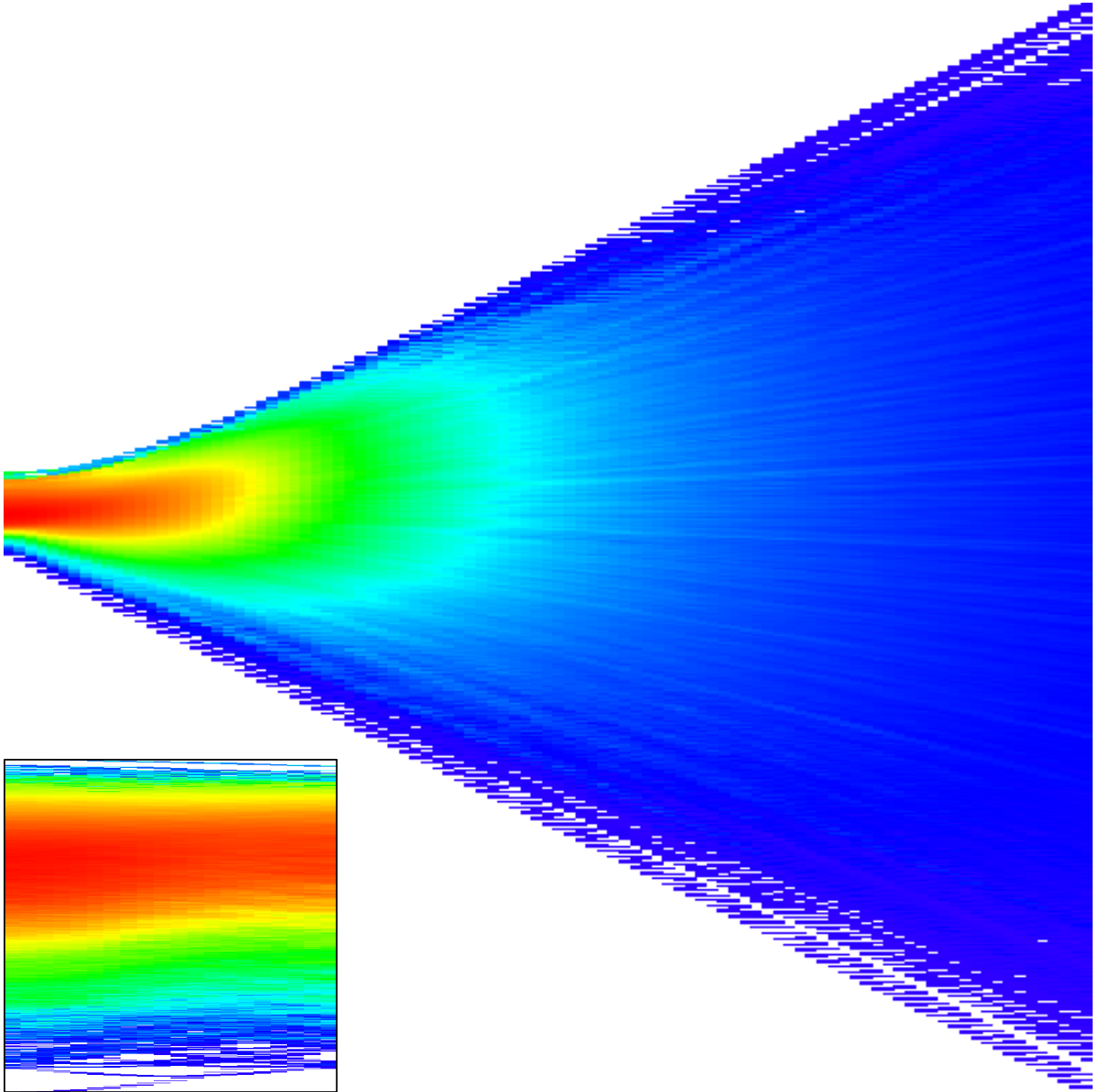


Figure 2.4 – Entropie $\mathcal{S}_n$ en fonction de ω_g/d . Les couleurs sont fonction des valeurs de l'entropie. La couleur rouge (bleu) correspond à $\mathcal{S}_n \approx 13$ ($\mathcal{S}_n = 0$). L'axe horizontal représente les valeurs de ω_g/d avec $\omega_g/d = 0$ (à gauche) et $\omega_g/d = 20$ (à droite). L'axe vertical représente les énergies (en unité arbitraire) des états propres de la bande centrale. La taille du réseau est $n_q = 4 \times 4 = 16$. L'intensité du désordre spatial est $\delta = 0.1$. L'angle associé au gradient de champ magnétique est $\theta = 0.3$. Tous les points de cette figure ont été calculés pour la même réalisation du désordre. Encart : Entropie $\mathcal{S}_n$ pour $\omega_g/d = 4$ en fonction de l'angle θ associé au gradient de champ magnétique. L'axe horizontal représente les valeurs de θ avec $\theta = 0$ (à gauche) et $\theta = \pi/4$ (à droite). L'axe vertical représente les énergies (en unité arbitraire) des états propres de la bande centrale. Tous les points de cette figure ont été calculés pour la même réalisation du désordre, pour la même intensité du désordre, et pour la même taille de réseau. Adaptée de Lages et Shepelyansky, 2006.

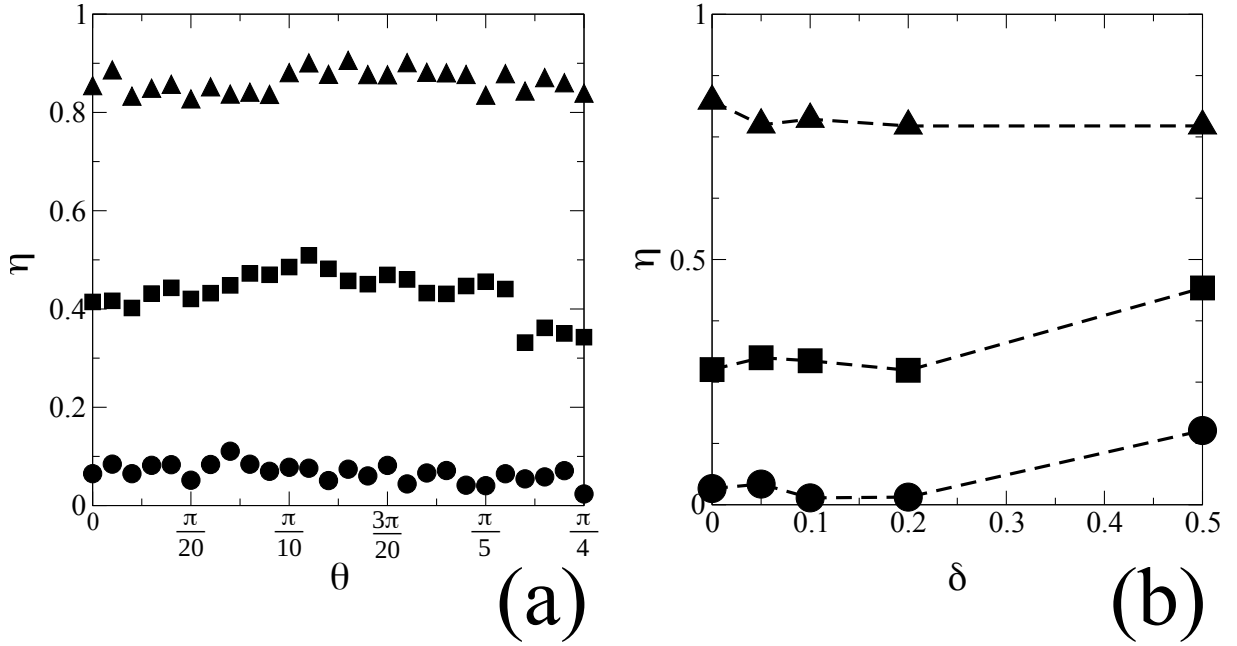


Figure 2.5 – (a) Paramètre η en fonction de l'angle θ associé au gradient de champ magnétique pour $\omega_g/d = 3$ (●), 4 (■), et 7 (▲). L'intensité du désordre spatial est $\delta = 0.1$. La taille du réseau est $n_q = 5 \times 3$. Le nombre de réalisation du désordre est $N_d = 10$. (b) Paramètre η en fonction de, δ , l'intensité du désordre pour $\omega_g/d = 2$ (●), 4 (■), et 6 (▲). L'angle associé au gradient de champ magnétique est $\theta = 0.3$. Les autres paramètres sont identiques à ceux de la figure (a). Adaptée de Lages et Shepelyansky, 2006.

L'émergence du chaos quantique ne se manifeste pas seulement au travers de la distribution des espacements de niveaux, mais aussi au travers de la complexité des états propres quantiques en présence des interactions. Pour illustrer ce fait de manière quantitative, nous définissons la complexité d'un vecteur propre $|\psi_n\rangle$ du hamiltonien (2.7) par son entropie $\mathcal{S}_n = -\sum_{i=1}^{N_H} w_{ni} \log_2 w_{ni}$ où $w_{ni} = |\langle i|\psi_n\rangle|^2$. L'entropie $\mathcal{S}_n$ quantifie la déviation du vecteur propre $|\psi_n\rangle$ par rapport à un état de registre quantique pur. Si $\mathcal{S}_n = 0$, alors $|\psi_n\rangle \propto |n\rangle$ est un état de registre quantique. Si $\mathcal{S}_n = n_q$, alors $|\psi_n\rangle = N_H^{-1/2} \sum_{k=0}^{N_H-1} e^{i\alpha_k} |k\rangle$ tous les états de registre quantique sont présents dans le vecteur propre $|\psi_n\rangle$.⁴ Comme nous nous intéressons plus particulièrement aux états propres de la bande centrale, l'entropie maximale atteignable est $\mathcal{S}_n = \log_2 \binom{n_q}{[n_q/2]} < n_q$ pour un état propre $|\psi_n\rangle$ qui est une superposition équiprobable de tous les registres quantiques $|i\rangle$ tels que $\langle I^z \rangle = 0$ ($\langle I^z \rangle = \pm 1$) pour le cas d'un nombre n_q pair (impair) de qubits.⁵

La Figure 2.4 montre l'entropie $\mathcal{S}_n$ en fonction de ω_g/d pour une intensité du désordre spatial $\delta = 0.1$ et pour un angle $\theta = 0.3$ associé au gradient de champ magnétique. On observe que l'entropie des états propres diminue de manière significative lorsque l'intensité du gradient du champ magnétique augmente. Ainsi, un gradient intense de champ magnétique mène à la suppression du chaos quantique dans le modèle de l'OQY. L'encart de la Figure 2.4 montrer

4. Les phases $\{\alpha_k\}_{k=0, \dots, N_H-1}$ sont, en toute généralité, quelconques.

5. En effet, la symétrie du hamiltonien (2.1) et la condition $\omega_0 \gg \omega_g > d$ garantissent une bande centrale d'états $|\psi_n\rangle$ composés d'une superposition d'états appartenant au secteur de spin $\langle I^z \rangle = n_q \bmod 2$.

l'entropie en fonction de l'angle θ associé au gradient de champ magnétique. En accord avec les estimations théoriques (2.11) et (2.12), l'entropie ne dépend que très marginalement de l'angle θ . Cette constatation est également vraie pour la distribution des écarts de niveaux comme cela est illustré à la Figure 2.5a : le paramètre η ne dépend clairement pas de l'angle θ .

La dépendance du paramètre η vis-à-vis de l'intensité du désordre spatial δ est présentée à la Figure 2.5b. Pour des valeurs de ω_g/d , de faibles à modérées, une augmentation de δ rend le système *plus intégrable*, i.e. η augmente avec δ . Cette tendance est similaire à celle obtenue par Georgeot et Shepelyansky, 2000a,b pour laquelle le désordre stabilise la phase intégrable. Cependant, dans le modèle de l'OQY, cet effet est plus faible. En effet, l'augmentation de δ occasionne une augmentation de Δ_c de tout au plus un facteur deux. À la Figure 2.5b, il est intéressant de noter que même en l'absence de désordre, le système peut complètement être dans un régime de chaos quantique ($\eta \approx 0$) lorsque l'intensité du gradient de champ magnétique est faible ($\omega_g/d \leq 2$). Ceci signifie que pour $\omega_g/d \leq 2$, les interactions dipôle-dipôle entre les qubits conduisent à la fusion du hardware de l'OQ et à la destruction de la base computationnelle idéale.

Afin d'estimer la vitesse de fusion du hardware de l'OQ, nous calculons numériquement la densité d'états locale (voir e.g. Georgeot et Shepelyansky, 2000a,b)

$$\rho_W(\varepsilon - \varepsilon_i) = \sum_n w_{ni} \delta(\varepsilon - \varepsilon_n) \quad (2.13)$$

où ε_i est l'énergie d'un état computationnel idéal $|i\rangle$, état propre du hamiltonien H_{diag} (2.8). La largeur Γ de cette distribution d'énergie donne la vitesse de l'émergence du chaos quantique (Flambaum, 2000 ; Georgeot et Shepelyansky, 2000a,b). Ainsi, dans le régime du chaos quantique, $\omega_g < \omega_g^c$, un nombre exponentiel d'états sont mélangés sur une échelle de temps $1/\Gamma$ (ici $\hbar = 1$). Le nombre d'états mélangés est de l'ordre de Γ/Δ_n où Δ_n est l'espacement typique entre les niveaux d'énergie à N -corps. Pour des couplages faibles entre qubits, la densité $\rho_W(\varepsilon)$ est analogue à une distribution de Breit-Wigner avec une largeur $\Gamma \sim U^2/\Delta_c$ (voir e.g. Flambaum, 2000 ; Georgeot et Shepelyansky, 2000a,b). Pour le cas de l'OQY, on a

$$\Gamma \sim d^2 \frac{\sqrt{n_q}}{\omega_g}. \quad (2.14)$$

Pour des couplages d forts entre qubits (produisant $\Gamma > \Delta_c$), la largeur de la distribution est linéaire en d , $\Gamma \sim dn_q^{1/4}$, de manière analogue aux cas considérés dans Flambaum, 2000 ; Georgeot et Shepelyansky, 2000a,b. Dans ce cas, $\rho_W(\varepsilon)$ est une distribution gaussienne. Nos données numériques pour $n_q = 18$ qubits, montrées à la Figure 2.6, confirment ces formules théoriques. En effet, pour des valeurs de ω_g/d petites, la largeur Γ est indépendante de ω_g et $\rho_W(\varepsilon)$ est une distribution gaussienne ; tandis que pour des valeurs de ω_g/d plus grandes, la densité d'états locale $\rho_W(\varepsilon)$ est une distribution de Breit-Wigner avec $\Gamma \propto 1/\omega_g$ en accord avec (2.14). Pour des valeurs de ω_g/d plus élevées, le système entre dans un régime intégrable $\omega_g > \omega_g^c$ où la relation (2.14) n'est plus valide. Le bord du chaos quantique obtenu analytiquement (2.11) donne $\omega_g^c = 3.9d$, ce qui concorde qualitativement avec le bord approximatif $\omega_g^c \approx 5d$ obtenu à partir des données de la Figure 2.6.

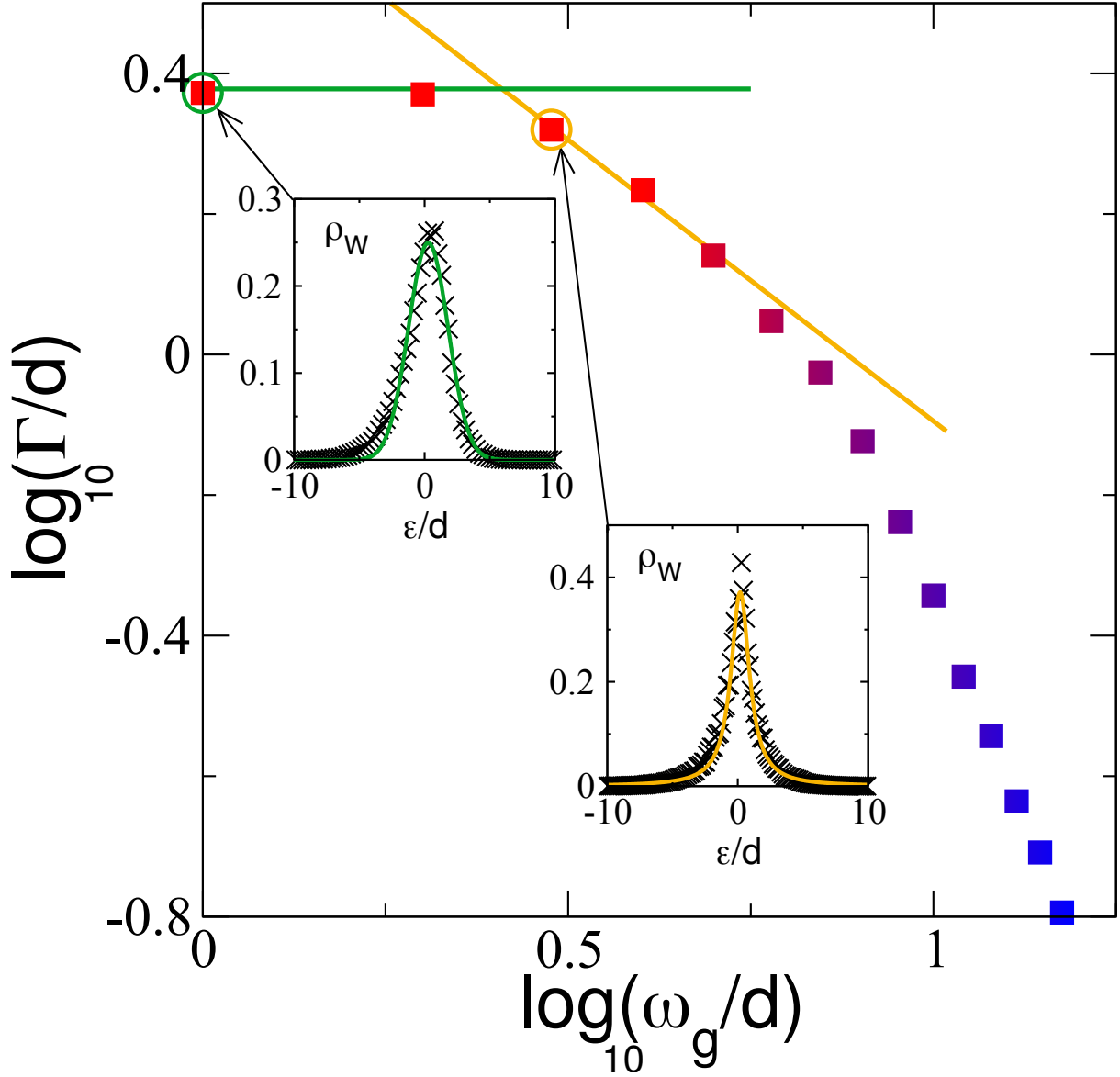


Figure 2.6 – Largeur Γ de la densité d'états locale, ρ_W , en fonction du décalage de fréquence ω_g pour une intensité du désordre $\delta = 0.1$, un angle $\theta = 0.3$, et un nombre de qubits $n_q = n_x n_y = 6 \times 3 = 18$. Le régime gaussien, $\Gamma \propto d$, est indiqué par la ligne (—), et le régime de Breit-Wigner, $\Gamma \propto d^2/\omega_g$, est indiqué par la ligne (—). Encart du bas : exemple de densité d'états locale ρ_W pour $\omega_g/d = 3$; la courbe (—) est le meilleur ajustement d'une courbe de Breit-Wigner de largeur $\Gamma = 2.1d$. Encart du haut : exemple de densité d'états locale ρ_W pour $\omega_g/d = 1$; la courbe (—) est le meilleur ajustement gaussien de largeur $\Gamma = 2.52d$. La transition vers l'intégrabilité s'effectue autour de $\log_{10}(\omega_g/d) \approx 0.7$ qui correspond au bord du chaos quantique (2.11). Le dégradé de couleur de rouge à bleu illustre qualitativement cette transition. Adaptée de Lages et Shepelyansky, 2006.

2.4 Conclusion

Les résultats numériques et analytiques, que nous venons de présenter, permettent d'établir les paramètres du régime dans lequel la base computationnelle idéale de l'ordinateur quantique proposé par Ladd et al., 2002 est robuste vis-à-vis des imperfections existantes des couplages dipôle-dipôle entre les qubits. Nous montrons clairement que la présence d'un gradient de champ magnétique permet de supprimer le chaos quantique au sein du hardware de l'ordinateur quantique si le gradient g est plus grand que le bord du chaos quantique donné par les équations (2.11) et (2.12). Pour les paramètres typiques donnés à la Table 2.1 (e.g., ^{29}Si , $b = 1.9\text{\AA}$), l'OQY est dans un régime stable pour $g \approx 2 \text{ T}/\mu\text{m}$ avec $n_q = 100$ qubits et pour $g \approx 20 \text{ T}/\mu\text{m}$ avec $n_q = 10^4$ qubits. Ces intensités de gradient peuvent être réalisées avec les moyens expérimentaux actuels. Nous avons consacré cette étude aux propriétés du seul hardware quantique et nous avons montré l'existence d'une transition entre des états propres idéaux et chaotiques en présence d'un gradient de champ magnétique et d'imperfections statiques. Au dessus du bord (2.12), le chaos quantique émerge avec une vitesse donnée par Γ (2.14).

Nous devons cependant noter qu'un OQ avec un hardware stable est une condition nécessaire mais pas suffisante pour permettre un calcul quantique de haute précision. En effet, nous n'avons ici analysé que les propriétés statiques de l'OQY. Afin d'envisager une implémentation réaliste de l'OQY, il est nécessaire au préalable de considérer la précision des portes et les effets des imperfections statiques sur la précision d'un algorithme quantique concret (voir e.g. Frahm, Fleckinger et Shepelyansky, 2004). Dans certains cas, une randomisation des séquences de portes quantiques permet de réduire de manière significative le taux d'erreur induit par les imperfections statiques (Kern, Alber et Shepelyansky, 2005 ; Prosen et Znidaric, 2001 ; Viola et Santos, 2006). Cependant, des études plus avancées sont nécessaires afin d'analyser la précision opérationnelle de l'ordinateur quantique de Yamamoto (Ladd et al., 2002) avec des portes quantiques réalistes.

Bibliographie

- Åberg, S. (1990). « Onset of chaos in rapidly rotating nuclei ». *Phys. Rev. Lett.* 64 (26), p. 3119-3122. DOI : [10.1103/PhysRevLett.64.3119](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.3119).
- Abragam, A. (1961). *The Principles of Nuclear Magnetism*. Clarendon Press Oxford.
- Alicki, R. (2002). « Decoherence in quantum open systems revisited ». *arXiv e-prints*, quant-ph/0205173. URL : <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0205173>.
- Benenti, G. et al. (2001). « Efficient Quantum Computing of Complex Dynamics ». *Phys. Rev. Lett.* 87 (22), p. 227901. DOI : [10.1103/PhysRevLett.87.227901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.227901).
- Benenti, G., Casati, G. et Shepelyansky, D. L. (2001). « Emergence of Fermi-Dirac thermalization in the quantum computer core ». *Eur. Phys. J. D* 17.2, p. 265-272. DOI : [10.1007/s100530170031](https://doi.org/10.1007/s100530170031).
- Berman, G. P. et al. (2001). « Delocalization border and onset of chaos in a model of quantum computation ». *Phys. Rev. E* 64 (5), p. 056226. DOI : [10.1103/PhysRevE.64.056226](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.056226).
- Braunstein, S. L. et al. (1999). « Separability of Very Noisy Mixed States and Implications for NMR Quantum Computing ». *Phys. Rev. Lett.* 83 (5), p. 1054-1057. DOI : [10.1103/PhysRevLett.83.1054](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.1054).
- Cerruti, N. R. et Tomsovic, S. (2002). « Sensitivity of Wave Field Evolution and Manifold Stability in Chaotic Systems ». *Phys. Rev. Lett.* 88 (5), p. 054103. DOI : [10.1103/PhysRevLett.88.054103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.054103).
- Cucchietti, F. M. et al. (2002). « Measuring the Lyapunov exponent using quantum mechanics ». *Phys. Rev. E* 65 (4), p. 046209. DOI : [10.1103/PhysRevE.65.046209](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.046209).
- De Raedt, H. et Dobrovitski, V. V. (2004). « Decoherence in Quantum Spin Systems ». In : *Computer Simulation Studies in Condensed-Matter Physics XVI*. Sous la dir. de D. P. Landau, S. P. Lewis et H.-B. Schüttler. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 73-78. ISBN : 978-3-642-59293-5.
- de Sousa, R. et Das Sarma, S. (2003a). « Electron spin coherence in semiconductors : Considerations for a spin-based solid-state quantum computer architecture ». *Phys. Rev. B* 67 (3), p. 033301. DOI : [10.1103/PhysRevB.67.033301](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.67.033301).
- (2003b). « Theory of nuclear-induced spectral diffusion : Spin decoherence of phosphorus donors in Si and GaAs quantum dots ». *Phys. Rev. B* 68 (11), p. 115322. DOI : [10.1103/PhysRevB.68.115322](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.115322).
- DeMille, D. (2002). « Quantum Computation with Trapped Polar Molecules ». *Phys. Rev. Lett.* 88 (6), p. 067901. DOI : [10.1103/PhysRevLett.88.067901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.067901).
- Dobrovitski, V. V. et De Raedt, H. A. (2003). « Efficient scheme for numerical simulations of the spin-bath decoherence ». *Phys. Rev. E* 67 (5), p. 056702. DOI : [10.1103/PhysRevE.67.056702](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.056702).

- Emerson, J. et al. (2002). « Fidelity Decay as an Efficient Indicator of Quantum Chaos ». *Phys. Rev. Lett.* 89 (28), p. 284102. DOI : [10.1103/PhysRevLett.89.284102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.284102).
- Flambaum, V. V. (2000). « Time Dynamics in Chaotic Many-body Systems : Can Chaos Destroy a Quantum Computer ? » *Australian Journal of Physics* 53, p. 489-497. DOI : [10.1071/PH9909](https://doi.org/10.1071/PH9909).
- Flambaum, V. V. et Izrailev, F. M. (2001a). « Entropy production and wave packet dynamics in the Fock space of closed chaotic many-body systems ». *Phys. Rev. E* 64 (3), p. 036220. DOI : [10.1103/PhysRevE.64.036220](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.036220).
- (2001b). « Unconventional decay law for excited states in closed many-body systems ». *Phys. Rev. E* 64 (2), p. 026124. DOI : [10.1103/PhysRevE.64.026124](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.026124).
- Frahm, K. M., Fleckinger, R. et Shepelyansky, D. L. (2004). « Quantum chaos and random matrix theory for fidelity decay in quantum computations with static imperfections ». *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics* 29.1, p. 139-155. ISSN : 1434-6079. DOI : [10.1140/epjd/e2004-00038-x](https://doi.org/10.1140/epjd/e2004-00038-x).
- Fu, K.-M. C. et al. (2004). « Optical detection of the spin state of a single nucleus in silicon ». *Phys. Rev. B* 69 (12), p. 125306. DOI : [10.1103/PhysRevB.69.125306](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.125306).
- Gardiner, C. W. et Zoller, P. (2004). *Quantum noise*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. ISBN : 978-3-540-22301-6.
- Garg, A. (1995). « Suppression of Macroscopic Quantum Coherence in Magnetic Particles by Nuclear Spins ». *Phys. Rev. Lett.* 74 (8), p. 1458-1461. DOI : [10.1103/PhysRevLett.74.1458](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.1458).
- Georgot, B. et Shepelyansky, D. L. (1998). « Integrability and Quantum Chaos in Spin Glass Shards ». *Phys. Rev. Lett.* 81 (23), p. 5129-5132. DOI : [10.1103/PhysRevLett.81.5129](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.5129).
- (2000a). « Emergence of quantum chaos in the quantum computer core and how to manage it ». *Phys. Rev. E* 62 (5), p. 6366-6375. DOI : [10.1103/PhysRevE.62.6366](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.6366).
- (2000b). « Quantum chaos border for quantum computing ». *Phys. Rev. E* 62 (3), p. 3504-3507. DOI : [10.1103/PhysRevE.62.3504](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.3504).
- Goldman, J. et al. (2000). « Magnet designs for a crystal-lattice quantum computer ». *Applied Physics A* 71.1, p. 11-17. ISSN : 1432-0630. DOI : [10.1007/PL00021084](https://doi.org/10.1007/PL00021084).
- Haake, F. (2001). *Signatures of Quantum Chaos*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. ISBN : 978-3-642-05428-0. DOI : [10.1007/978-3-642-05428-0](https://doi.org/10.1007/978-3-642-05428-0).
- Jacquod, P. (2004). « Semiclassical Time Evolution of the Reduced Density Matrix and Dynamically Assisted Generation of Entanglement for Bipartite Quantum Systems ». *Phys. Rev. Lett.* 92 (15), p. 150403. DOI : [10.1103/PhysRevLett.92.150403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.150403).
- Jacquod, P., Adagideli, I. et Beenakker, C. W. J. (2002). « Decay of the Loschmidt Echo for Quantum States with Sub-Planck-Scale Structures ». *Phys. Rev. Lett.* 89 (15), p. 154103. DOI : [10.1103/PhysRevLett.89.154103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.154103).
- Jacquod, P. et Shepelyansky, D. L. (1997). « Emergence of Quantum Chaos in Finite Interacting Fermi Systems ». *Phys. Rev. Lett.* 79 (10), p. 1837-1840. DOI : [10.1103/PhysRevLett.79.1837](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.1837).
- Jacquod, P., Silvestrov, P. et Beenakker, C. (2001). « Golden rule decay versus Lyapunov decay of the quantum Loschmidt echo ». *Phys. Rev. E* 64 (5), p. 055203. DOI : [10.1103/PhysRevE.64.055203](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.055203).

-
- Jalabert, R. A. et Pastawski, H. M. (2001). « Environment-Independent Decoherence Rate in Classically Chaotic Systems ». *Phys. Rev. Lett.* 86 (12), p. 2490-2493. DOI : [10.1103/PhysRevLett.86.2490](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.2490).
- Joos, E. et al. (2003). *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN : 978-3-540-00390-8. DOI : [10.1007/978-3-662-05328-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-05328-7).
- Jordan, A. et Srednicki, M. (2001). « Sub-Planck Structure, Decoherence, and Many-Body Environments ». *arXiv e-prints*, quant-ph/0112139. URL : <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0112139>.
- Karkuszewski, Z. P., Jarzynski, C. et Zurek, W. H. (2002). « Quantum Chaotic Environments, the Butterfly Effect, and Decoherence ». *Phys. Rev. Lett.* 89 (17), p. 170405. DOI : [10.1103/PhysRevLett.89.170405](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.170405).
- Katsnelson, M. et al. (2003). « Destruction of the Kondo effect by a local measurement ». *Physics Letters A* 318.4, p. 445 -451. ISSN : 0375-9601. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2003.08.046>.
- Kern, O., Alber, G. et Shepelyansky, D. L. (2005). « Quantum error correction of coherent errors by randomization ». *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics* 32.1, p. 153-156. ISSN : 1434-6079. DOI : [10.1140/epjd/e2004-00196-9](https://doi.org/10.1140/epjd/e2004-00196-9).
- Ladd, T. D. et al. (2002). « All-Silicon Quantum Computer ». *Phys. Rev. Lett.* 89 (1), p. 017901. DOI : [10.1103/PhysRevLett.89.017901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.017901).
- Lages, J. et Shepelyansky, D. L. (2006). « Suppression of quantum chaos in a quantum computer hardware ». *Phys. Rev. E* 74 (2), p. 026208. DOI : [10.1103/PhysRevE.74.026208](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.026208).
- Lages, J. et al. (2005). « Decoherence by a chaotic many-spin bath ». *Phys. Rev. E* 72 (2), p. 026225. DOI : [10.1103/PhysRevE.72.026225](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.026225).
- Lages, J. (2001). « Excited states of the Cooper problem in a three-dimensional disordered system ». In : *Electronic Correlations : from meso- to nano-physics*. Rencontres de Moriond 2001. Sous la dir. de T. Martin, G. Montambaux et J. Tran Thanh. EDP Sciences. ISBN : 2868835708. URL : <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0105033>.
- Mamin, H. J. et al. (2003). « Detection and Manipulation of Statistical Polarization in Small Spin Ensembles ». *Phys. Rev. Lett.* 91 (20), p. 207604. DOI : [10.1103/PhysRevLett.91.207604](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.207604).
- Mc Hugh, D. et Twamley, J. (2005). « Quantum computer using a trapped-ion spin molecule and microwave radiation ». *Phys. Rev. A* 71 (1), p. 012315. DOI : [10.1103/PhysRevA.71.012315](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.012315).
- Myatt, C. J. et al. (2000). « Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs ». *Nature* 403, p. 269-273. DOI : [10.1038/35002001](https://doi.org/10.1038/35002001).
- Nielsen, M. et Chuang, I. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press. ISBN : 978-1-107-00217-3. DOI : [10.1017/CB09780511976667](https://doi.org/10.1017/CB09780511976667).
- Pashkin, Y. A. et al. (2003). « Quantum oscillations in two coupled charge qubits ». *Nature* 421, p. 823-826. DOI : [10.1038/nature01365](https://doi.org/10.1038/nature01365).
- Pastawski, H. et al. (2000). « A nuclear magnetic resonance answer to the Boltzmann–Loschmidt controversy ? » *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 283.1, p. 166 -170. ISSN : 0378-4371. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00146-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00146-1).
-

- Paz, J. P. et Zurek, W. H. (1999). « Quantum Limit of Decoherence : Environment Induced Superselection of Energy Eigenstates ». *Phys. Rev. Lett.* 82 (26), p. 5181-5185. DOI : [10.1103/PhysRevLett.82.5181](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.5181).
- Poulin, D. et al. (2004). « Exponential Speedup with a Single Bit of Quantum Information : Measuring the Average Fidelity Decay ». *Phys. Rev. Lett.* 92 (17), p. 177906. DOI : [10.1103/PhysRevLett.92.177906](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.177906).
- Prokofev, N. V. et Stamp, P. C. E. (2000). « Theory of the spin bath ». *Reports on Progress in Physics* 63.4, p. 669-726. DOI : [10.1088/0034-4885/63/4/204](https://doi.org/10.1088/0034-4885/63/4/204).
- Prosen, T. et Znidaric, M. (2001). « Can quantum chaos enhance the stability of quantum computation ? » *Journal of Physics A : Mathematical and General* 34.47, p. L681-L687. DOI : [10.1088/0305-4470/34/47/103](https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/47/103).
- (2002). « Stability of quantum motion and correlation decay ». *Journal of Physics A : Mathematical and General* 35.6, p. 1455-1481. DOI : [10.1088/0305-4470/35/6/309](https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/6/309).
- Rugar, D. et al. (2004). « Single spin detection by magnetic resonance force microscopy ». *Nature* 430, p. 329-332. DOI : [10.1038/nature02658](https://doi.org/10.1038/nature02658).
- Shepelyansky, D. L. (2001). « Quantum Chaos and Quantum Computers ». *Physica Scripta* T90.1, p. 112. DOI : [10.1238/physica.topical.090a00112](https://doi.org/10.1238/physica.topical.090a00112).
- Shepelyansky, D. L. et Sushkov, O. P. (1997). « Few interacting particles in a random potential ». *Europhys. Lett.* 37.2, p. 121-126. DOI : [10.1209/epl/i1997-00101-8](https://doi.org/10.1209/epl/i1997-00101-8).
- Simmonds, R. W. et al. (2004). « Decoherence in Josephson Phase Qubits from Junction Resonators ». *Phys. Rev. Lett.* 93 (7), p. 077003. DOI : [10.1103/PhysRevLett.93.077003](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.077003).
- Slichter, C. P. (1990). *Principles of Nuclear Resonance*. Springer - Berlin. DOI : [10.1007/978-3-662-09441-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-09441-9).
- Vandersypen, L. M. K. et Chuang, I. L. (2005). « NMR techniques for quantum control and computation ». *Rev. Mod. Phys.* 76 (4), p. 1037-1069. DOI : [10.1103/RevModPhys.76.1037](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.1037).
- Vandersypen, L. M. K. et al. (2001). « Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance ». *Nature* 414, p. 883-887. DOI : [10.1038/414883a](https://doi.org/10.1038/414883a).
- Viola, L. et Santos, L. F. (2006). « Randomized dynamical decoupling techniques for coherent quantum control ». *Journal of Modern Optics* 53.16-17, p. 2559-2568. DOI : [10.1080/09500340600955633](https://doi.org/10.1080/09500340600955633).
- von Neumann, J. (1955). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press. ISBN : 978-0-691-02893-4.
- Vrijen, R. et al. (2000). « Electron-spin-resonance transistors for quantum computing in silicon-germanium heterostructures ». *Phys. Rev. A* 62 (1), p. 012306. DOI : [10.1103/PhysRevA.62.012306](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.012306).
- Wang, W.-G. et Li, B. (2002). « Crossover of quantum Loschmidt echo from golden-rule decay to perturbation-independent decay ». *Phys. Rev. E* 66 (5), p. 056208. DOI : [10.1103/PhysRevE.66.056208](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056208).
- Weinstein, Y. S. et al. (2002). « Experimental Implementation of the Quantum Baker's Map ». *Phys. Rev. Lett.* 89 (15), p. 157902. DOI : [10.1103/PhysRevLett.89.157902](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.157902).
- Wisniacki, D. A. (2003). « Short-time decay of the Loschmidt echo ». *Phys. Rev. E* 67 (1), p. 016205. DOI : [10.1103/PhysRevE.67.016205](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.016205).

- Yamaguchi, F. et al. (2004). « Efficient decoupling and recoupling in solid state NMR for quantum computation ». *arXiv e-prints*, quant-ph/0411099. URL : <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0411099>.
- Znidaric, M. et Prosen, T. (2003). « Fidelity and purity decay in weakly coupled composite systems ». *Journal of Physics A : Mathematical and General* 36.10, p. 2463-2481. DOI : [10.1088/0305-4470/36/10/307](https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/10/307).
- Zurek, W. H. (2001). « Sub-Planck structure in phase space and its relevance for quantum decoherence ». *Nature* 412, p. 712-717. DOI : [10.1038/35089017](https://doi.org/10.1038/35089017).

Deuxième partie

Dynamique chaotique de matière (noire) autour des systèmes binaires

Table des matières

Présentation	51
3 L'application de Kepler	55
3.1 Problème à 2 corps / Problème de Kepler	55
3.2 Le problème à trois corps circulaire restreint	57
4 L'application de Halley	61
4.1 Frappe du Système solaire	61
4.2 Portrait de phase de la dynamique de 1P/Halley	66
5 L'application noire	67
5.1 Capture de matière noire par le Système solaire	68
5.1.1 Section efficace de capture	69
5.1.2 Injection, évolution, et éjection des particules capturées	71
5.1.3 Masse et distribution spatiale de la matière noire capturée par le Sys- tème solaire	74
5.2 Capture de matière noire par les systèmes binaires	77
5.2.1 Densité de matière noire capturée par un système binaire	78
6 Environnement dynamique des petits corps du Système solaire	83
6.1 Généralisation de l'application de Kepler	86
6.2 Zone chaotique cricum-binaire	89
6.2.1 Détermination analytique du bord du chaos	89
6.2.2 Diagrammes de stabilité et zone chaotique centrale	91
6.3 Ida et Dactyl	95
6.4 Itokawa et <i>Hayabusa</i>	96
6.5 Noyaux cométaires	97
6.6 Capture de matière par les petits corps du Système solaire	104
Conclusion	105
Bibliographie	107

Présentation

Dans cette partie sont présentés des travaux consacrés à certains aspects du chaos dynamique en astronomie et en astrophysique. Le lecteur trouvera ci-dessous une présentation des différents thèmes développés dans les chapitres suivants, ainsi que les principaux résultats obtenus.

Capture chaotique de matière noire par les systèmes binaires La compréhension des propriétés fondamentales de la matière noire reste un des plus grands défis scientifiques actuels. En faisant l'inventaire de toute la matière baryonique dans l'Univers, il est impossible d'expliquer le ballet cosmique qu'exécutent entre elles les galaxies. Ainsi, il manque près de quatre vingt dix pour cent de matière pour comprendre les mouvements des amas de galaxies, le mouvement des étoiles au sein des galaxies, ... Pour sonder efficacement l'Univers à la recherche de matière noire, il est nécessaire de comprendre le mécanisme dynamique de capture des particules de matière noire. Cette capture s'opère principalement autour d'objets massifs tels que, par exemple, notre Système solaire, ou tels que les trous noirs supermassifs existant au sein des galaxies.

Nos travaux (Lages et Shepelyansky, 2013), généralisant l'application symplectique dite de Kepler (voir l'article de revue Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2018), assoient l'importance du chaos dynamique dans la capture de matière noire par le Système solaire : cette capture se fait par l'interaction à trois corps (paradigme du chaos) entre la particule de matière noire, le Soleil (corps primaire) et les planètes du Système solaire (corps secondaires). De toutes les planètes, Jupiter est celle qui permet la capture la plus importante. En effet, c'est la rotation de Jupiter autour du Soleil qui permet la capture de particules provenant du flot de matière noire galactique. Nous avons calculé la masse totale de matière noire ainsi capturée par le Système solaire depuis sa formation. Cette masse, 10^{12}kg à l'intérieur de l'orbite de Neptune, s'avère être faible en comparaison avec la masse typique des objets du Système solaire. La densité de matière capturée à l'intérieur de l'orbite de Jupiter est $\rho_J \approx 5 \times 10^{-29}\text{g.cm}^{-3}$, ce qui est négligeable devant la densité galactique de matière noire, $\rho_G \approx 4 \times 10^{-25}\text{g.cm}^{-3}$. La relative lenteur du mouvement orbital de Jupiter⁶ est la cause de cette relativement faible capture de matière. Cependant, si on compare la densité de matière capturée ρ_J à la densité de matière ρ'_J pouvant effectivement être capturée par Jupiter, on constate une accumulation relativement importante de cette matière dans le Système solaire puisque $\rho_J/\rho'_J \approx 4 \times 10^3$.

La vitesse orbitale étant le facteur limitant, dans le cas où le second corps possède une vitesse orbitale grande par rapport à la vitesse typique des particules du flot galactique, nous avons montré (Rollin, Lages et Shepelyansky, 2015) l'existence d'un accroissement important

6. La vitesse orbitale de Jupiter $\sim 13\text{km/s}$ est bien inférieure à la vitesse moyenne des particules venant du flot galactique $\sim 220\text{km/s}$.

de la densité de matière noire capturée ρ . Ainsi pour des vitesses orbitales typiques d'étoiles gravitant autour de trous noirs supermassifs, on obtient des rapports de densités de matière noire capturée de l'ordre de $\rho/\rho_G \approx 10^4$. Dans ce cas, toutes les particules quelles que soient leurs énergies peuvent être capturées. Un équilibre entre les flots de particules capturées et éjectées s'établit après $\sim 10^7$ périodes orbitales du système binaire. Nous avons également mis en évidence le fait qu'une particule ou même un petit corps happé par un système binaire rapide (trou noir supermassif + étoile compagnon) pouvait être considérablement accéléré une fois éjecté par le système ; ce mécanisme pouvant être à l'origine des planètes errantes ou même d'étoiles hypervéloces (Rollin, Lages et Shepelyansky, 2015).

Ces travaux (Lages et Shepelyansky, 2013 ; Rollin, Lages et Shepelyansky, 2015) montrent également que la densité de matière noire capturée autour d'un système binaire est similaire à la densité de matière noire déduite des profils de vitesses mesurés pour les étoiles dans les galaxies (Rubin, Ford et Thonnard, 1980).

Zones chaotiques autour de petits corps en rotation Les petits corps irréguliers comme les astéroïdes et les noyaux cométaires, avec par conséquent des champs de gravité complexes (Scheeres, 2012b), ont très souvent une forme bilobée qui peut être modélisée, soit par un haltère en rotation (c'est-à-dire, une tige sans masse reliant deux masses ponctuelles m_1 et m_2), soit, de manière équivalente, par un système binaire de contact.

Le cas d'une particule gravitant de manière passive autour d'un petit corps est alors l'analogue du cas, présenté précédemment, d'une particule en orbite autour d'un système binaire. L'application de Kepler peut être ici adaptée (Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017) en prenant en compte le fait que la fréquence de rotation ω du petit corps est en général différente de la fréquence de Kepler ω_0 .⁷ Pour ces petits corps, constitués le plus souvent d'un amoncellement de débris, la fréquence de rotation ω devrait être plus petite que le seuil de désagrégation centrifuge ω_0 . La rotation du petit corps modifie ainsi l'énergie de la particule en orbite autour de celui-ci.

Nous avons analytiquement déterminé l'étendue de la zone chaotique⁸ existant autour d'un petit corps irrégulier en rotation (Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017). La largeur de la composante chaotique autour de la séparatrice (orbite parabolique) permet de déduire le bord du chaos. En calculant l'exposant caractéristique de Lyapunov pour un nombre important de conditions initiales différentes, nous avons corroboré ce résultat analytique. Nous avons entre autre montré que cette zone chaotique autour d'un petit corps (par exemple un astéroïde ou un noyau cométaire) est d'autant plus grande que la fréquence de rotation du petit corps est petite. Ainsi, la zone chaotique est plus de deux fois plus grande pour $\omega/\omega_0 \simeq 0.1$ que pour le cas d'une fréquence de rotation képlérienne $\omega = \omega_0$. Par conséquent, la taille relative de la zone chaotique est plus importante autour d'un petit corps en rotation qu'autour de n'importe quel système binaire.

Nous avons déterminé la zone chaotique autour de l'astéroïde 243 Ida, dont la lune Dactyl est située non loin du bord chaotique, et de l'astéroïde 25143 Itokawa.

L'article (Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017) a fait l'objet d'un *highlight* dans la

7. Fréquence de rotation que l'on obtiendrait dans le cadre du problème à deux corps en considérant les deux lobes m_1 et m_2 comme non matériellement liés l'un à l'autre.

8. Zone dans laquelle une particule initialement sur une trajectoire circulaire adopte rapidement une trajectoire totalement irrégulière.

revue Nature Astronomy (Maltagliati, [2017](#)).

En utilisant les données observationnelles de cinq comètes, 67P/Churyumov-Gerasimenko, 8P/Tuttle, 19P/Borrelly, 103P/Hartley, 1P/Halley, nous avons déterminé la zone chaotique autour de leurs noyaux cométaires, connus pour avoir une forme de système binaire de contact (Lages, Shevchenko et Rollin, [2018](#)). Les temps de Lyapunov associés à ces zones chaotiques ont été estimés. Dans le cas de la comète 1P/Halley, la zone chaotique circumnucléaire englobe l'essentiel de sa sphère de Hill.

Dynamique chaotique de 1P/Halley Nous avons déterminé de manière semi-analytique l'énergie échangée individuellement par les 8 planètes du Système solaire avec la comète de Halley (Rollin, Haag et Lages, [2015](#)). Nous avons retrouvé les résultats semi-empiriques obtenus pour Jupiter et Saturne par Chirikov et Vecheslavov, [1986](#), [1989](#). Notre approche analytique a permis de mettre en évidence l'importance du mouvement du Soleil autour du centre de masse du Système solaire dans la détermination de l'échange d'énergie entre la comète de Halley et le Système solaire. L'échange d'énergie entre une planète et la comète de Halley peut être décomposé en deux termes : un échange purement *képlérien* entre la planète et la comète en supposant le Soleil fixe, et un échange *dipolaire* dû au seul mouvement du Soleil autour du centre de masse du Système solaire. L'*application de Halley* (Rollin, Haag et Lages, [2015](#)), dérivée de l'application de Kepler, donne une description correcte et robuste de la dynamique de 1P/Halley sur une échelle de temps de 10^4 années.

Structure de la partie Le Chapitre [3](#), intitulé [L'application de Kepler](#), est un chapitre introductif rappelant les principales notions des problèmes à 2 et à 3 corps et présentant l'important concept d'application de Kepler que nous utiliserons tout au long de cette partie. Nous illustrons ce concept au Chapitre [4](#), intitulé [L'application de Halley](#), dans lequel nous déterminons la frappe de la comète de Halley par le Système solaire. Dans le Chapitre [5](#), intitulé [L'application noire](#), après avoir introduit l'idée de matière noire, nous mettons en évidence le processus de capture chaotique, qui est le processus de capture principal de matière noire par le Système solaire et, en toute généralité, par n'importe quel système binaire. Nous calculons, entre autres, la masse de matière noire capturée par le Système solaire depuis sa naissance, et nous montrons que le processus de capture chaotique est extrêmement efficace pour des systèmes binaires à grande fréquence orbitale. Enfin, au Chapitre [6](#), intitulé [Environnement dynamique des petits corps du Système solaire](#), nous mettons en évidence une zone chaotique enveloppant ces petits corps dans laquelle un éventuel satellite ne peut trouver d'orbites stables. En généralisant l'application de Kepler à des systèmes binaires dont la fréquence orbitale est non képlérienne, nous montrons que cette zone chaotique circum-binaire est plus étendue pour les petits corps en rotation lente.

Chapitre 3

L'application de Kepler

3.1 Problème à 2 corps / Problème de Kepler

Le problème de Kepler met en jeu deux objets de masses m_1 et m_2 , dont les centres de masse respectifs sont situés en $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ dans un référentiel galiléen, et dont l'énergie d'interaction gravitationnelle est

$$V(r) = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r} = m_1\Phi_{m_2}(r) = m_2\Phi_{m_1}(r). \quad (3.1)$$

Ici, $\mathcal{G}$ est la constante universelle de la gravitation et $r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$ est la distance séparant les centres de masse des deux particules. En adoptant les coordonnées du centre de masse du système composite de masse $M = m_1 + m_2$, ainsi que les coordonnées relatives,

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (3.2)$$

le lagrangien du système à deux corps

$$L(r, \|\dot{\vec{r}}\|, \|\dot{\vec{R}}\|) = M\mathcal{L}_{\text{CM}}(\|\dot{\vec{R}}\|) + \mu\mathcal{L}_{\text{rel}}(r, \|\dot{\vec{r}}\|) = \frac{M}{2}\|\dot{\vec{R}}\|^2 + \frac{\mu}{2}\|\dot{\vec{r}}\|^2 + \frac{\mathcal{G}M\mu}{r} \quad (3.3)$$

décrit le mouvement libre du centre de masse du système global ainsi que le mouvement d'une particule effective de masse réduite $\mu = (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-1}$ soumise à l'attraction gravitationnelle d'une masse M . Le problème de Kepler étant un problème à force radiale, on montre sans peine que le vecteur moment cinétique par unité de masse $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$ est un vecteur conservé dans le temps, le mouvement relatif des deux particules est donc plan. Par conséquent, en utilisant des coordonnées polaires (r, θ) , le lagrangien par unité de masse s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{rel}}(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\mathcal{G}M}{r}. \quad (3.4)$$

L'angle θ apparaît être une coordonnée cyclique, ainsi la quantité $\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{rel}}}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} = \ell$, proportionnelle à la vitesse aréolaire, est une quantité conservée dans le temps (**deuxième loi de Kepler**); c'est la norme du moment cinétique $\vec{\ell}$. L'équation de Lagrange associée à la coordonnée radiale

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mathcal{G}M}{r^2} = \ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} + \frac{\mathcal{G}M}{r^2} = 0 \quad (3.5)$$

redonne ici la projection radiale de la deuxième loi de Newton

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla\Phi_M(r). \quad (3.6)$$

En formant les quantités¹

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \wedge \vec{\ell}) = \ddot{\vec{r}} \wedge \vec{\ell} = -\frac{d\Phi_M}{dr} \vec{e}_r \wedge \vec{\ell} = \frac{GM}{r^2} \ell \vec{e}_\theta \quad (3.7)$$

et

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \theta \vec{e}_\theta = \frac{\ell}{r^2} \vec{e}_\theta, \quad (3.8)$$

on s'aperçoit que le vecteur

$$GM\vec{e} = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{\ell} - GM\vec{e}_r \quad (3.9)$$

est une quantité conservée dans le temps. Dans la littérature, ce vecteur s'appelle le vecteur de Laplace-Runge-Lenz, et le vecteur $\vec{e}$ est le vecteur excentricité. Par construction, on a $\vec{e} \cdot \vec{\ell} = 0$, le vecteur $\vec{e}$ est donc parallèle au plan du mouvement, i.e., au plan défini par les vecteurs position $\vec{r}$ et vitesse $\dot{\vec{r}}$. Le produit scalaire de la position $\vec{r}$ avec le vecteur excentricité $\vec{e}$ donne alors $\vec{r} \cdot \vec{e} = r e \cos \theta = -r + \ell^2/GM$, ce qui permet d'écrire la **première loi de Kepler**

$$r(\theta) = \frac{\ell^2}{GM} \frac{1}{1 + e \cos \theta}. \quad (3.10)$$

Le mouvement relatif plan est donc une conique : un cercle pour $e = 0$, une ellipse pour $0 < e < 1$, une parabole pour $e = 1$, et une hyperbole pour $e > 1$. Au passage, on a fixé la définition de l'angle polaire comme étant $\theta = (\vec{r}, \vec{e})$, ainsi la valeur $\theta = 0$ ($\theta = \pi$) correspond à la direction du péricentre (de l'apocentre). En définissant le demi-grand axe comme $a = \ell^2 / (GM(1 - e^2))$,² la première loi de Kepler peut être réécrite comme

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}. \quad (3.11)$$

Ainsi, deux quantités scalaires indépendantes, e.g., e et a , suffisent à décrire le mouvement relatif. On définit $q = a(1 - e)$ la distance au péricentre et $Q = a(1 + e)$ la distance à l'apocentre. La force gravitationnelle dérivant d'une énergie potentielle, l'énergie

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2} - \frac{GM}{r}, \quad \text{avec } \vec{p} = \dot{\vec{r}}, \quad (3.12)$$

est conservée dans le temps. Il est aisé de la déterminer, e.g., au péricentre, $r(0) = a(1 - e)$, où la vitesse est uniquement orthoradiale, $r\dot{\theta}|_{\theta=0} = \ell / (a(1 - e))$, on obtient alors

$$H = -\frac{GM}{2a}. \quad (3.13)$$

1. On a défini le vecteur radial $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ et le vecteur orthoradial $\vec{e}_\theta$ tel que $d\vec{e}_\theta = d\theta \vec{e}_r$. Avec ces définitions, le trièdre suivant $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{\ell}/\ell)$ est direct.

2. Cette expression peut être aisément obtenue pour une ellipse en calculant $2a = r(0) + r(\pi)$.

Suivant le signe de l'énergie H l'orbite est une ellipse ($H < 0$, état lié, $a > 0$) ou une hyperbole ($H > 0$, état de diffusion, $a < 0$).

En prenant le cas d'une orbite elliptique, l'intégration de la vitesse aréolaire durant une période nous donne

$$\int_t^{t+T} dt \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{\ell T}{2} = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2} \|\vec{r} \wedge \vec{dr}\| = \pi ab \quad (3.14)$$

où l'expression du demi-petit axe b s'obtient avec un peu de géométrie élémentaire, $b^2 = a^2(1 - e^2)$. La **troisième loi de Kepler** est alors

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}. \quad (3.15)$$

3.2 Le problème à trois corps circulaire restreint

Considérons un système dynamique constitué de trois corps dont les masses sont telles que $m_1 \geq m_2 \gg m_3$. Nous considérons que les deux masses primaires m_1 et m_2 gravitent l'une autour de l'autre sur des trajectoires circulaires obéissant au problème de Kepler (et donc non influencées par le troisième corps de masse m_3 négligeable). Avant d'aller plus loin, nous adopterons les dimensions suivantes $\mathcal{G}M = \mathcal{G}(m_1 + m_2) = 1$ et $d = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = 1$, autrement dit la distance entre les masses primaires est égale à 1. Ainsi, la période de rotation (3.15) du système binaire "1+2" est $T = 2\pi$, et son énergie (3.12) est $H = -1/2a$. Le troisième corps, de masse m_3 négligeable devant les masses m_1 et m_2 des deux autres corps, est soumis à l'attraction gravitationnelle de ces dernières.

Supposons le corps de masse m_3 sur une orbite circumbinaire très excentrique. Loin du système binaire, ce corps *ressent* l'attraction gravitationnelle d'une masse ponctuelle $M = m_1 + m_2$ située au barycentre des deux corps primaires. Loin de ce barycentre la dynamique du troisième corps est donnée par le problème de Kepler. Ainsi, par exemple, en considérant à un temps t , le troisième corps à son apocentre, il sera à un temps ultérieur $\simeq t + \pi a^{3/2} =$

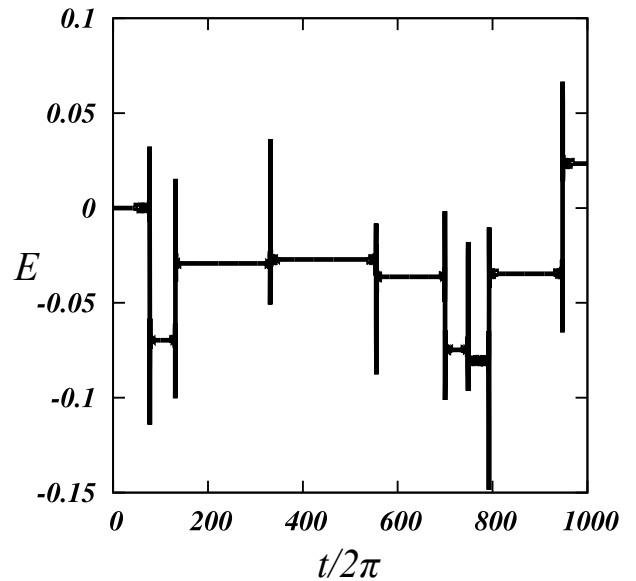


Figure 3.1 – Exemple d'évolution de l'énergie du troisième corps sur une orbite circumbinaire plane. Ici $m_2/m_1 = 0.01 \gg m_3$. Adaptée de Rollin, 2015.

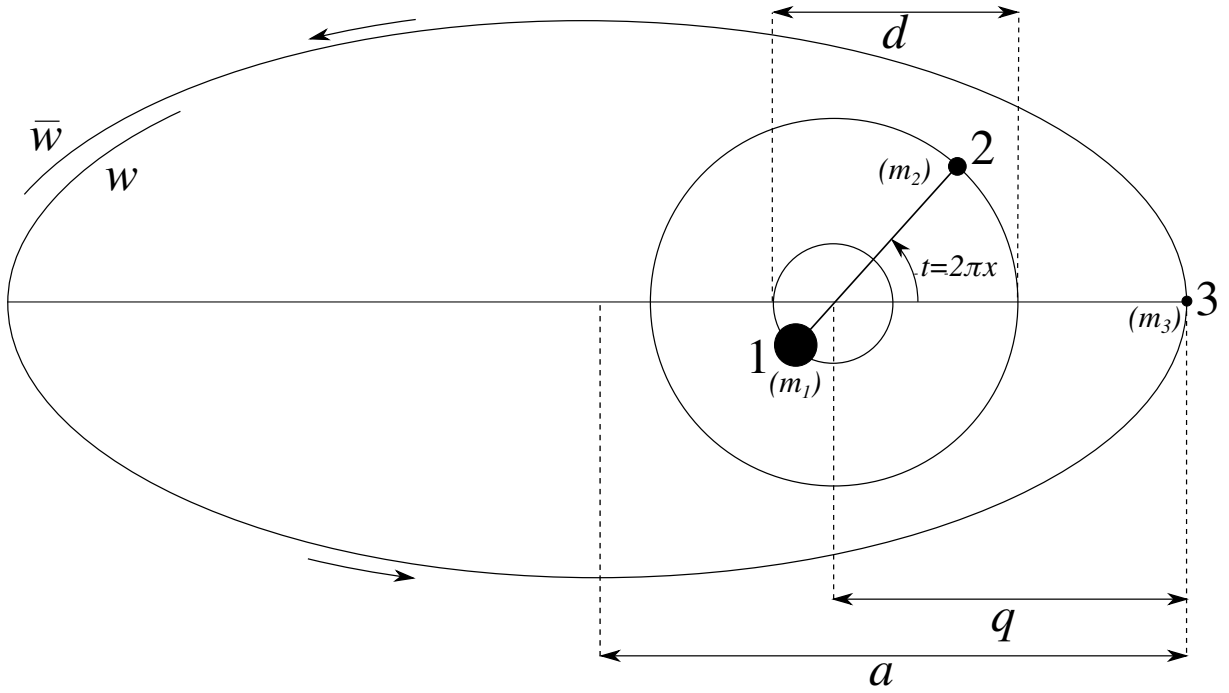


Figure 3.2 – Schéma du problème à trois corps restreint et circulaire. Les trois corps ont des masses $m_1 > m_2 \gg m_3$. Les corps primaires 1 et 2, séparés par une distance d , forment un système binaire. Ces deux corps évoluent sur des orbites circulaires différentes centrées sur leur barycentre commun. Le troisième corps évolue sur une orbite circumbinaire dont le péricentre est q et le demi-grand axe a . Les flèches ainsi que les annotations $\bar{w}$ et w indiquent le sens du mouvement, ici le troisième corps évolue de manière prograde par rapport au système binaire.

$t + \pi(-2E)^{-3/2}$ au voisinage du système binaire. Ici E est l'énergie (3.12) du troisième corps dans le cadre du problème de Kepler à 2 corps. À proximité du système binaire, l'énergie $E = -1/2a$ de la troisième particule et donc son demi-grand axe a sont modifiés. Dans la limite des orbites circumbinaires très excentriques, le temps passé par le troisième corps au voisinage du système binaire est négligeable devant le temps passé loin de celui-ci. Ainsi, il est possible de résumer la dynamique du troisième corps à ces deux équations couplées

$$\begin{aligned}\bar{w} &= w + F(x) \\ \bar{x} &= x + \bar{w}^{-3/2}\end{aligned}\tag{3.16}$$

où l'énergie est redéfinie comme $w = -2E$, ainsi w est comptée positive pour les états liés, et $x = t/T = t/2\pi$ est la phase du système binaire lorsque le troisième corps passe à son "péricentre". La première des équations (3.16) s'apparente à une frappe en énergie subie par la troisième particule lors de son passage au voisinage de son péricentre (w devient $\bar{w}$ après la frappe). Le caractère frappé de l'énergie du troisième corps est illustré à la Figure 3.1 montrant le résultat d'une simulation numérique complète du problème à trois corps restreint, circulaire, et plan. La deuxième des équations (3.16) n'est autre que la troisième loi de Kepler, où $\bar{x}$ est la nouvelle phase calculée à partir de la précédente frappe réalisée pour une phase x du système binaire. La Figure 3.2 illustre la dynamique décrite par les équations (3.16). En toute première approximation, la frappe en énergie $F(x)$ dépend de la position relative des deux corps de masse m_1 et m_2 , par conséquent de la coordonnée x . Plus loin, nous verrons

quelles sont les quantités physiques supplémentaires dont dépend la fonction frappe. L'application bidimensionnelle (3.16) est une application symplectique préservant les volumes dans l'espace des phases (w, x) . Cette application a été d'abord dérivée dans le cadre de l'étude de la dynamique des comètes à longues périodes (Petrosky, 1986), puis de l'étude plus spécifique de la dynamique de la comète de Halley (Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989). De manière indépendante, cette application a été obtenue dans le cadre de l'étude des évolutions classiques (Casati, Guarneri et Shepelyansky, 1987 ; Gontis et Kaulakys, 1987) et quantiques (Casati, Guarneri et Shepelyansky, 1987) des excitations électroniques microondes des états de Rydberg (pour un article de revue voir Shepelyansky, 2012). En toute généralité, nous nommerons **application de Kepler** l'ensemble des deux équations (3.16), même si à l'origine cette appellation, apparue la première fois dans Casati, Guarneri et Shepelyansky, 1987, ne concernait que le cas où la fonction frappe est sinusoïdale, $F(x) \propto \sin(2\pi x)$. Suivant les domaines d'applications des équations (3.16), la fonction frappe prendra des formes spécifiques. Outre l'étude de la dynamique des comètes à longues périodes (voir aussi Emelyanenko, 1990 ; Zhou et al., 2000, pour la description de la diffusion chaotique des comètes et des pluies de météores), de la comète de Halley (voir Chapitre 4), et des processus classiques et quantiques d'ionisations microondes des atomes de Rydberg et des atomes de hydrogènes excités (Shepelyansky, 2012), l'application de Kepler a été utilisée dans le cadre de l'étude du problème de Sitnikov (Heggie et Urminsky, 2009), des probabilités de survie dans un état lié (Borgonovi, Guarneri et Sempio, 1988), de la capture chaotique de matière noire par des systèmes binaires (voir les sections 5.1 et 5.2), de la dynamique chaotique de particules autour de petits corps du Système solaire (voir Chapitre 6). Une description historique de l'application de Kepler est donnée dans Shevchenko, 2011 et Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2018.

Chapitre 4

L'application de Halley

L'exemple de la dynamique chaotique de la comète de Halley va nous permettre d'illustrer les différentes façons de construire la fonction frappe $F(x)$ de l'application symplectique de Kepler (3.16), que nous nommerons ici **l'application de Halley**.

4.1 Frappe du Système solaire

La comète 1P/Halley gravite autour du centre de masse du Système solaire, ce dernier étant quasiment confondu avec le centre de masse du Soleil (voir par exemple l'illustration dans Meeus, 1952). Le dernier passage au périhélie de la comète 1P/Halley remonte au 9 février 1986. À cette occasion, Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989 ont construit la fonction frappe $F(x)$ exercée par le Système solaire sur la comète de Halley en utilisant les dates de passage au périhélie de la comète entre -1403 et 1986 numériquement calculées par Yeomans et Kiang, 1981 et Kolyuka, Tarasov et Tikhonov, 1985. Parmi ces dates, seules les 28 dates les plus récentes peuvent être corroborées par des observations recensées dans la littérature. Ainsi, d'après (3.16), trois dates successives,¹ $t_{n-1} = x_{n-1}T$, $t_n = x_nT$, et $t_{n+1} = x_{n+1}T$, permettent de reconstruire la fonction frappe pour x_n , à savoir $F(x_n) = (x_{n+1} - x_n)^{-2/3} - (x_n - x_{n-1})^{-2/3}$. En formant tous les triplets de dates successives, il est possible d'échantillonner la fonction frappe $F(x)$. L'argument de la fonction frappe s'entend modulo 1 puisque la fonction frappe est une fonction périodique. En première approximation, le Système solaire peut être considéré comme un système binaire constitué du Soleil de masse $M_\odot$ et de la planète Jupiter de masse $M_{J_+} \ll M_\odot$. Ainsi, la période du système binaire est la période de Jupiter, $T = T_{J_+}$. La fonction frappe construite par Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989 est montrée par les points rouges dans le panneau associé à Jupiter de la Figure 4.1. En modélisant par une série de Fourier $F_{J_+}(x)$ la fonction frappe obtenue, et en traçant la fonction $F - F_{J_+}$ en fonction de la phase de Saturne, $y = t/T_{S_+}$, on obtient une fonction frappe dont la principale composante est la contribution de Saturne, $F_{S_+}(y)$. Cette contribution de Saturne est montrée par les points rouges dans le panneau associé à Saturne de la Figure 4.1.

Nous avons calculé de manière semi-analytique la frappe du Système solaire $F(x)$ subie par la comète de Halley (Rollin, Haag et Lages, 2015). Considérons le soleil de masse $1 - \mu$ et les huit planètes du Système solaire dont la masse totale est $\mu = \sum_{i=1}^8 \mu_i \ll 1$. Nous

1. Ces deux dates doivent être ici données dans les unités choisies précédemment.

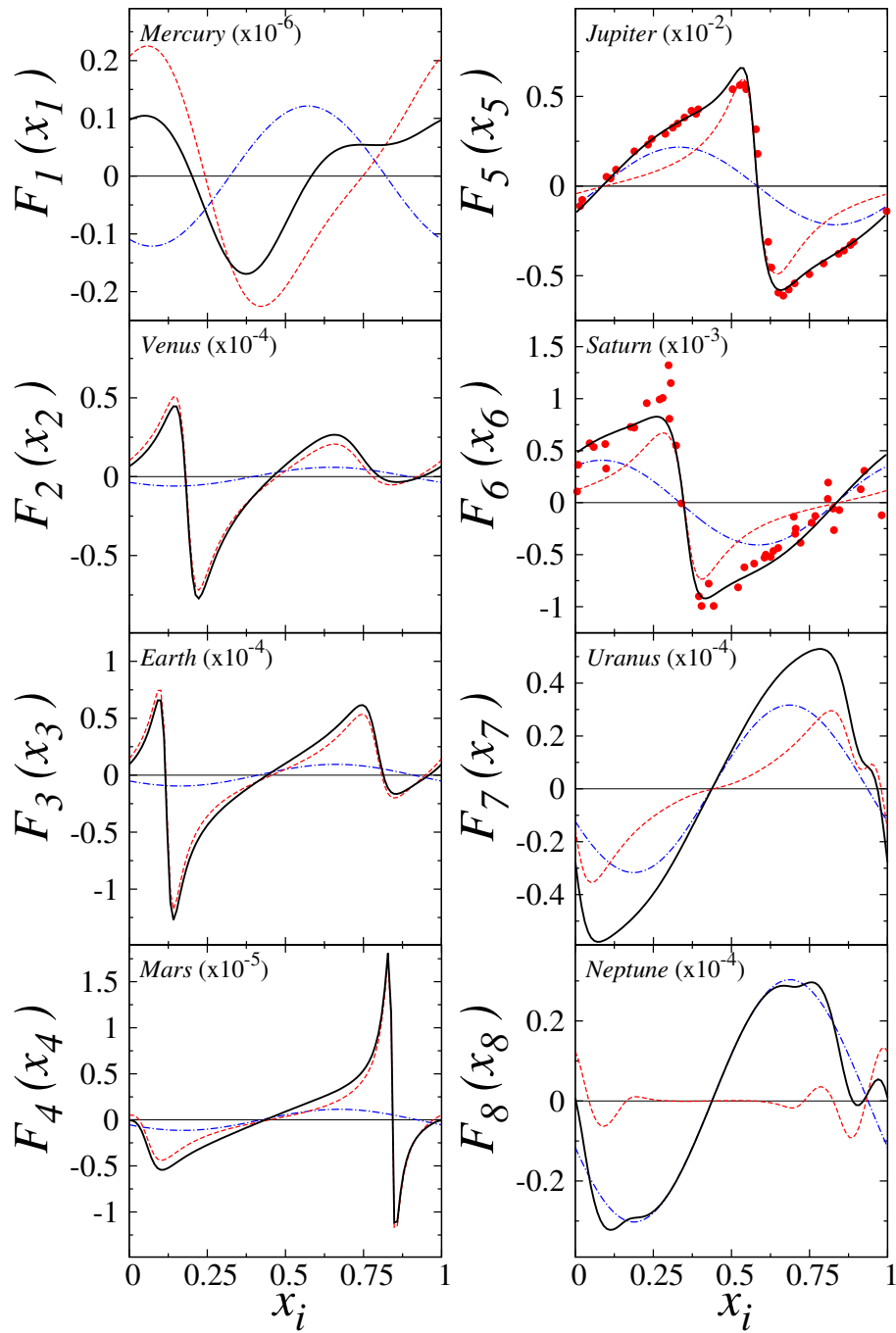


Figure 4.1 – Contributions des huit planètes à la fonction frappe du Système solaire $F(x)$ subie par 1P/Halley. Sur chaque panneau, la contribution $F_i(x_i)$ est obtenue par le calcul de l'intégrale de Melnikov (ligne noire), la ligne rouge (la ligne bleue) en pontillés montre la contribution képlérienne (la contribution dipolaire) à l'intégrale de Melnikov. Sur les panneaux de Jupiter et Saturne, les fonctions frappe extraites par analyse de Fourier des dates issues de l'observation et du calcul numérique sont montrées (•, voir Figure 2 dans Chirikov et Vecheslavov, 1986). D'après Rollin, Haag et Lages, 2015.

$$\begin{aligned}
e &\simeq 0.9671, & q &\simeq 0.586 \text{ au}, \\
i &\simeq 162.3^\circ, & \Omega &\simeq 58.42^\circ, \\
\omega &\simeq 111.3^\circ, & T_0 &\simeq 2446467.4 \text{ JD}
\end{aligned}$$

Table 4.1 – Éléments orbitaux de l'orbite osculatrice de 1P/Halley calculés lors de son passage au périhélie le 9 février 1986. Ces données ont été obtenues auprès de NASA JPL HORIZONS Solar System dynamics, <http://ssd.jpl.nasa.gov>.

considérons les huit planètes sur des trajectoires circulaires de rayons $a_1 < a_2 < \dots < a_8$ et dont le centre est le barycentre du Système solaire. Nous fixons à 1 le rayon de l'orbite circulaire de Jupiter, $a_5 = a_J = 1$. Les vitesses orbitales des planètes $\{v_i\}_{i=1,\dots,8}$ sont telles que $v_i^2 = (1 - \sum_{j=i}^8 \mu_j) a_i^{-1} \simeq a_i^{-1}$. Nous poserons égale à 1 la vitesse orbitale de Jupiter, $v_5 = 1$. Dans le repère barycentrique, le mouvement du Soleil $\vec{r}_\odot$ est tel que $(1 - \mu) \vec{r}_\odot = -\sum_{i=1}^8 \mu_i \vec{r}_i$, et le potentiel gravitationnel subi par la comète est

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= -\frac{1 - \mu}{\|\vec{r} - \vec{r}_\odot\|} - \sum_{i=1}^8 \frac{\mu_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} \\
&= \Phi_0(r) \left[1 + \sum_{i=1}^8 \mu_i \left(-1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} + \frac{r}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} \right) + o(\mu^2) \right] \quad (4.1)
\end{aligned}$$

où $\Phi_0(r) = -1/r$ est le potentiel gravitationnel créé par la totalité de la masse du Système solaire localisée au barycentre.

Les éléments orbitaux de l'orbite osculatrice $\mathcal{C}_0$ calculés lors du dernier passage de la comète 1P/Halley au périhélie sont donnés à la Table 4.1. La fonction frappe, autrement dit, la variation de l'énergie de la comète lors de son prochain passage au périhélie est donnée par

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_8) = -2 \oint_{\mathcal{C}_0} \nabla (\Phi_0(r) - \Phi(\vec{r})) \cdot d\vec{r}. \quad (4.2)$$

Ici on choisit comme référence temporelle $x = x_5 = x_J$, les autres phases x_i associées aux autres planètes découlant de la troisième loi de Kepler. Afin d'obtenir la fonction frappe pour toutes les phases x , l'intégration est réalisée sur l'orbite $\mathcal{C}_0$ en changeant les configurations initiales des planètes évoluant sur des orbites circulaires. Nous avons vérifié que nos résultats ne changent pas pour des orbites planétaires plus réalistes prenant en compte les éléments orbitaux actuels. L'expression (4.2) donne le travail² qu'il est nécessaire de fournir à la comète pour la contraindre à suivre l'orbite osculatrice $\mathcal{C}_0$. À l'ordre μ , la fonction frappe devient

$$\begin{aligned}
F(x) &= F(x_1, \dots, x_8) \\
&\simeq -2 \sum_{i=1}^8 \mu_i \oint_{\mathcal{C}_0} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^3} - \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} \right) \cdot d\vec{r} \\
&\simeq \sum_{i=1}^8 F_i(x_i). \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Il apparaît que la fonction frappe du Système solaire se décompose en huit contributions distinctes $\{F_i(x_i)\}_{i=1,\dots,8}$ associées aux huit planètes. Ces différentes frappes planétaires sont

2. Au facteur -2 près.

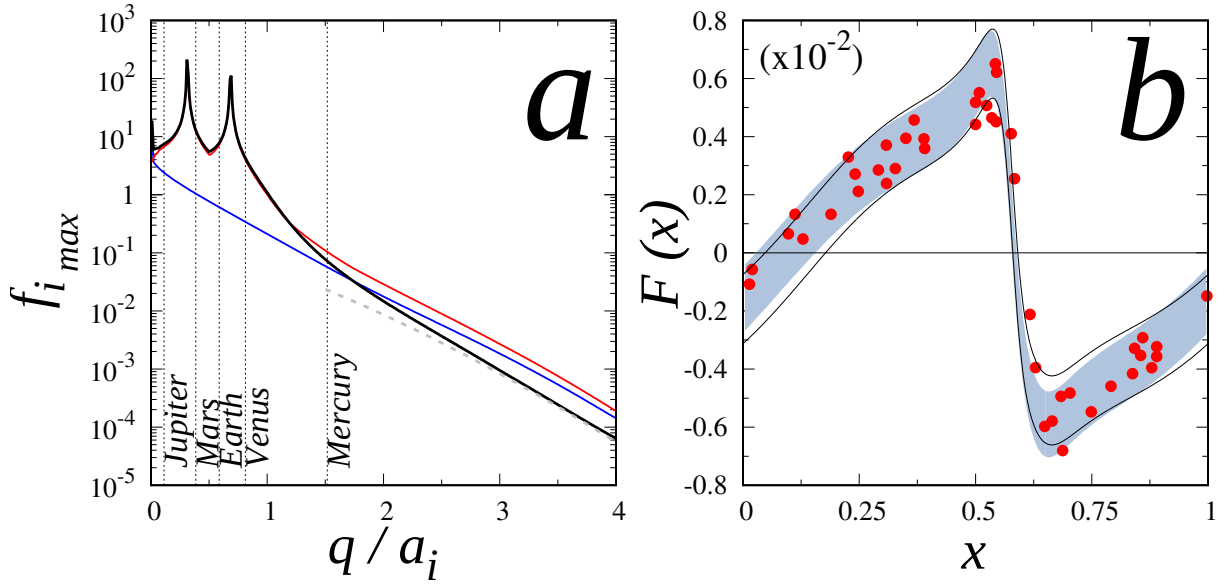


Figure 4.2 – Panneau a : amplitude maximale de la forme de la fonction de frappe $f_i(x_i)$ (ligne noire épaisse) en fonction de la distance au péricentre q/a_i . La ligne rouge (la ligne bleue) donne l'amplitude maximale de la contribution képlérienne (dipolaire). La courbe grise en pointillés est proportionnelle à $(q/a_i)^{-1/4} \exp(-2^{3/2} (q/a_i)^{3/2} / 3)$. Les lignes verticales en pointillés indiquent les positions relatives des planètes. À cette échelle, les positions relatives de Uranus et Neptune ne sont pas représentées. Panneau b : domaine de variation de la fonction frappe du Système solaire $F(x)$ (zone bleutée) en fonction de la phase de Jupiter $x = x_5$. La largeur de la variation est $\Delta F \simeq 0.00227$. Les données provenant d'observations et de calculs numériques extraites de la Figure 1 de l'article Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989 sont reportées (•). Les lignes donnent les limites de la fonction frappe du Système solaire $F(x)$ calculées pour des orbites réalistes des planètes en utilisant les éléments orbitaux récents. D'après Rollin, Haag et Lages, 2015.

tracées à la Figure 4.1. Nos calculs numériques directs corroborent les résultats obtenus pour les frappes de Jupiter et de Saturne par la méthode de Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989 employant la succession des dates de passages au périhélie observées/calculées de la comète de Halley. La méthode de Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989 montrant une certaine limite à l'obtention de la fonction frappe pour Saturne (voir la dispersion des points rouges dans le panneau correspondant de la Figure 4.1), notre méthode permet d'obtenir cette frappe pour n'importe quelle planète. On remarquera que la description en dent de scie de la fonction frappe n'est qu'une particularité partagée par Jupiter et Saturne, et que la description sinusoidale (Petrosky, 1986; Petrosky et Broucke, 1988) est une approximation relativement crue pour la comète de Halley. L'équation (4.3) fait apparaître que la fonction frappe associée à chaque planète est constituée d'un potentiel képlérien inversement proportionnel à la distance entre la comète et la planète (terme en rouge) et d'un potentiel issu d'un dipole gravitationnel tournant (terme en bleu). Le potentiel képlérien résulte de l'interaction gravitationnelle directe entre la planète et la comète en oubliant le mouvement du Soleil dans le repère barycentrique. Le potentiel dipolaire provient du mouvement du Soleil autour du barycentre du Système solaire effectif composé du Soleil et de la planète considérée. Cette contribution dipolaire, sinusoidale,

est une composante non négligeable de la fonction frappe pour les quatre planètes externes qui agissent ainsi indirectement sur la comète de Halley en influençant le mouvement du Soleil ; le cas extrême étant Neptune qui agit principalement sur 1P/Halley au travers de ce processus. À l'exception de Neptune, la contribution directe du potentiel képlérien est la composante principale de la fonction frappe, notamment pour Venus, la Terre, et Mars pour lesquelles la contribution dipolaire est quasiment négligeable. Le cas de Mercure est particulier car la comète de Halley possède une trajectoire circumbinaire vis-à-vis du système binaire Soleil-Mercure.^{3 4} La comète 1P/Halley ressent alors l'interaction gravitationnelle de deux dipôles gravitationnels tournant en opposition de phase ; ceci est clairement visible sur la Figure 4.1.

La fonction frappe du Système solaire $F(x)$, avec $x \in [0, 1[$ la phase de Jupiter, est une fonction multivaluée. Pour une phase de Jupiter donnée, même si les planètes ont des fréquences orbitales proches de résonances entières, il existe une infinité de configurations $\{x_1, \dots, x_4, x_6, \dots, x_8\}$ possibles pour les autres planètes. La fonction frappe du Système solaire $F(x)$ est néanmoins représentée à la Figure 4.2b au travers de son domaine de variation. Celui-ci comprend effectivement les données brutes obtenues traitées par Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989.

Pour une planète, la fonction frappe $F_i(x_i)$ doit dépendre de la masse μ_i de la planète et de sa vitesse orbitale v_i , ainsi $F_i(x_i) = \mu_i v_i^2 f_i(x_i)$. La forme de la fonction frappe $f_i(x_i)$ est alors indépendante de la planète ou de n'importe quel autre corps pour lesquels la fonction frappe est calculée. L'amplitude maximale $f_{i\max}$ de la forme de la fonction frappe $f_i(x_i)$ ne peut alors dépendre que d'un paramètre adimensionné, ici, q/a_i , le rapport entre la distance au péricentre q et la taille a_i du système binaire Soleil-planète. L'amplitude $f_{i\max}$ est tracée à la Figure 4.2a pour les éléments orbitaux de 1P/Halley (Table 4.1) et pour toutes planètes virtuelles situées à une distance entre 0 et $4q$ du barycentre Soleil-planète, où q est la distance au périhélie de 1P/Halley.⁵ Pour $0.2 \lesssim q/a_i \lesssim 1$, l'amplitude $f_{i\max}$ est essentiellement dominée par le potentiel képlérien ; avec des divergences dues à des rencontres proches pour $q \simeq 0.3a_i$ et $q \simeq 0.7a_i$. Pour $q/a_i \gtrsim 1$, l'amplitude $f_{i\max}$ est construite à partir des deux contributions képlérienne et dipolaire, s'atténuant l'une l'autre comme dans le cas de la fonction frappe de Neptune. Une régression non linéaire sur le domaine $1.5 \lesssim q/a_i \lesssim 4$ donne une dépendance $f_{i\max} \sim \exp(-2.7q/a_i)$ consistante avec le résultat analytique $\sim (q/a_i)^{-1/4} \exp(-2^{3/2} (q/a_i)^{3/2} / 3)$ obtenu pour le cas bidimensionnel⁶ (Heggie, 1975 ; Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017 ; Lages, Shevchenko et Rollin, 2018 ; Petrosky, 1986 ; Petrosky et Broucke, 1988 ; Roy et Haddow, 2003 ; Shevchenko, 2011, 2015).⁷ Ce comportement analytique est reporté sur la Figure 4.2 (courbe grise en pointillés).

3. L'archétype d'une trajectoire circumbinaire est illustré à la Figure 3.2.

4. Le distance au périhélie de 1P/Halley est $q \simeq 0.586\text{au}$ alors que la distance à l'aphélie de Mercure est $Q \simeq 0.467\text{au}$ et que la distance au périhélie de Venus est $q \simeq 0.728\text{au}$.

5. Voir également l'animation à l'adresse <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/publications/sm/sm21.html>.

6. I.e, pour le cas où les orbites des trois corps sont coplanaires.

7. Ce résultat analytique a été obtenu par Petrosky, 1986 ; Petrosky et Broucke, 1988 pour le cas de comètes à trajectoires quasi-paraboliques, était déjà contenu dans Heggie, 1975, a été retrouvé par Roy et Haddow, 2003 dans le cadre général du problème à trois corps non restreint, a été retrouvé par Shevchenko, 2011 et généralisé au cas $m_1 \sim m_2$ (Shevchenko, 2015), et a été généralisé par Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017 ; Lages, Shevchenko et Rollin, 2018 au cas de systèmes binaires dont la vitesse de rotation est non képlérienne.

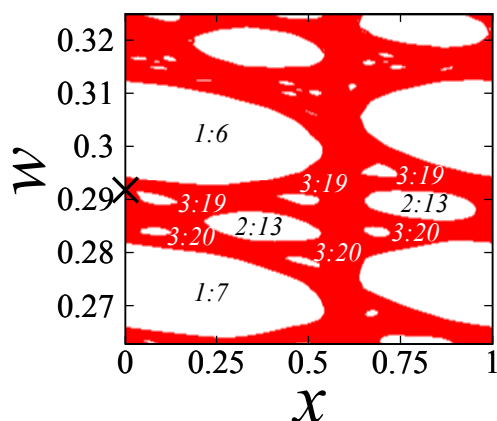


Figure 4.3 – Section de Poincaré de l'application de Halley générée à partir de la fonction frappe de Jupiter, $F_5(x)$ (zone rouge). La croix (X) donne l'état de 1P/Halley ($x = 0, w \simeq 0.2921$) lors de son dernier passage en 1986. Les résonances entières $p : n$ associées aux îlots de stabilité sont notées. Adaptée de Rollin, Haag et Lages, 2015.

4.2 Portrait de phase de la dynamique de 1P/Halley

La dynamique de la comète 1P/Halley peut être décrite par l'application de Halley, i.e., l'application de Kepler (3.16) pour laquelle la fonction frappe $F(x)$ est celle du Système solaire. Cette fonction frappe étant multivaluée, nous choisissons d'illustrer le portrait de phase de l'application de Halley (Figure 4.3) pour la fonction frappe de Jupiter, $F_5(x)$, qui est la composante principale (comparer Figure 4.1 et Figure 4.2b) de la fonction frappe du Système solaire (4.3). Cette figure est obtenue en itérant un très grand nombre de fois l'application symplectique (3.16).

Le portrait de phase est ici centré sur l'énergie de la comète de 1P/Halley calculée lors de son passage au périhélie en 1986. On peut observer que la comète de Halley se trouve dans la composante chaotique et que sa dynamique est freinée actuellement par les résonances entières avec Jupiter. Le couple 1P/Halley – Jupiter est notamment proche de la résonance 1:6. Cette division nette entre composante chaotique et îlots de stabilité est rapidement perturbée (sur une échelle de ~ 500 périodes de Jupiter) si on additionne à la fonction frappe jovienne, $F_5(x)$, les autres fonctions frappe $F_i(x)$ produites par les autres planètes. Les îlots de stabilité associés à la fonction frappe de Jupiter sont alors “poreux”, la comète de Halley peut alors être temporairement emprisonnée dans l'un d'eux, ralentissant ainsi sa diffusion dans l'espace des phases (Rollin, Haag et Lages, 2015).

L'application de Halley, dont la fonction frappe a été construite à l'aide de l'orbite osculatrice de 1P/Halley en 1986, ne permet pas de simuler fidèlement sa dynamique au-delà ~ 500 périodes joviennes. En effet, parallèlement à la diffusion en énergie ou en demi-grand axe $w = a^{-1}$, il s'opère également une diffusion des autres éléments orbitaux, tels que par exemple la distance au périhélie q ou l'inclinaison i .⁸ Néanmoins il est possible d'estimer numériquement que le séjour de la comète de Halley dans le Système solaire durera $\sim 10^{7\sim 8}$ années (Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989 ; Rollin, Haag et Lages, 2015).

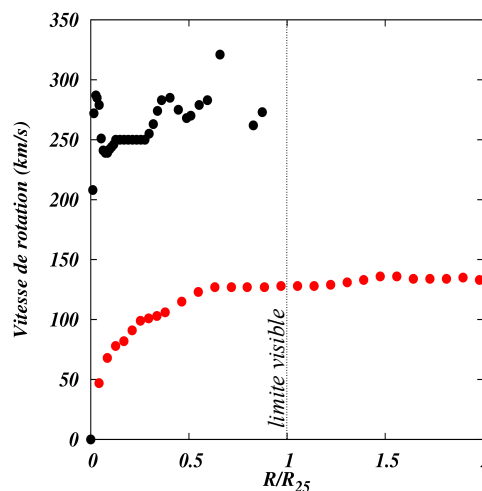
8. Sans compter le processus d'évaporation non pris en compte ici mais discuté brièvement dans Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989.

Chapitre 5

L'application noire

Le concept de matière noire fut introduit par Zwicky, 1933, 1937 pour expliquer la stabilité de l'amas de la Chevelure de Bérénice.¹ Au sein de cet amas, la distribution de vitesse des galaxies, calculée d'après les observations, n'est pas conforme à celle prédite par le théorème du viriel. Les galaxies ont des vitesses trop élevées qui aurait dû mener à la dissipation de cet amas (Zwicky, 1933, 1937). À défaut de remettre en cause les lois de la gravitation universelle, une masse importante de matière – la matière noire – manque pour assurer la stabilité de l'amas.

Figure 5.1 – Courbes de vitesse de rotation de la matière dans les galaxies UGC 2885 et NGC 2403 en fonction de la distance au centre des galaxies normalisée à R_{25} , rayon limite où la brillance de surface d'une galaxie atteint 25 magnitude par seconde d'arc au carré. Les points noirs représentent la courbe de vitesse de rotation pour UGC 2885 (Rubin, Ford et Thonnard, 1980) pour des distances au centre galactique inférieures à la limite visible R_{25} , les points rouges représentent la courbe de vitesse de rotation pour NGC 2403 (Begeman, 1987). Adaptée de Rollin, 2015.



Fin des années 1970, Rubin, Ford et Thonnard, 1980 montrèrent que les distributions de vitesse des étoiles à l'intérieur de vingt et une galaxies de type spirale ne sont pas képlériennes², celles-ci, au-delà d'une certaine distance au centre de la galaxie, restent à peu près constantes jusqu'à la limite visible des galaxies. Les observations au-delà de la limite visible des galaxies, basées sur la raie spectrale à 21cm de l'hydrogène, ont permis (Begeman, 1987) de confirmer le caractère plat des distributions de vitesses de rotation de la matière galactique (voir Figure 5.1).

Tout en gardant les lois actuelles de la gravitation universelle, l'apparente stabilité des galaxies et des amas de galaxies peut être expliquée par l'enchâssement de ses structures dans des halos de matière noire (Ostriker et Peebles, 1973). Cette matière noire est non baryonique

1. Egalement appelé amas de Coma faisant allusion à la constellation Coma Berenices.

2. Loin du centre galactique, la vitesse de rotation des étoiles devrait suivre une loi du type $v \sim \sqrt{M(r)/r} \sim 1/\sqrt{r}$.

et n'est sensible qu'à l'interaction gravitationnelle. Cette simple définition de la matière noire suffit pour la compréhension des travaux présentés ci-après. Nous orientons le lecteur intéressé par le sujet vers l'ouvrage de Sanders, 2010 présentant un historique complet et vers l'article de revue de Bertone, Hooper et Silk, 2005 présentant les développements récents et notamment les particules pouvant potentiellement jouer le rôle de particules de matière noire.

Nous remarquerons que le concept de halo de "masse noire" (dark mass dans le texte) a été largement accepté par l'ensemble de la communauté lors du 100ème symposium de l'Union Astronomique Internationale, intitulé "Internal Kinematics and Dynamics of Galaxies" et organisé à l'Observatoire de Besançon. On peut lire dans le compte rendu de ce symposium, "If the symposium were to have voted, I suspect a majority would have resolved that [...] flat rotation curves imply dark mass [...] which] resides in the halo" (Burton, 1983).

5.1 Capture de matière noire par le Système solaire

Si la matière noire existe, celle-ci constitue la majeure partie de la masse de l'Univers (voir par exemple Bertone, Hooper et Silk, 2005). Le Système solaire est alors balayé par un flot de matière noire galactique et il apparaît intéressant de comprendre le mécanisme de capture de celle-ci par le Système solaire. On suppose que le flot de matière noire arrivant aux abords du Système solaire possède une distribution des vitesses maxwellienne

$$f(v)dv = \sqrt{54/\pi} v^2 / u^3 \exp(-3v^2/2u^2) dv \quad (5.1)$$

où $u \simeq 220 \text{ km.s}^{-1}$ est la vitesse moyenne des particules de matière noire (Bertone, Hooper et Silk, 2005; Peter, 2009). La densité de masse de matière noire galactique est estimée à $\rho_g \sim 4 \times 10^{-25} \text{ g.cm}^{-3}$ (Bertone, Hooper et Silk, 2005).

Nous modélisons le Système solaire par un système binaire "Soleil+Jupiter".³ Dans le référentiel associé au barycentre du système binaire, nous considérons que les trajectoires du Soleil et de Jupiter sont circulaires. Avec les unités adimensionnées adoptées à la section 3.2, nous avons $\mathcal{G}(m_\odot + m_{\text{J}}) = 1$, la distance Soleil-Jupiter est $\|\vec{r}_{\text{J}} - \vec{r}_\odot\| = 1$, et la période de rotation du système binaire est $T = 2\pi$. La vitesse orbitale de Jupiter⁴ est alors $v_{\text{J}} = 1$ et la vitesse moyenne des particules de matière noire galactique devient $u \simeq 17$. Nous redéfinissons l'énergie E d'une particule de matière noire de masse $m_\bullet$ comme $w = -2E/m_\bullet v_{\text{J}}^2$. Ainsi, loin du Système solaire dans le cadre du problème à 2 corps, "particule+Système solaire", les particules liées (non liées) au Système solaire, i.e., avec une énergie $E < 0$ ($E > 0$), donc $w > 0$ ($w < 0$), ont des orbites elliptiques (hyperboliques) dont le foyer est le barycentre du Système solaire. Les particules de matière noire provenant du flot galactique ont initialement des trajectoires hyperboliques avec $w < 0$.

Une rapide estimation de l'intensité de la fonction frappe du Système solaire sur une particule de matière noire donne (Khriplovich et Shepelyansky, 2009; Lages et Shepelyansky, 2013)

$$F \sim \frac{m_{\text{J}}}{m_\odot} v_{\text{J}}^2 \simeq 10^{-3}. \quad (5.2)$$

3. Une capture ne peut se faire dans le cadre du problème à 2 corps, au moins 3 corps sont nécessaires, ici le Soleil, Jupiter et la particule de matière noire.

4. Dans les unités du système international, $v_{\text{J}} \simeq 13 \text{ km.s}^{-1}$.

Les particules pouvant être capturées par le Système solaire ont des énergies $|w| < |w_{\text{cap}}| \simeq 10^{-3}$ bien plus faibles que l'énergie cinétique moyenne des particules de matière noire provenant du flot galactique, $|w_u| = u^2 \simeq 289 \gg |w_{\text{cap}}|$. Les particules candidates à la capture ont par conséquent des trajectoires quasi-paraboliques puisque avec une distance au péricentre $q \sim 1$, l'excentricité est ici $e = 1 - q/a = 1 - qw \simeq 1$. La simulation numérique exacte d'un flot important de particules dont les trajectoires sont quasi-paraboliques est une tâche ardue requérant un temps de calcul conséquent. Dans l'étude de Peter, 2009, la dynamique de $\sim 10^4$ particules a pu être simulée. Pour ce type de trajectoires quasi-paraboliques, la particule de matière noire passe le plus clair de son temps loin du Système solaire qui est alors vu, par elle, comme un point matériel. Les équations du problème à 2 corps, plus précisément les lois de Kepler, suffisent à décrire le mouvement. Il n'y a qu'aux abords immédiats du Système solaire que la particule ressent effectivement une frappe décrite par les équations du problème à 3 corps et induite par les effets gravitationnels du système binaire "Soleil+Jupiter". La description de la dynamique des particules de matière noire pouvant être capturées par le Système solaire peut alors être convenablement faite via une application symplectique, **l'application noire**. Pour chaque particule diffusée par le Système solaire, il est possible de déterminer la fonction frappe $F_{q,i,\underline{\omega}}(x)$ qui dépend de la phase x du système binaire lors du passage de la particule au péricentre et qui dépend des éléments orbitaux $q, i, \underline{\omega}$ de l'orbite osculatrice d'approche de la particule.⁵ Ainsi, en déterminant les fonctions frappe pour une distribution isotrope de particules arrivant sur le Système solaire, il est possible de simuler un nombre important de particules, $N_{\text{tot}} \sim 10^{14}$ (Lages et Shepelyansky, 2013), chacune étant régie par l'application noire, i.e., l'application symplectique (3.16) pour laquelle la fonction frappe, $F_{q,i,\underline{\omega}}(x)$, a été au préalable calculée.

5.1.1 Section efficace de capture

Le moment cinétique, par unité de masse, d'une particule arrivant de l'infini par rapport au Système solaire est $\ell = bv$ où b désigne le paramètre d'impact et v la vitesse de la particule à l'infini. La section efficace de diffusion σ est alors définie par $d\sigma = 2\pi b db = \pi d(\ell^2/|w|)$ où $w = -v^2$ est l'énergie de la particule à l'infini. Sachant que le paramètre d'impact peut également s'écrire $b = -a\sqrt{e^2 - 1}$, on a

$$d\sigma(q, w) = \pi d\left(q^2 + \frac{2q}{|w|}\right). \quad (5.3)$$

La section efficace de diffusion pour des particules initialement sur des trajectoires dont la distance au périhélie s'étend jusque q_{lim} est

$$\sigma(w) = \pi q_{\text{lim}}^2 + \frac{2\pi}{|w|} q_{\text{lim}}. \quad (5.4)$$

Pour $q_{\text{lim}} \sim 1$ et $|w| \ll 1$, la section efficace de diffusion des particules d'énergie w se comporte comme $\sigma(w) \sim |w|^{-1}$. La section efficace de capture d'une particule d'énergie initiale w est

$$\sigma_{\text{cap}}(w) = \left\langle \int_{q=0}^{q \rightarrow \infty} d\sigma(q, w) p(w, q, i, \underline{\omega}) \right\rangle_{i, \underline{\omega}} \quad (5.5)$$

5. Ici q est la distance au péricentre, i l'inclinaison, et $\underline{\omega}$ l'argument du péricentre. Le demi-grand axe $a = w^{-1}$ est déterminé après chaque frappe du Système solaire et la longitude de nœud ascendant Ω est un élément orbital non pertinent vu que le système binaire est circulaire.

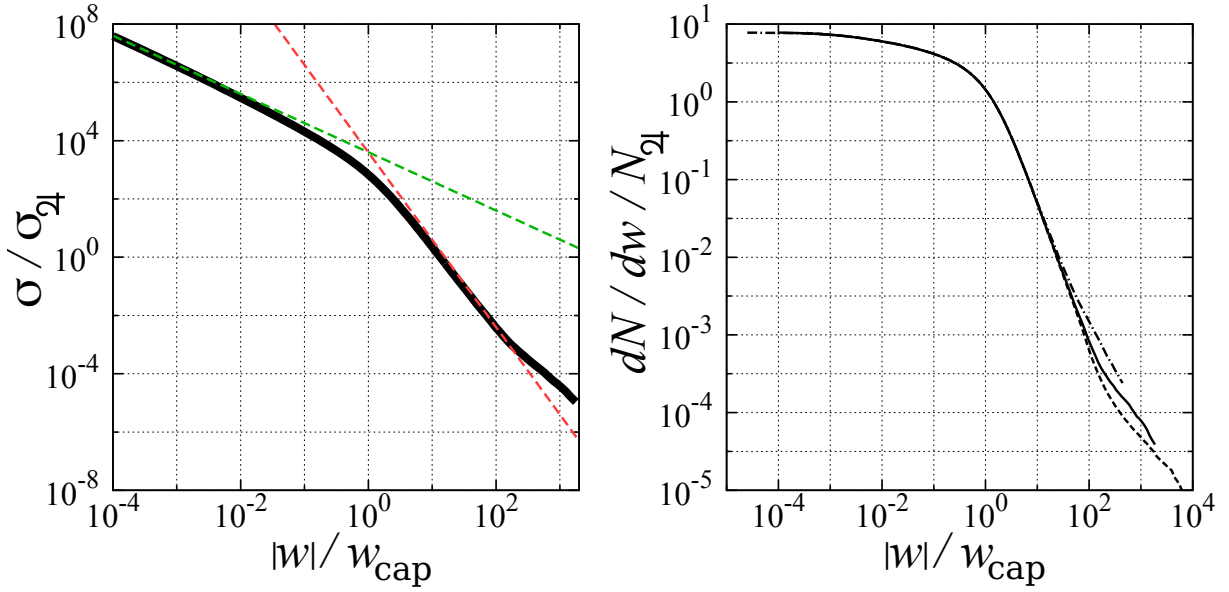


Figure 5.2 – À gauche : section efficace de capture de matière noire $\sigma(w)$ (due à la rotation de Jupiter) en fonction de l'énergie w des particules de matière noire incidentes. Les lignes pointillées représentent les comportements $\sigma(w) \propto w^{-1}$ et $\sigma(w) \propto w^{-2}$. À droite : nombre de particules capturées par élément infinitésimal dw et par unité de temps en prenant en compte la capture par Jupiter (—), Saturne (----), et une planète fictive de masse $m_p/m_\odot = 0.004$ (.....). Adaptée de Lages et Shepelyansky, 2013.

où les crochets désignent la moyenne sur toutes les trajectoires de demi-grand axe w^{-1} et de distance au péricentre q . La probabilité qu'une particule d'énergie w et d'éléments orbitaux $\{w^{-1}, q, i, \underline{\omega}\}$ soit capturée après la frappe du Système solaire est,

$$p_{\text{cap}}(w, q, i, \underline{\omega}) = \int_0^1 dx \Theta(w + F_{q,i,\underline{\omega}}(x)), \quad (5.6)$$

où $\Theta(y) = (|y| + y)/2|y|$ est la fonction de Heaviside égale à 1 (nulle) si son argument est positif (négatif).

À l'aide de l'expression (5.6), la section efficace de capture (5.5) a été calculée numériquement en utilisant une méthode de Monte Carlo simulant de manière isotrope et homogène toutes les trajectoires d'approches $(q, i, \underline{\omega})$. Définissons $\sigma_J = \pi r_J^2$, l'aire associée à l'orbite de Jupiter considérée comme circulaire de rayon r_J et dont le centre est le barycentre du Système solaire. Définissons également $w_{\text{cap}} = m_J/m_\odot v_J^2 \approx 10^{-3}$ l'énergie typique de capture par Jupiter. La Figure 5.2 (à gauche) montre clairement que la section efficace de capture se comporte comme

$$\sigma(w)/\sigma_J \approx \pi \frac{m_\odot}{m_J} \left(\frac{w_{\text{cap}}}{|w|} \right)^\alpha \quad (5.7)$$

et que celle-ci exhibe deux comportements en fonction de l'énergie des particules incidentes :

- pour $|w| < w_{\text{cap}}$, la décroissance est linéaire $\alpha = 1$ en accord avec l'estimation analytique donnée par Khriplovich et Shepelyansky, 2009,
- pour $|w| > w_{\text{cap}}$, la décroissance est quadratique $\alpha = 2$.

Les rencontres proches⁶ produisent des frappes dont l'intensité dépasse w_{cap} de plusieurs ordres de grandeur.⁷ Ces rencontres proches sont susceptibles de capturer des particules dont l'énergie est $|w| \gg w_{\text{cap}}$. Or pour ce domaine en énergie, la section efficace de capture est plus petite que l'aire σ_{γ_+} et de plus décroît rapidement comme $\sim w^{-2}$. Les rencontres proches semblent jouer un rôle négligeable dans la capture de matière noire par le Système solaire invalidant les résultats de Gould et Alam, 2001 ; Lundberg et Edsjö, 2004 qui supposent que la capture s'effectue uniquement lors de rencontres proches. A contrario, la capture est ici un mécanisme à très longue portée puisque la section efficace de capture dépasse de plusieurs ordres de grandeur la surface enclose par la trajectoire de Jupiter, cette section efficace de capture croît linéairement comme $|w|^{-1}$ à mesure que $|w|$ décroît.

La Figure 5.2 (à droite) montre, $dN = n_g \sigma(w) f(w) dw/2$, le nombre de particules capturées par élément infinitésimal dw et par unité de temps. On a ici défini la densité de particules noires galactiques n_g telle que $\rho_g = n_g m_{\bullet} \sim 4 \times 10^{-25} \text{g.cm}^{-3}$ (Bertone, Hooper et Silk, 2005), et la distribution de vitesse à l'infini $f(w)$ (5.1) réécrite en fonction de $w = v^2$. On s'aperçoit que le nombre de particules noires capturées chute de manière quadratique pour des énergies $|w| > w_{\text{cap}}$ confirmant la faible participation des rencontres proches dans le processus global de capture. On remarque que quelle que soit la planète ravisseuse considérée (Jupiter, Saturne...), $N_{\gamma_+}^{-1} dN/dw$ ⁸ n'est fonction que de w/w_{cap} où w_{cap} est l'énergie typique de capture par la planète.

5.1.2 Injection, évolution, et éjection des particules capturées

Nous simulons un flot continu de matière noire provenant de l'infini et diffusant au travers du Système solaire modélisé par le système binaire Soleil+Jupiter. La distribution par unité de temps des particules incidentes est $dN \propto v f(v) dv dq \propto f(w) dw dq$. L'injection, l'évolution et l'éjection des particules sont gouvernées par l'application noire associée. Les particules arrivant de façon isotrope sur le Système solaire,

- l'injection d'une particule se fait sur une trajectoire hyperbolique initiale dont les éléments orbitaux sont $(a = w^{-1} < 0, q, i, \omega)$. La particule a une probabilité $p_{\text{cap}}(w, q, i, \omega)$ d'être éventuellement capturée si $|w| < \max_{x \in [0,1]} \{F_{q,i,\omega}(x)\}$,
- l'évolution dynamique d'une particule capturée est simulée par l'application noire, c'est-à-dire l'application symplectique (3.16) où la fonction frappe est $F(x) = F_{q,i,\omega}(x)$, l'évolution autour du système binaire perdure tant que $w > 0$,
- l'éjection d'une particule préalablement capturée se produit quand, après un nombre donné de frappe, l'énergie w devient à nouveau négative.

Sur un laps de temps, $t_S = 4.5 \times 10^9$ années, correspondant à l'âge du Système solaire, nous avons injecté $N_H = N_0 N_i = 4 \times 10^9$ particules de matière noire ayant des énergies comprises dans l'intervalle $0 < |w| \leq w_H \approx 0.005$, ce qui correspond à l'injection virtuelle de $N_{\text{tot}} = 1.5 \times 10^{14}$ particules sur l'intervalle en énergie $0 < |w| < \infty$. Ici w_H est l'énergie typique de capture de la comète 1P/Halley par Jupiter (voir Figure 4.1). La différence entre

6. C'est-à-dire lorsque une particule de matière noire pénètre l'immédiat voisinage du Soleil ou de Jupiter.

7. Voir l'intensité de la frappe autour de $q/a_i \approx 0.3$ et $q/a_i \approx 0.7$ dans le cas de la comète 1P/Halley sur l'animation <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/publications/sm/sm21.html>.

8. Où $N_{\gamma_+} = \int_0^1 n_g \sigma_{\gamma_+} f(w) dw/2$ est le nombre de particules de matière noire traversant l'orbite de Jupiter par unité de temps.

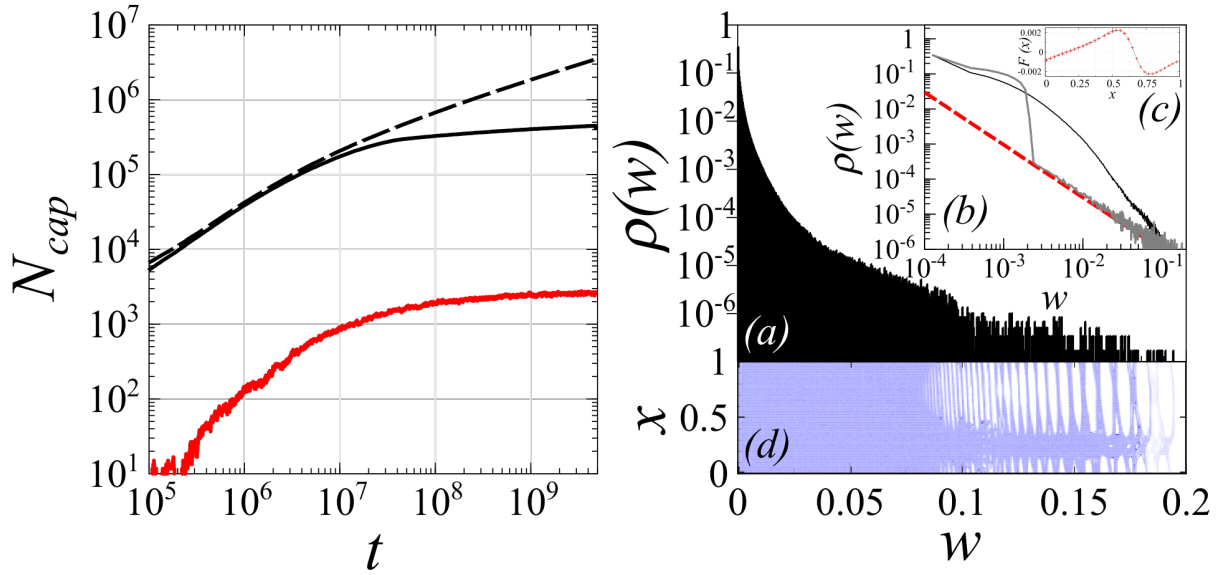


Figure 5.3 – À gauche : évolution du nombre de particules de matière noire capturées par le Système solaire en fonction du temps t (compté en années). Les différentes courbes correspondent aux particules capturées avec des énergies $w > 0$ (particules sur des trajectoires avec demi-grand axes non bornés, ----), $w > 4 \times 10^{-5}$ (particules sur des trajectoires avec demi-grand axes inférieurs à la moitié de la distance entre les Systèmes solaire et Alpha du Centaure, —), et $w > 1/20$ (particules sur des trajectoires avec demi-grand axes inférieurs à 100 ua, —). À droite : (a) Densité moyenne de particules capturées $\rho(w) \propto dN/dw$ au temps $t = t_S = 4.5 \times 10^9$ années. (b) Densité moyenne de particules capturées $\rho(w)$ (courbe noire) et densité de particules capturées ayant été initialement injectées avec les éléments orbitaux $w < 0$, $q = 1.5$, $i = 0.7$, $\underline{\omega} = 0$ (courbe grise). La ligne droite en pointillés rouges indique une décroissance $\propto w^{-3/2}$. (c) Fonction frappe associée aux éléments orbitaux précités. (d) Section de Poincaré obtenue par l'application noire (3.16) avec la fonction frappe montrée en (c). Adaptée de Lages et Shepelyansky, 2013.

N_{tot} et N_H correspond au nombre de particules qui ne peuvent pas être capturées. Nous choisissons de manière isotrope $N_0 = 4 \times 10^5$ trajectoires hyperboliques, dont les éléments orbitaux sont tels que $q \in [0, 4]$,⁹ $i \in [0, \pi]$, et $\underline{\omega} \in [0, 2\pi]$, et sur lesquelles nous injectons N_i particules d'énergies $w \in [-w_H, 0]$ arrivant au péricentre lorsque le système binaire Soleil+Jupiter possède une phase x .

La Figure 5.3 (gauche) montre l'évolution du nombre de particules capturées, N_{cap} , par le système binaire Soleil+Jupiter. Sans donner de limite spatiale, ce nombre ne sature pas, les particules d'énergie $w \simeq 0$ s'accumulent dans le Système solaire non borné. Par exemple une particule d'énergie $w \lesssim 2 \times 10^{-6}$ capturée à la naissance du Système solaire n'a toujours pas eu le temps de revenir aux abords de celui-ci.¹⁰ En bornant le Système solaire, le nombre

9. Au-delà de $q = 4$ l'intensité de la fonction frappe devient négligeable. En prenant l'exemple de l'orbite osculatrice de 1P/Halley, on observe Figure 4.2 que pour $q = 4$, l'intensité maximale de la fonction frappe est de l'ordre de $\sim 10^{-7}$.

10. En d'autres termes, la pseudo-période de la trajectoire de ces particules est plus grande que l'âge du Système solaire.

de particules capturées, N_{cap} , sature à partir d'un temps $t \sim 10^7$ années (Figure 5.3 courbes pleines noire et rouge). Ce temps, indépendant de la taille considérée pour le Système solaire, est du même ordre que le temps de vie de la comète de Halley dans le Système solaire estimé numériquement par Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989 et Rollin, Haag et Lages, 2015. Après ce temps de saturation, le système est à l'équilibre avec un nombre de particules capturées constant, i.e., le flot de particules injectées est compensé par le flot de particules éjectées par le Système solaire. La densité moyenne de particules capturées, $\rho(w)$, est montrée à la Figure 5.3 (droite). On voit que la densité moyenne de particules capturées est lisse jusqu'aux abords de $w \approx 0.1$, au-delà la densité est fortement non lisse, cela est dû aux îlots de stabilité (interdits aux particules capturées) associés avec les résonances entre la période de l'orbite osculatrice des particules d'énergie w et la période orbitale de Jupiter. Un exemple de densité de particules capturées et initialement injectées suivant une orbite osculatrice donnée est montrée également à la Figure 5.3 (droite, panneau b). La fonction frappe $F(x)$ associée à cette orbite osculatrice est montrée au panneau c de cette même figure. Pour cet exemple, on observe que les particules capturées n'ayant pas eu le temps d'être frappées un grand nombre de fois, i.e., les particules avec énergies $w \lesssim \max_{x \in [0,1]} F(x) \simeq 0.002$, constituent un réservoir de particules avec une forte densité. Les particules capturées, dont les énergies sont $w \gtrsim \max_{x \in [0,1]} F(x) \simeq 0.002$, ont subi un grand nombre de frappes en énergie. Pour ces dernières, le mouvement est pleinement stochastique. Leur densité décroît comme $\rho(w) \sim w^{-3/2}$, et croît donc proportionnellement à la période orbitale d'une particule d'énergie w . La dynamique des particules capturées est alors totalement ergodique. La diffusion chaotique des particules est stoppée par une courbe invariante de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) aux alentours de $w_{\text{Ch}} \approx 0.2$. Cette limite supérieure à la diffusion en énergie peut être estimée analytiquement en utilisant le critère de recouvrement des résonances de Chirikov, 1979. L'application noire (3.16) peut être linéarisée autour d'une résonance $\alpha:\beta$ ¹¹ associée à l'énergie $w_0 = (\alpha/(2\pi\beta))^{2/3}$. Prenons $w = w_0 + v$, où $v \ll 1$, l'application noire s'écrit alors

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v + F(\theta) \\ \bar{\theta} &= \theta + \underbrace{2\pi w_0^{-3/2} - 3\pi w_0^{-5/2} \bar{v}}_{\bar{I}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

où $\theta = 2\pi x$ et I sont de nouvelles variables angle-action. La fonction frappe $F(x)$ est une fonction périodique s'apparentant en première approximation à une fonction sinusoïdale $F(\theta) \simeq A \sin(\theta)$ où $A \sim m_{\text{J}}/M_{\odot}$ (voir par exemple la fonction frappe sur la Figure 5.3 droite, panneau c). L'application précédente peut s'écrire alors sous la forme de l'application standard de Chirikov, 1979 (voir aussi l'article de revue Chirikov et Shepelyansky, 2008)

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I - K \sin(\theta) \\ \bar{\theta} &= \theta + \bar{I} \end{aligned} \quad (5.9)$$

où $K = 3\pi w_0^{-5/2} A$. Selon le critère de recouvrement des résonances (Chirikov, 1960; Shepelyansky, 2009), le chaos généralisé est réalisé pour $K \sim 1$ (Greene, 1979). Ainsi, la diffusion chaotique est stoppée aux alentours de $w_{\text{Ch}} = (3\pi A)^{2/5}$. Pour la fonction frappe utilisée à la Figure 5.3 droite, on a $A \simeq 0.002$, ce qui donne un bord du chaos à $w_{\text{Ch}} \simeq 0.2$ conforme à ce que nous pouvons observer sur la section de Poincaré présentée à la Figure 5.3 (droite).

11. Ici, la particule effectue α passages au péricentre pendant que Jupiter effectue β révolutions ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$).

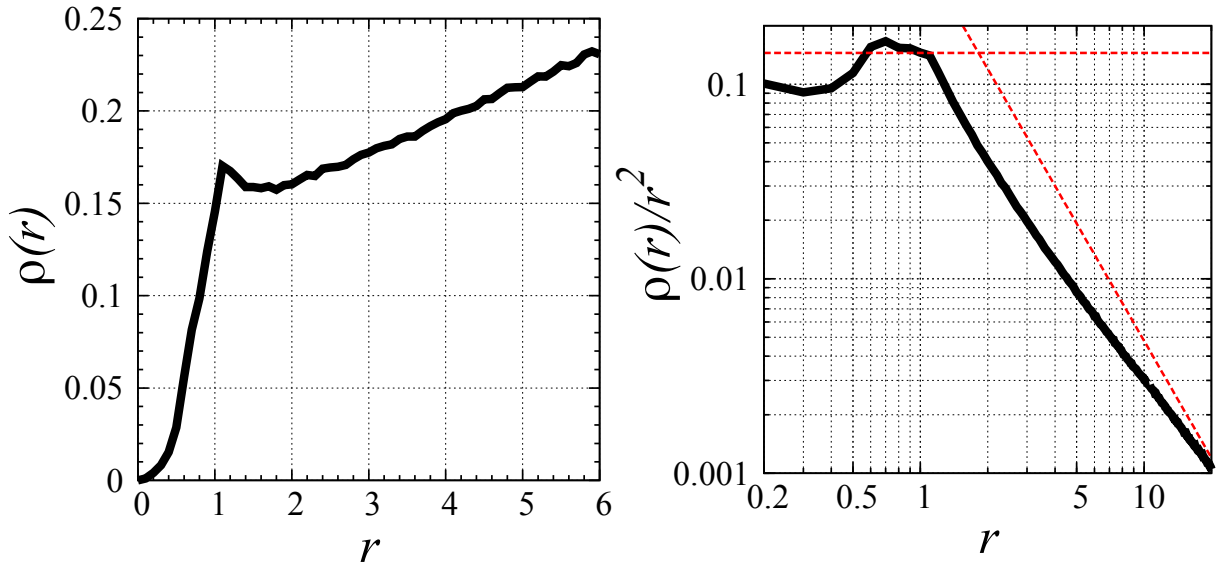


Figure 5.4 – À gauche : densité radiale $\rho(r) = dN/dr$ de matière noire capturée au temps t_S (on fixe arbitrairement ici $\int_0^{6r_+} dr \rho(r) = 1$). À droite : densité de volume $\rho_v(r) = r^{-2}\rho(r)$. La droite horizontale en pointillés donne la moyenne de la densité de volume sur l'intervalle $r_+/5 \leq r \leq r_+$. La droite oblique en pointillés indique une décroissance en r^{-2} . D'après Lages et Shepelyansky, 2013.

Les particules de matière noire capturées par le Système solaire sont donc injectées dans la composante chaotique centrée sur la séparatrice ($w = 0$), et ont par conséquent une dynamique essentiellement chaotique.

5.1.3 Masse et distribution spatiale de la matière noire capturée par le Système solaire

L'évolution des particules capturées est gouvernée par l'application noire (3.16) avec pour chaque particule une fonction frappe associée à des éléments orbitaux donnés q, i, ω . Parmi les N_{tot} particules injectées durant l'existence du Système solaire, considérons les $\delta N_{AC} \simeq 6.2 \times 10^6$ particules dont l'énergie est $w > 4 \times 10^{-5}$ durant l'intervalle de temps $(1 - 10^{-3}) t_S < t < (1 + 10^{-3}) t_S$.¹² Pour chaque particule d'énergie w appartenant à cet ensemble de δN_{AC} particules, nous générons 10^3 particules réparties de manière ergodique sur l'orbite osculatrice dont les éléments orbitaux sont $(a = w^{-1}, q, i, \omega)$. À partir des $10^3 \delta N_{AC}$ particules ainsi générées, nous calculons la densité radiale de particules capturées dans le Système solaire. Cette densité radiale est obtenue aux alentours d'un temps proche de t_S bien ultérieur à la saturation, il témoigne de l'état d'équilibre lorsque le flux de matière injecté est compensé par le flux de matière éjecté. Sur la Figure 5.4 (gauche), on observe que la densité radiale $\rho(r)$ obtenue pour l'état d'équilibre du système est constante (croît même légèrement) au-delà de $r = r_+$. Ceci implique que la masse de matière capturée par le Système solaire croît linéairement avec la distance radiale r . D'après le théorème du viriel, une telle distribution de matière implique une

12. Longtemps après la saturation, aux abords de $t = t_S$, le nombre instantané de particules capturées est $N_{AC} \simeq 3.3 \times 10^5$.

vitesse des particules capturées constante après $r = r_{\text{J}}$, $v_{\bullet}^2 \sim r^{-1} (\int_0^r dr' \rho(r')) \sim \rho(r) \approx \text{cte}$. Nous constatons que ce modèle simple de Système solaire (Soleil+Jupiter) suffit à reproduire l'une des caractéristiques principales de la distribution de matière noire dans les galaxies, à savoir ici l'aplatissement des courbes de vitesse de rotation des étoiles ou des galaxies (Begeman, 1987 ; Rubin, Ford et Thonnard, 1980 ; Zwicky, 1933, 1937, voir aussi la Figure 5.1). En fait le profil de $\rho(r)$ croît légèrement avec $r > r_{\text{J}}$, ce qui se traduit par une décroissance pas tout à fait quadratique de la densité moyenne de volume $\rho_v(r) = r^{-2}\rho(r)$ (Figure 5.4 droite). Une régression non linéaire donne pour le domaine $2 < r/r_{\text{J}} < 20$, $\rho_v(r) \sim r^{-\beta}$ avec $\beta \simeq 1.53$. Cet exposant β peut être compris, en supposant que le système est ergodique, $\rho(r)dr \sim dt$, et que l'orbite des particule est allongée ($w \ll 1$) de façon à considérer une dynamique unidimensionnelle alors $\rho(r)dr \sim dt \sim dr/v \sim dr \sim dr/\sqrt{r^{-1}-w} \sim r^{1/2}dr$, ce qui donne une densité de volume $\rho_v(r) \sim r^{-3/2}$. Si les particules de matière noire dominaient la constitution du Système solaire, la matière visible aurait une vitesse $v_{\bullet} \sim \sqrt{\rho} \sim r^{1/4}$. Nous notons que Rubin, Ford et Thonnard, 1980 observent pour les étoiles dans les galaxies une vitesse $v_{\bullet} \sim r^{0.35}$.

En complément, la Figure 5.5 montre la distribution de la densité de matière noire capturée dans le Système solaire. On retrouve le résultat de la Figure 5.4 à savoir que la densité de matière noire est maximale aux abords de Jupiter et décroît rapidement en s'éloignant de celle-ci. La densité maximale est ici 10 fois plus élevée que la densité moyenne dans un rayon $r < r_{\text{J}}$ autour du Soleil.

Aux abords du Système solaire, la loi de la gravitation universelle est extrêmement bien vérifiée, on s'attend à ce que la masse de matière noire capturée soit très faible par rapport à la masse baryonique totale. Cependant aussi faible soit-elle, nous pouvons tout de même calculer la masse de matière noire galactique actuellement présente dans le Système solaire. En utilisant (5.7), la masse totale de matière noire diffusée par le Système solaire depuis t_S années est

$$M_{\text{tot}} = \int_0^\infty dv f(v) v \sigma(v) \rho_g t_S \approx 69 \rho_g t_S G r_{\text{J}} m_{\odot} / u \approx 0.9 \times 10^{-6} m_{\odot}. \quad (5.10)$$

Pour fixer les idées, cette masse correspond à celle de la planète Vénus. Pour obtenir cette estimation, nous n'avons considéré que les particules sur des orbites avec distance au péricentre $q < 4r_{\text{J}}$. Pour des distances au péricentre $q > r_{\text{J}}$, l'intensité de la fonction frappe est exponentiellement atténuée (voir Figure 4.2), par conséquent la probabilité de capture après une frappe (5.6) l'est aussi.

Des données présentées à la Figure 5.3, nous tirons que la proportion de particules capturées au temps t_S avec des énergies $w > 4 \times 10^{-5}$ ($w > 1/20$)¹³ est $\eta_{AC} = N_{AC}/N_{\text{tot}} \approx 2.2 \times 10^{-9}$ ($\eta_{20} \approx 1.5 \times 10^{-11}$). Ainsi, la masse de matière noire capturée dont l'énergie est $w > 4 \times 10^{-5}$ ($w > 1/20$) est $M_{AC} \approx \eta_{AC} M_{\text{tot}} \approx 2 \times 10^{-15} m_{\odot}$ ($M_{20} \approx \eta_{20} M_{\text{tot}} \approx 1.3 \times 10^{-17} m_{\odot}$).

Des données brutes utilisées pour obtenir la Figure 5.4, nous tirons que la fraction des N_{AC} particules présentes dans un rayon $r \leq 6r_{\text{J}}$ ($r \leq r_{\text{J}}$) autour du centre de masse du Système solaire est $\eta_{r < 6r_{\text{J}}} \approx 4.3 \times 10^{-4}$ ($\eta_{r < r_{\text{J}}} \approx 2.4 \times 10^{-5}$). Ainsi la masse de matière noire capturée au temps t_S à l'intérieur de l'orbite de Neptune (Jupiter) est $M_{r < 6r_{\text{J}}} = \eta_{r < 6r_{\text{J}}} M_{AC} \approx 0.9 \times 10^{-18} m_{\odot} \approx 1.7 \times 10^{15} \text{ g}$ ($M_{r < r_{\text{J}}} = \eta_{r < r_{\text{J}}} M_{AC} \approx 4.6 \times 10^{-20} m_{\odot} \approx 10^{14} \text{ g}$). À titre

13. Les particules ayant une énergie $w > 1/20$ possèdent un demi-grand axe $a < 20$. Ces particules se situent dans une région de rayon $\sim 20r_{\text{J}} \simeq 100\text{au}$ autour du centre de masse du Système solaire.

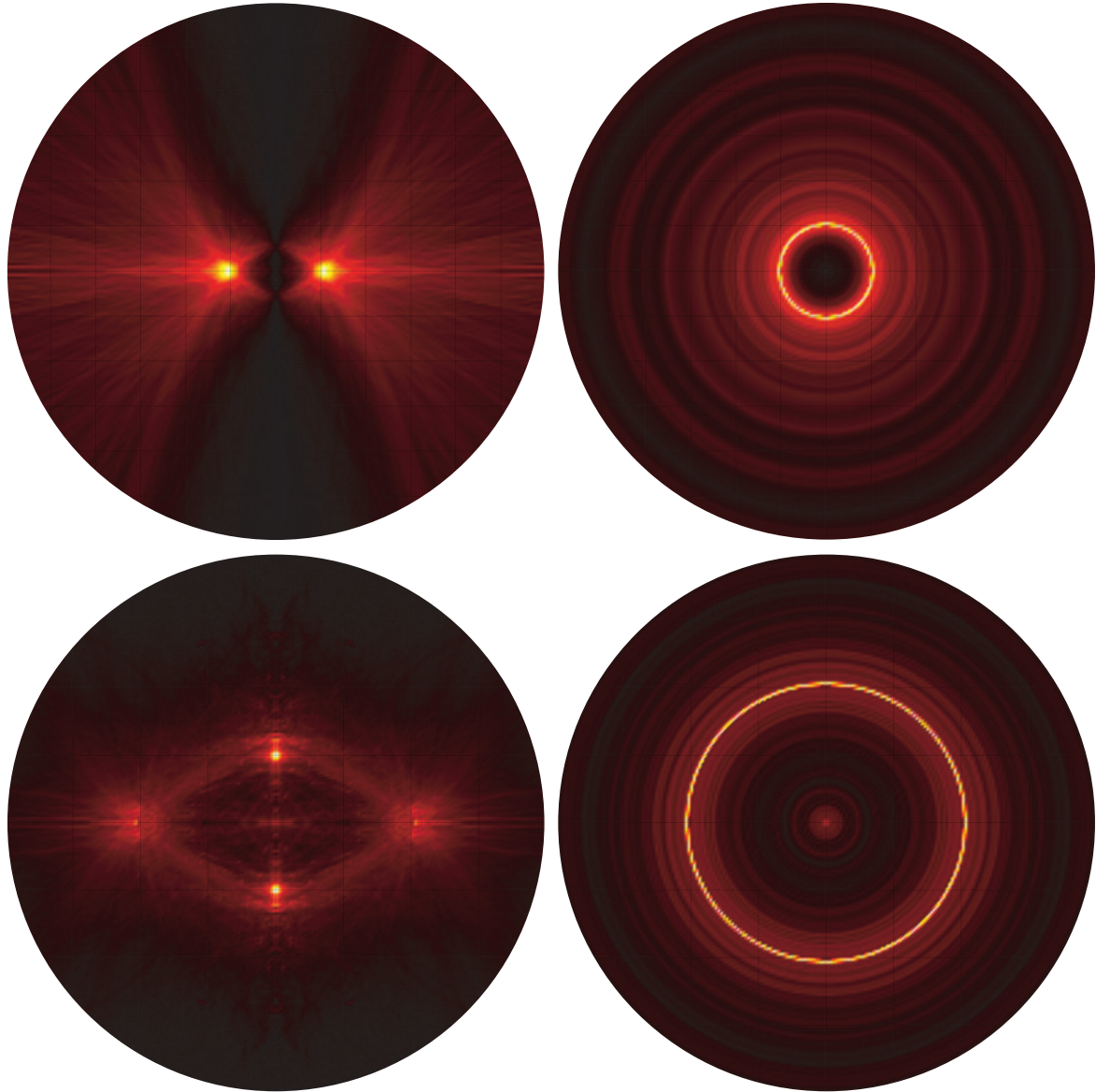


Figure 5.5 – Densité de matière noire capturée dans le Système solaire au temps t_S . Vignettes du haut : densité surfacique $\rho_s(z, \varrho) \propto dN/dz d\varrho$ dans le plan (O, y, z) perpendiculaire au plan contenant l'orbite de Jupiter (à gauche), avec $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, et dans le plan (O, x, y) contenant le plan de l'orbite de Jupiter (à droite) ; seules sont montrées les régions $r < 6r_{\text{J}}$ autour du Soleil, placé au centre O de chaque vignette. Vignettes du bas : densité volumique $\rho_v(x, y, z) \propto dN/dx dy dz$ dans le plan (O, y, z) (à gauche) et dans le plan (O, x, y) (à droite) ; seules sont montrées les régions $r < 2r_{\text{J}}$ autour du Soleil. Le code couleur va du noir pour une densité nulle au jaune vif pour le maximum de densité. Adaptée de Lages et Shepelyansky, 2013.

de comparaison, ces masses sont sensiblement de l'ordre de celle de la comète 103P/Hartley. La densité moyenne de masse de matière noire à l'intérieur de l'orbite de Jupiter est $\rho_{r < r_{\text{J}}} = 3M_{r < r_{\text{J}}} / 4\pi r_{\text{J}}^3 \approx 1.2 \times 10^{-4} \rho_g \approx 5 \times 10^{-29} \text{g.cm}^{-3}$. Cette densité de masse est 10^4 fois infé-

rieure à la densité de masse ρ_g du flot de matière noire provenant de la Galaxie (Bertone, Hooper et Silk, 2005). Cependant si nous considérons les particules qui peuvent être effectivement capturées par le Système solaire, à savoir les particules non liées, d'énergie $-w_{\text{cap}} \lesssim w < 0$, leur densité galactique est¹⁴ $\rho_{g \text{ cap}} \approx \sqrt{57/9\pi} (w_{\text{cap}}/u^2)^{3/2} \rho_g \approx 1.4 \times 10^{-32} \text{g.cm}^{-3}$. Ainsi, la densité de masse de matière noire capturée, $\rho_{r < r_{\text{J}}}$, est 4000 plus importante que la densité de masse de matière noire galactique capturable par le Système solaire. Le processus de capture semble ici être efficace dans la gamme d'énergie des particules capturables. La vitesse orbitale de Jupiter ne permet pas de capturer la très grande majorité du flot de matière galactique traversant le Système solaire.

5.2 Capture de matière noire par les systèmes binaires

Comme nous venons de le voir à la section précédente, la vitesse orbitale du système binaire Soleil+Jupiter n'est pas assez élevée pour capturer une masse importante de matière noire galactique. Qu'en est-il d'autres systèmes binaires tels que les étoiles binaires, les trous noirs et leurs étoiles satellites, les trous noirs binaires hyper massifs. . . pour lesquels les vitesses orbitales peuvent être très différentes ?

À l'instar de ce que nous avons présenté à la section précédente pour le Système solaire, nous avons étudié (Rollin, Lages et Shepelyansky, 2015) la diffusion d'un flot isotrope de particules de matière noire diffusant au travers d'un système binaire tel que $m_1 \gg m_2$ et de période de rotation quelconque. En utilisant les unités adimensionnées adoptées à la section 3.2, nous avons $\mathcal{G}(m_1+m_2) = 1 \simeq \mathcal{G}m_1$, la *taille* du système binaire est $r_{12} = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = 1 \simeq r_2$, et la période de rotation du système binaire est $T = 2\pi$. Dans cette même limite $m_2 \ll m_1$, la vitesse de rotation de la masse m_2 par rapport à son centre de masse est $v_2 \simeq 1$. Les indices 1 et 2 sont associés aux deux éléments du système binaire. Nous utilisons l'application de Kepler (3.16) pour simuler la capture, la dynamique, et l'éjection de 10^{16} particules de matière noire pendant un laps de temps t_S correspondant à 10^9 périodes orbitales du système binaire. Nous supposons que la distribution des vitesses des particules de matière noire incidentes est maxwellienne (5.1) avec une vitesse moyenne u . Ainsi, comme $v_2 \simeq 1$, la vitesse moyenne des particules incidentes est¹⁵, par exemple, $u \simeq 17$ pour le cas du Système solaire (système binaire Soleil+Jupiter), et $u \simeq 0.035$ pour le cas d'un trou noir supermassif accompagné d'une étoile dont la vitesse orbitale est 2% de la vitesse de la lumière.¹⁶ Différemment du cas du Système solaire et de l'application noire associée, nous considérons ici une fonction frappe générique de la forme

$$F_q(x) = J(q) \sin(2\pi x) \quad (5.11)$$

où $J(q) = J_0$ pour $q < q_b$ et $J(q) = J_0 \exp(-\alpha(q - q_b))$ pour $q > q_b$. Bien que le flot de particules soit isotrope, nous ne caractériserons la fonction frappe qu'au travers de la distance au péricentre q . En effet, on suppose que les dépendances en les angles i et ω , celles-ci n'étant éventuellement importantes que pour $q \lesssim 1$, se compensent statistiquement. Adopter une

14. Pour cette estimation, en guise d'énergie typique de capture w_{cap} , nous utilisons, w_H , l'intensité maximale de la fonction frappe pour 1P/Halley.

15. En prenant, $u \simeq 220 \text{km.s}^{-1}$.

16. C'est la vitesse mesurée pour l'étoile S2 orbitant autour du trou noir supermassif occupant le centre de la Galaxie (GRAVITY Collaboration, 2018).

fonction frappe du type (5.11) revient à ne pas tenir compte des rencontres proches qui, comme nous l'avons vu précédemment, ne contribuent que très faiblement au mécanisme de capture. En se référant aux résultats montrés pour la comète de Halley à la Figure 4.2, nous fixerons $q_b = 1.5$ et $\alpha = 2.5$. Pour 1P/Halley, l'intensité de la fonction frappe est $J_0 \simeq 5m_\oplus/m_\odot$. De plus, l'animation associée à la publication (Rollin, Haag et Lages, 2015)¹⁷ montre qu'après $q \simeq 1.5$ la forme de la fonction frappe est essentiellement sinusoidale.

Les résultats rapportés dans Rollin, Lages et Shepelyansky, 2015, pour $u \simeq 17$, avec l'application de Kepler (3.16) et la fonction frappe $F_q(x)$ sont les mêmes que ceux obtenus précédemment avec l'application noire pour le Système solaire (Lages et Shepelyansky, 2013). Sans prendre en compte les éléments orbitaux i et ω des différentes orbites osculatrices d'approche et en adoptant une fonction frappe sinusoidale, nous retrouvons (Rollin, Lages et Shepelyansky, 2015) : – le comportement $\sigma(w) \propto w^{-1}$ de la section efficace de capture pour $w \lesssim w_{\text{cap}}$ (Figure 5.2), – le même temps de saturation $\sim 10^7$ années pour l'équilibre de la distribution de matière noire capturées autour du Système solaire et sensiblement le même profil de densité en énergie $\rho(\omega)$ (Figure 5.3), – après reconstruction spatiale des orbites, sensiblement les mêmes comportements pour la densité radiale $\rho(r)$ et la densité volumique $\rho_v(r)$ avec notamment un profil plat pour $\rho(r)$ après $r = 1$ suggérant une distribution de masse $M(r) \propto r$ et une même vitesse pour toutes les particules de matière noire piégées au-delà de $r \simeq 1$ (Figure 5.4). Outre le fait que les deux approches donnent des résultats similaires pour $u \simeq 17$ (cas du Système solaire), les densités spatiales $\rho(r)$, $\rho_v(r)$, $\rho_s(z, \varrho)$, et $\rho_v(x, y, z)$ obtenues pour $u \simeq 0.035$ sont similaires à celles obtenues pour $u \simeq 17$ (Figs. 5.4 et 5.5). Le lecteur intéressé par ces résultats pourra se référer à l'article (Rollin, Lages et Shepelyansky, 2015) et à la thèse de doctorat (Rollin, 2015, Chapitre 3) dans laquelle la *reconstruction* semi-analytique des trajectoires est expliquée en détails.

5.2.1 Densité de matière noire capturée par un système binaire

La masse totale de matière noire ayant diffusée au travers du système binaire pendant le temps t_S est

$$M_{\text{tot}} = \int_0^\infty dv f(v) v \sigma(v) \rho_g t_S \approx 69 \rho_g t_S r_2 \mathcal{G} m_1 / u. \quad (5.12)$$

Nous n'avons ici compté que les particules incidentes dont la distance au péricentre est $q \leq 4r_{12}$. Au-delà, l'intensité de la fonction frappe devient négligeable. Nous rappelons ici que $r_2 \simeq r_{12}$ est la distance entre les composantes du système binaire, que le temps t_S correspond pour nos résultats numériques à 10^9 rotations du système binaire, et que ρ_g est la densité de la matière noire à l'équilibre loin du système binaire. Ainsi le facteur d'accroissement global de matière noire capturée dans un volume sphérique de rayon r autour du centre de masse du système binaire est

$$\zeta_g(r) = \frac{\rho(r)}{\rho_g} \approx 16\pi\eta(r)\eta_{\text{eq}} \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 \tau_S \frac{v_2}{u}, \quad (5.13)$$

17. Cette animation est également disponible à l'adresse <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/publications/sm/sm21.html>.

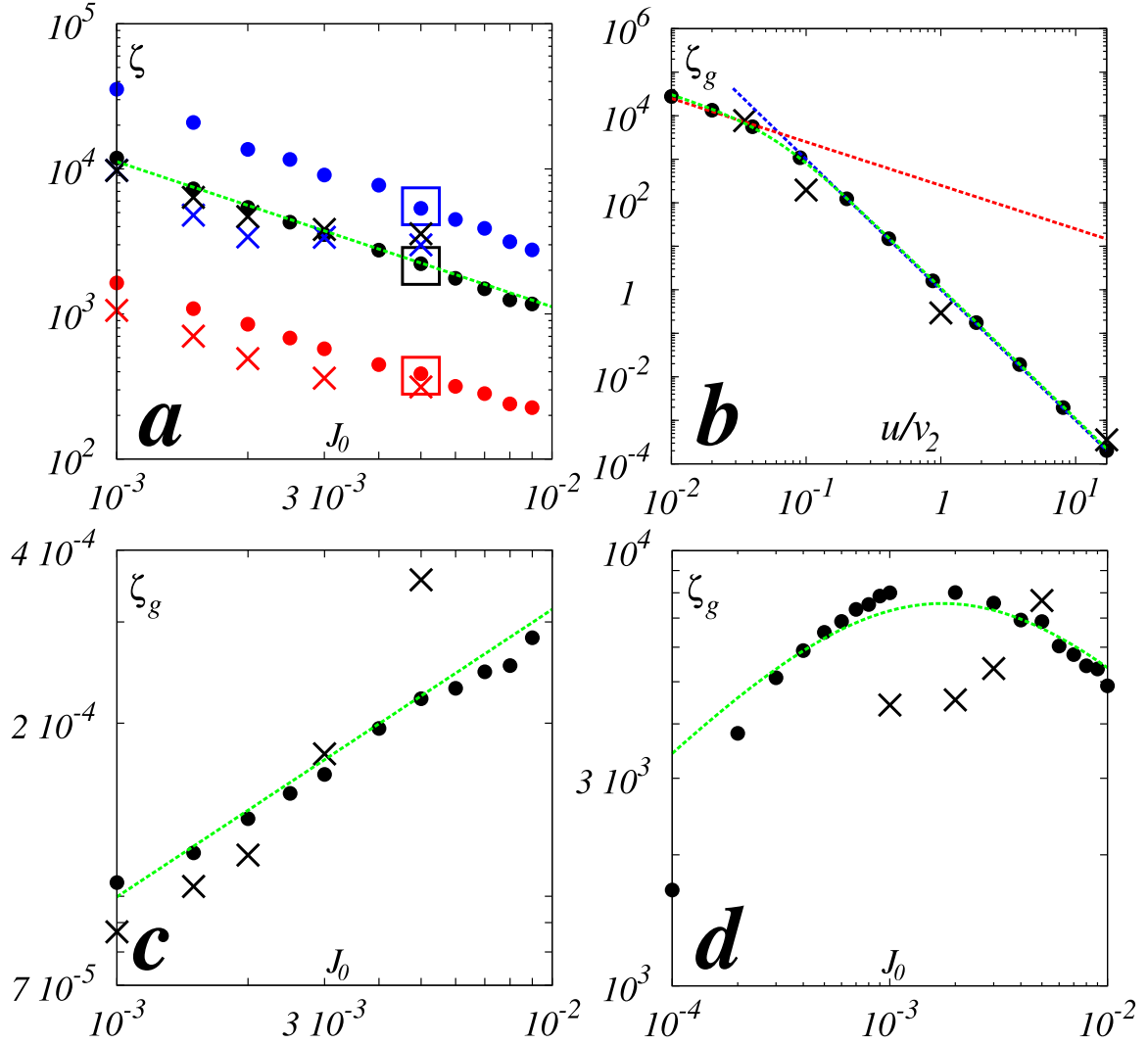


Figure 5.6 – Facteur d'accroissement de la densité de matière noire. **(a)** Facteur d'accroissement $\zeta(r) = \rho_v(r)/\rho_{J_0}$ en fonction de J_0 et pour $u/v_2 \simeq 17 \gg J_0$ (cas typique du système Soleil+Jupiter) et pour les rayons $r/r_2 = 0.2$ (objets bleus), 1 (objets noirs), 6 (objets rouges). La dynamique des particules a été simulée en utilisant l'application de Kepler (3.16) avec la fonction frappe sinus (5.11) pour un nombre total de particules injectées 4×10^9 (●) et 4×10^{11} (□). Les croix (×) sont le résultat de la dynamique des particules simulée en utilisant la forme de la fonction frappe produite par Jupiter et subie par 1P/Halley (voir Figure 4.1). **(b)** Facteur d'accroissement global $\zeta_g(r) = \rho_v(r)/\rho_g$ en fonction de u/v_2 pour un nombre 4×10^9 de particules initialement injectées, pour $r/r_2 = 1$, et pour $J = 5m_2/m_1 = 5 \times 10^{-3}$ (●). Les croix indiquent les résultats similaires obtenus avec la fonction frappe de 1P/Halley. Les droites en pointillés montrent les comportements $\zeta_g \propto u^{-1}$ (---) et $\zeta_g \propto u^{-3}$ (---). **(c,d)** Facteur d'accroissement global $\zeta_g(r) = \rho_v(r)/\rho_g$ en fonction de J_0 pour $u/v_2 = 17$ (c) et pour $u/v_2 = 0.035$ (d). Les symboles (●) et (×) sont définis ci-avant en (a) et (b). Les courbes vertes en pointillés (---) sont tracées à l'aide de la formule (5.17). Adaptée de Rollin, Lages et Shepelyansky, 2015.

où $\eta_{\text{eq}} = N_{\text{eq}}/N_{\text{tot}}$ est, à l'équilibre,¹⁸ la proportion de particules capturées ayant une énergie $w > 4 \times 10^{-5}$,¹⁹ $\eta(r)$ est la proportion de ces particules se trouvant instantanément à une distance inférieure à r et $\tau_S = t_S/T$ est le nombre de révolutions du système binaire autour de son centre de masse, avec $T = 2\pi r_2/v_2$. Dans la limite $J_0 \ll u^2$, il est intéressant de définir le facteur d'accroissement

$$\zeta(r) = \frac{\rho(r)}{\rho_{J_0}}, \quad (5.14)$$

qui est le rapport entre la densité de matière noire capturée dans un volume de rayon r autour du système binaire et la densité de matière noire capturable, typiquement ici la densité galactique de particules dont l'énergie initiale est $w > -J_0$,

$$\rho_{J_0} = \rho_g \int_0^{\sqrt{J_0}v_2} f(v)dv \simeq \rho_g \frac{1}{3} \sqrt{\frac{54}{\pi}} J_0^{3/2} \left(\frac{v_2}{u}\right)^3. \quad (5.15)$$

Le facteur d'accroissement $\zeta(r)$ est alors

$$\zeta(r) \simeq \zeta_g(r) 3 \sqrt{\frac{\pi}{54}} J_0^{-3/2} \left(\frac{u}{v_2}\right)^3. \quad (5.16)$$

Les résultats de la détermination numérique des facteurs d'accroissement $\zeta_g(r)$ et $\zeta(r)$ sont montrés à la Figure 5.6. Pour $(u/v_2) \gg J_0$, le facteur d'accroissement relatif aux particules capturables est de l'ordre de $\zeta \approx 10^3$ à 10^4 pour des intensités de la fonction frappe de $J_0 = 10^{-3}$ à 10^{-2} alors que le facteur d'accroissement global est $\zeta_g \approx 10^{-4} \ll 1$. Pour $u/v_2 = 17$, la dépendance des facteurs d'accroissement par rapport à l'intensité de la fonction frappe J_0 est $\zeta \propto J^{-1}$ (la régression non linéaire donne un exposant -1.04 ± 0.01) et $\zeta_g \propto J^{1/2}$ (la régression non linéaire donne un exposant 0.46 ± 0.1) en accord avec les relations (5.13) et (5.16). Pour le facteur d'accroissement global, nous avons $\zeta_g \propto u^{-1}$ pour $u/v_2 \ll \sqrt{J_0}$, et $\zeta_g \propto u^{-3}$ pour $u/v_2 \gg \sqrt{J_0}$. Celui-ci varie peu, $\zeta_g \approx 10^3 - 10^4$ pour $u/v_2 \ll \sqrt{J_0}$. On notera également que les facteurs d'accroissement ζ_g et ζ ont chacun des valeurs similaires qu'ils soient produits par l'application (3.16) en tenant compte fidèlement des éléments orbitaux d'injection ou par l'application de Kepler avec une fonction frappe générique (5.11).

Les résultats numériques obtenus pour, ζ_g , le facteur d'accroissement global de la densité de matière noire autour d'un système binaire peuvent être résumés par la formule

$$\zeta_g = A \left(\frac{v_2}{u}\right)^3 \frac{J_0^{1/2}}{1 + B J_0 \left(\frac{v_2}{u}\right)^2} \quad (5.17)$$

où $J_0 = 5m_p/M$. Pour $r = r_2$, on a $A \approx 15.5$ et $B \approx 0.7$. Cette formule décrit fidèlement les données présentées à la Figure 5.6 (voir courbes -----). Pour $(u/v_2)^2 \gg J$, le facteur d'accroissement global est $\zeta_g \ll 1$, alors que le facteur d'accroissement de particules capturables est $\zeta = 3 \sqrt{\frac{\pi}{54}} \zeta_g (u/v_2)^3 J^{-3/2} \approx 0.72 A J^{-1} \gg 1$. Pour $(u/v_2)^2 \ll J$, le facteur d'accroissement global est $\zeta_g \approx 22 (v_2/u) J^{-1/2} \gg 1$. La formule (5.17) donnant le facteur d'accroissement global ζ_g est représentée à la Figure 5.7.

18. C'est-à-dire loin de la saturation, lorsque le nombre de particules capturées reste constant. Cette saturation intervient par exemple après $\sim 10^6$ révolutions de Jupiter autour du Soleil (voir Figure 5.3).

19. Ces particules ont par conséquent des demi-grand axes 25000 fois plus grands que la taille r_2 du système binaire.

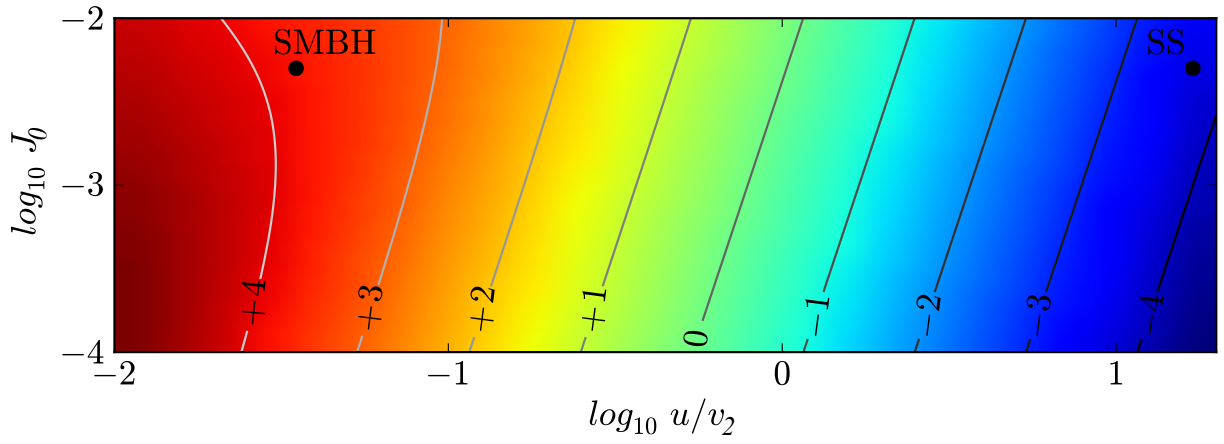


Figure 5.7 – Facteur d’accroissement global de la densité de matière noire ζ_g en fonction de u/v_2 et J_0 . Les couleurs représentent les valeurs du logarithme décimal $\log_{10} \zeta_g$. Les deux points particuliers placés sur la ligne $J = 0.005$, indiquent, pour $u/v_2 = 17$ le cas du Système solaire (SS), à savoir le système Soleil+Jupiter, et pour $u/v_2 = 0.035$ un hypothétique trou noir super massif (SMBH) accompagné d’un astre hypervélocé puisque $v_2 \approx c/50$. Adaptée de Rollin, Lages et Shepelyansky, [2015](#).

Chapitre 6

Environnement dynamique des petits corps du Système solaire

La dynamique orbitale d'objets gravitant autour de petits corps célestes est un problème complexe du fait du potentiel gravitationnel produit par ces corps irréguliers en rotation (voir par exemple Scheeres, 1994, 2012a). Ce problème revêt un intérêt particulièrement important pour les futures missions spatiales ayant pour but l'exploration de petits corps du Système solaire, tels que par exemple les noyaux cométaires, les astéroïdes, les objets transneptuniens, et les objets de la ceinture de Kuiper. Parmi ces objets, ceux dont le diamètre n'excède pas 1000 km possèdent des formes fortement irrégulières (Jorda et al., 2016 ; Melnikov et Shevchenko, 2010) ; le plus souvent, ils ressemblent à un **système binaire de contact** (SBC). Le cas le plus frappant est celui de l'objet (486958) 2014 MU₆₉ de la ceinture de Kuiper, appelée également Ultima Thulé, considéré comme étant l'objet le plus primitif approché par une sonde spatiale, et qui effectivement possède la forme d'un *bonhomme de neige*, à savoir deux sphères en contact (Figure 6.1). Nous notons également que bon nombre des noyaux cométaires sont également bilobés (Figure 6.2).

Plusieurs modèles ont été utilisés pour décrire le champs gravitationnel de ces objets irréguliers : un ellipsoïde tri-axial de densité uniforme (Chauvineau, Farinella et Mignard, 1993 ; Mysen et Aksnes, 2007 ; Mysen, Olsen et Aksnes, 2006 ; Olsen, 2006), une tige (Bartczak et

Figure 6.1 – Image la plus détaillée de Ultima Thulé, prise à 5:26 UT le 1er janvier 2019 par la sonde New Horizons. Cette image a été prise lorsque la sonde était à 6628 km de Ultima Thulé et à 6.6 milliards de kilomètres de la Terre. Source : NASA/Johns Hopkins Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute, National Optical Astronomy Observatory. Publiée le 22 février 2019.



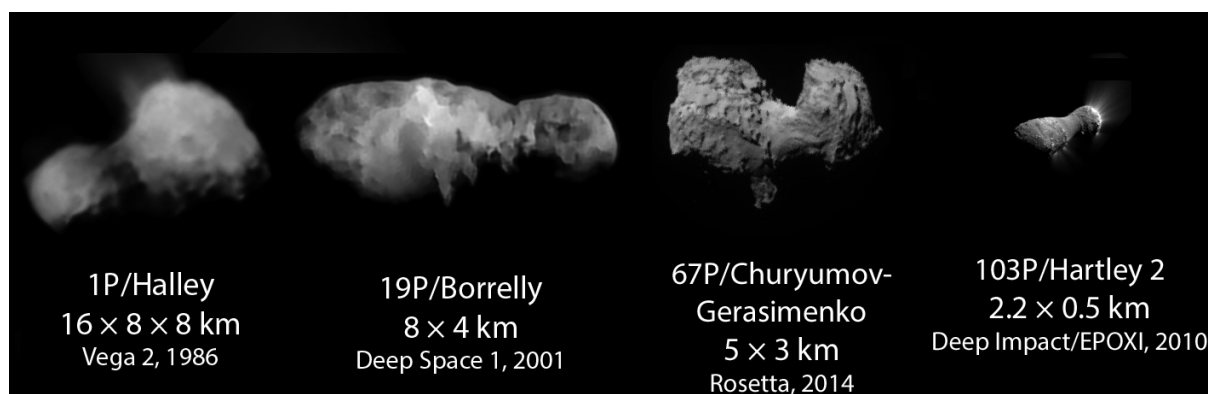


Figure 6.2 – Images et dimensions approximatives des noyaux cométaires de 1P/Halley, 19P/Borrelly, 67P/Churyumov-Gerasimenko, et 103P/Hartley. Sources : Halley : Académie Russe des Sciences. Borrelly : NASA/JPL. Hartley 2 : NASA/JPL/UMD. Churyumov-Gerasimenko : ESA/Rosetta.

Breiter, 2003), un haltère ou un bi-lobé (Feng et al., 2016 ; Marchis et al., 2014), une *molécule* de points gravitant (Petit et al., 1997), un polyèdre (Werner, 1994 ; Werner et Scheeres, 1996), un champ gravitationnel tronqué dérivant d'une forme type (Feng et al., 2017). Les orbites autour de petits corps réels comme les astéroïdes Castalia, Eros, et Hektor ont été extensivement modélisées (Marchis et al., 2014 ; Scheeres, Williams et Miller, 2000 ; Scheeres et al., 1996 ; Yu et Baoyin, 2012).

La plupart des études précédentes ont été consacrées aux phénomènes de résonances et à la détermination de régions orbitales stables (voir en particulier Hu et Scheeres, 2004 ; Mysen, Olsen et Aksnes, 2006 ; Olsen, 2006 ; Scheeres, 1994, 2012a, et références ibid.). L'existence de *zones gravitationnelles chaotiques* (sic) autour des corps allongés a été montrée par Mysen, Olsen et Aksnes, 2006. Le rôle déstabilisateur des résonances entre le mouvement orbital d'une particule test et le mouvement de rotation du corps allongé a été mis en évidence par Mysen et Aksnes, 2007 ; Mysen, Olsen et Aksnes, 2006 ; Olsen, 2006. Récemment, des simulations numériques du mouvement orbital d'une particule autour d'un SBC ont montré le rôle stabilisateur de la vitesse de rotation du SBC : plus la rotation du système binaire est rapide, plus le mouvement orbital de la particule peut être régulier (Feng et al., 2016).

Nous allons considérer ici une particule gravitant autour d'un SBC. En l'absence de rotation de ce dernier, la particule ne peut gagner ou perdre d'énergie ou de moment cinétique. Cependant la rotation du SBC peut faire varier fortement l'énergie ou le moment cinétique de la particule de telle sorte que celle-ci puisse éventuellement s'échapper à l'infini ou s'écraser sur le SBC. Le *destin* orbital de la particule est déterminé par les conditions initiales.

Nous savons par ailleurs qu'un système binaire, tel qu'une étoile binaire, un astéroïde binaire... possède une zone chaotique circumbinaire dans laquelle toutes les orbites sont chaotiques quelle que soit l'excentricité initiale (Shevchenko, 2015). La question à laquelle nous avons répondu est : que se passe-t-il pour un SBC dont la fréquence de rotation ω est a priori quelconque et en tout cas différente de la fréquence de rotation képlérienne ω_0 donnée par la troisième loi de Kepler ? Comme dans le cas de la dynamique chaotique de 1P/Halley, de la capture, l'évolution, et l'éjection de particules par le Système solaire ou par un système binaire quelconque, nous allons modéliser le problème à trois corps circulaire restreint, "lobe

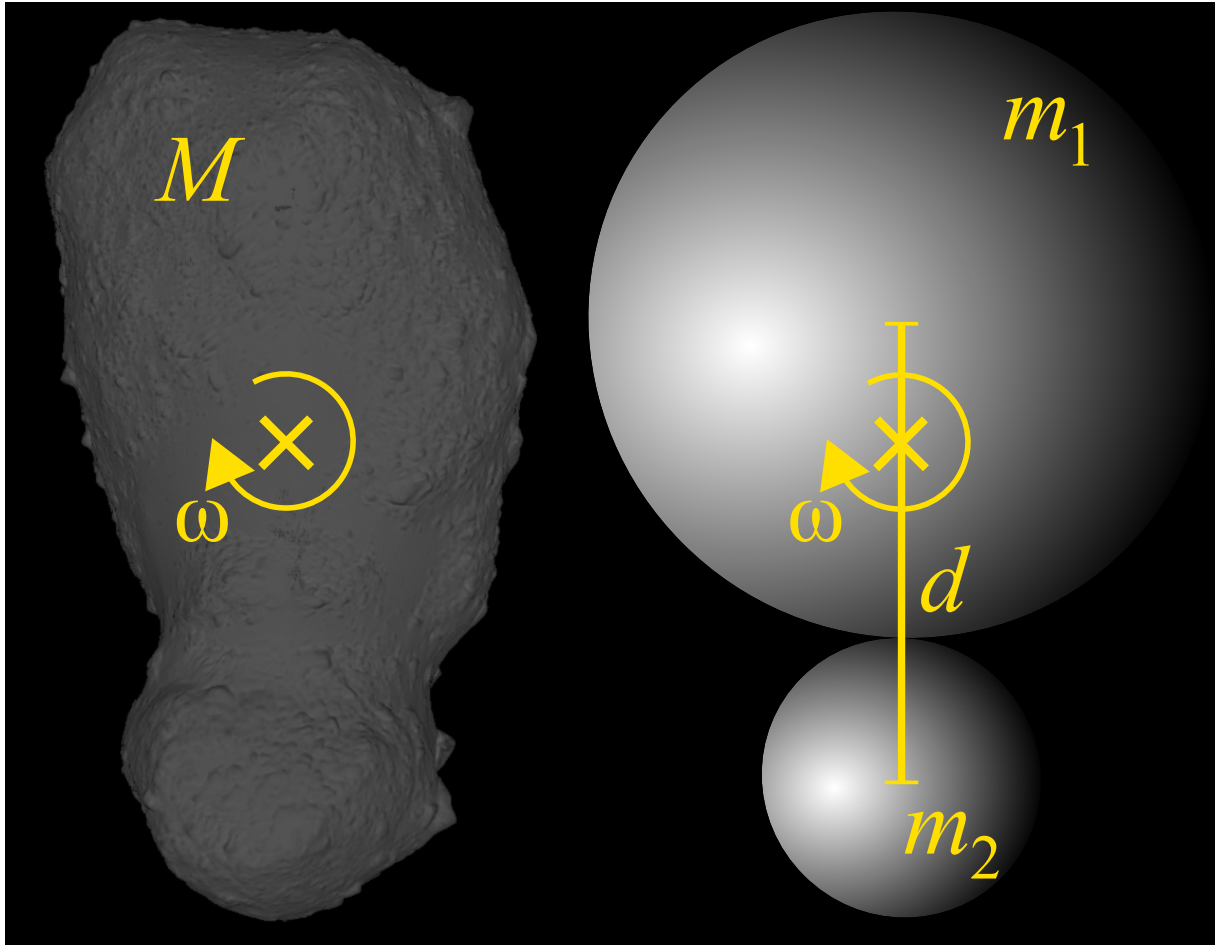


Figure 6.3 – Modélisation d'un petit corps, e.g., ici 25143 Itokawa (Gaskell et al., 2008), par un système binaire de contact $m_1 \geq m_2$ ($M = m_1 + m_2$). La taille du système binaire de contact est d , le centre de masse du petit corps est repéré par une croix. L'axe de rotation du petit corps est perpendiculaire au plan de la figure et passe par le centre de masse. D'après Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017.

1" + "lobe 2" + "particule", par une généralisation de l'application de Kepler (3.16). En effet, loin du SBC la particule est régie par le problème à 2 corps, i.e., "(lobes 1 et 2)" + "particule", le retour de la particule est alors prédit par la troisième loi de Kepler. Par contre, à proximité du SBC, la particule reçoit une frappe occasionnant une variation d'énergie qui peut être analytiquement déterminée.¹ Cette variation d'énergie dépend de la phase de rotation du SBC lors de l'approche de la particule. Nous modélisons par conséquent les petits corps irréguliers du Système solaire par deux masses ponctuelles m_1 et m_2 séparées d'une distance d . De manière équivalente, le champ gravitationnel de cet objet est le même que celui de deux sphères de densités uniformes et de masses m_1 et m_2 , en contact, et dont les centres de masse sont séparés d'une distance d . La Figure 6.3 illustre notre modélisation en prenant l'exemple de l'astéroïde 25143 Itokawa (Gaskell et al., 2008). Le SBC tourne autour de son centre de masse

1. Cette même frappe occasionne également une variation de moment cinétique qui peut être également déterminée analytiquement (Shevchenko, 2011 ; Zhou et al., 2000).

avec une fréquence de rotation ω a priori différente de la fréquence de révolution képlérienne $\omega_0 = (\mathcal{G}(m_1 + m_2)/d^3)^{1/2}$ associée à deux points auto-gravitants de masses m_1 et m_2 séparés d'une distance d . Nous considérerons dans la suite la dynamique orbitale de particules dans le plan contenant les centres de masse des deux lobes et perpendiculaire à l'axe de rotation du SBC. La description de la dynamique orbitale des particules autour du SBC va être faite en généralisant l'application de Kepler originale par l'introduction de la fréquence de rotation ω .

6.1 Généralisation de l'application de Kepler

Nous considérons donc la dynamique d'une particule de masse m dans le cadre du problème à trois corps restreint circulaire " m_1 " + " m_2 " + " m " où les deux masses m_1 et m_2 sont celles de deux lobes connectés par une tige sans masse, ou de manière équivalente, celles de deux sphères tangentes formant un SBC (voir Figure 6.3). La fréquence de rotation képlérienne d'un SBC est

$$\omega_0 = \sqrt{\pi \mathcal{G} \rho / 3} \quad (6.1)$$

où ρ est la densité de masse moyenne du corps irrégulier (Scheeres, 2007). Pour une densité de masse typique de $\rho = 1 \text{ g.cm}^{-3}$,² nous obtenons $\omega_0 \simeq 2.5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ correspondant à $T_0 = 2\pi/\omega_0 \simeq 7 \text{ h}$. Il existe bon nombre de petits corps irréguliers dont la période de rotation est bien plus grande (voir par exemple Pravec et al., 2008). Pour les petits corps du Système solaire, une large gamme de fréquence de rotation a été observée allant pour les astéroïdes de $\omega/2\pi \sim 10^{-3} \text{ h}^{-1}$ à $\omega/2\pi \sim 10^2 \text{ h}^{-1}$ (Hergenrother et Whiteley, 2011 ; Warner, Harris et Pravec, 2009 ; Whiteley, Hergenrother et Tholen, 2002).

Dans la suite nous exprimerons les différentes quantités physiques en utilisant les unités suivantes : nous posons $\mathcal{G}(m_1 + m_2) = 1$, nous choisissons $m_1 \geq m_2$, et définissons $\mu = m_2/(m_1 + m_2) \leq 0.5$, nous posons $d = 1$, la taille typique du SBC (voir Figure 6.3), et par conséquent $\omega_0 = (\mathcal{G}(m_1 + m_2)/d^3)^{1/2} = 1$. Avec ces unités, l'énergie par unité de masse d'une particule en orbite autour du SBC sera comptée en unités de $d^2\omega_0^2$. Nous ne considérons que le cas d'orbites progrades, le raisonnement concernant les orbites rétrogrades est le même. L'application de Kepler généralisée permettant de simuler la dynamique frappée d'une particule en orbite autour d'un SBC en rotation est alors

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E + \Delta E(\phi) \\ \bar{\phi} &= \phi + 2\pi\omega|2\bar{E}|^{-3/2}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Cette application symplectique est analogue à l'application de Kepler (3.16) à cela près qu'elle est exprimée avec les coordonnées énergie par unité de masse $E = -w/2$ et phase du SBC $\phi = 2\pi x = 2\pi t/T$, et qu'elle prend en compte la fréquence de rotation arbitraire $\omega = 2\pi/T$ du SBC. Il est à noter que cette application a été dérivée pour les pseudo-périodes orbitales de la particule plus grande que la période du système binaire, $\omega/|2\bar{E}|^{3/2} \geq 1$, dans le cadre de l'explication du phénomène de forte ionisation micro-onde des atomes d'hydrogène excités (Casati, Guarneri et Shepeliansky, 1988) et de l'auto-ionisation des états moléculaires de Rydberg (Benvenuto, Casati et Shepeliansky, 1994).

La difficulté analytique consiste à exprimer la fonction frappe en énergie $\Delta E(\phi)$ (6.2) en fonction de la fréquence de rotation ω . Pour ce faire, nous allons généraliser, par l'introduction

2. Correspondant ici à peu près à la densité de masse de l'eau.

d'une fréquence de rotation non képlérienne (a priori $\omega \neq \omega_0$) du système binaire, les travaux de Heggie, 1975 et de Roy et Haddow, 2003 initialement consacrés à la détermination de la variation en énergie d'un système binaire due à la rencontre distante avec un corps tiers. En adoptant les notations de Roy et Haddow, 2003, définissons, $\vec{r} = \cos(\omega t) \vec{a} + \sin(\omega t) \vec{b}$, le vecteur *position relative* du centre de masse du lobe 2 par rapport au centre de masse du lobe 1. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs indiquant deux directions orthogonales fixes du plan perpendiculaire à l'axe de rotation du système binaire. Définissons également, $\vec{R}$, le vecteur position de la particule dans le repère barycentrique associé au système binaire. Les équations du mouvement pour la particule sont données par

$$\ddot{\vec{R}} = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} \Phi(\vec{R}, \vec{r}, \mu, \omega), \quad (6.3)$$

où le potentiel gravitationnel est

$$\Phi(\vec{R}, \vec{r}, \mu, \omega) = -\frac{1-\mu}{\|\vec{R} + \mu \vec{r}\|} - \frac{\mu}{\|\vec{R} - (1-\mu) \vec{r}\|}. \quad (6.4)$$

L'expansion multipolaire du potentiel gravitationnel donne

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{R}, \vec{r}, \mu, \omega) = & -\frac{1}{R} \\ & -\mu(1-\mu) \frac{r^2}{2R^3} \left(3 \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{rR} \right)^2 - 1 \right) \\ & -\mu(1-\mu)(2\mu-1) \frac{r^3}{2R^4} \left(5 \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{rR} \right)^3 - 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{rR} \right) \\ & + O\left(\frac{r^4}{R^5}\right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

où l'on a défini $r = \|\vec{r}\|$ et $R = \|\vec{R}\|$. Nous retenons les deux termes du développement multipolaire les plus importants après le terme en $-1/R$. Nous avons vérifié que les termes suivants dans le développement n'apportaient rien de plus à nos conclusions. La fonction frappe

$$\Delta E(\mu, q, \omega, \phi) = - \int_{\curvearrowright} d\vec{R} \cdot \vec{\nabla} \left(\Phi + \frac{1}{R} \right) \quad (6.6)$$

correspondant à l'augmentation/diminution d'énergie reçue par une particule forcée de suivre une trajectoire parabolique, dont le foyer est le barycentre du SBC, est fonction de la distance au péricentre q , de la phase ϕ du SBC lors du passage de la particule au péricentre, de la masse réduite μ , et de la fréquence de rotation du SBC ω . En reprenant les calculs de Roy et Haddow, 2003 pour le cas particulier d'un système binaire circulaire³ dont la fréquence de rotation ω est quelconque, nous obtenons la fonction frappe

$$\Delta E(\mu, q, \omega, \phi) \simeq W_1(\mu, q, \omega) \sin(\phi) + W_2(\mu, q, \omega) \sin(2\phi). \quad (6.7)$$

3. Puisque les centres de masse des deux lobes se déplacent sur des cercles de rayons μd et $(1-\mu)d$ centrés sur le barycentre du SBC.

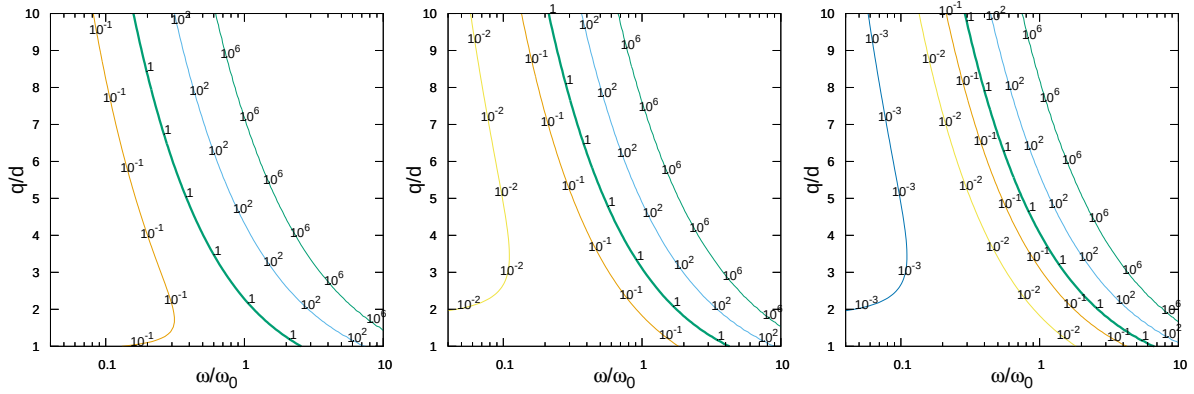


Figure 6.4 – Contours de la fonction $W_1(\omega, q)/W_2(\omega, q)$ en fonction de ω et q pour $\mu \rightarrow 0$ (à gauche), $\mu = 0.4$ (au centre), et $\mu = 0.49$ (à droite). D'après Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017.

Le transfert d'énergie entre le SBC et la particule se décompose donc en deux termes : un terme proportionnel à $\sin(\phi)$ (première harmonique) correspondant à la contribution octupolaire, ($\propto r^3/R^4$), du développement multipolaire du potentiel gravitationnel (6.5), et un terme proportionnel à $\sin(2\phi)$ (deuxième harmonique) correspondant à la contribution quadrupolaire, ($\propto r^2/R^3$), du développement multipolaire. L'amplitude du terme de première harmonique est

$$W_1(\mu, q, \omega) \simeq \mu(1 - \mu)(1 - 2\mu)^{1/4} \pi^{1/2} \omega^{5/2} q^{-1/4} \exp\left(-\frac{2^{3/2}}{3} \omega q^{3/2}\right), \quad (6.8)$$

et celle de deuxième harmonique est

$$W_2(\mu, q, \omega) \simeq -\mu(1 - \mu) 2^{15/4} \pi^{1/2} \omega^{5/2} q^{3/4} \exp\left(-\frac{2^{5/2}}{3} \omega q^{3/2}\right) \quad (6.9)$$

(Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017).

L'application de Kepler originale (Petrosky, 1986) a été déterminée pour $\omega = \omega_0 = 1$, $\mu \ll 1$ et surtout $q \gg 1$. En tenant compte uniquement du terme dominant dans le développement de Fourier, la fonction frappe correspondante est alors proportionnelle à $\sin \phi$ (voir aussi Shevchenko, 2011 ; Zhou et al., 2000). L'application de Kepler permet, par exemple, d'étudier la dynamique chaotique des comètes à forte excentricité en modélisant le Système solaire par le système binaire "Soleil+Jupiter" (Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989 ; Petrosky, 1986 ; Petrosky et Broucke, 1988). Cette même application de Kepler nous a permis d'estimer la masse de matière noire capturée par un système binaire (Rollin, Lages et Shepelyansky, 2015, voir aussi la section précédente). On remarquera que le terme W_1 disparaît lorsque $\mu = 1/2$, i.e., pour un système binaire symétrique. En effet, la fréquence de frappe est alors doublée, $\Delta E \propto \sin(2\phi)$.

Dans le cas d'un SBC dont la fréquence de rotation ω n'est *a priori* pas képlérienne, il est nécessaire de déterminer dans quelles conditions l'un ou l'autre des termes W_1 et W_2 domine. Pour le régime $q/d \gg (\omega_0/\omega)^{2/3}$, la contribution W_1 est dominante dans la fonction frappe (6.7). Ce régime correspond soit à une région de l'espace très éloignée du SBC surtout si $\omega \ll \omega_0$, soit, pour une distance au péricentre fixe $q \sim d$, à une fréquence de rotation très

élevée par rapport à ω_0 . Le régime $q/d \ll (\omega_0/\omega)^{2/3}$ correspond, quant à lui, soit à une région autour du SBC d'autant plus étendue que ω est petit devant ω_0 , soit, pour une distance au péricentre fixe $q \sim d$, à une fréquence de rotation ω très faible par rapport à ω_0 . La Figure 6.4 montre la relative importance des deux contributions W_1 et W_2 en fonction de ω , q et μ . On observe sur cette figure que suivant la région des paramètres (q, ω) considérée, soit W_1 domine, soit W_2 domine. Les deux contributions ne sont équivalentes, $W_1 \sim W_2$, que sur une mince bande de l'espace des paramètres (q, ω) . Cette bande est d'autant plus ténue que μ s'approche de la valeur $1/2$.

En intégrant numériquement le mouvement de la particule sur une trajectoire parabolique autour du SBC, nous avons vérifié que la fonction frappe est bien donnée par les fonctions (6.7), (6.8) et (6.9) obtenues de manière analytique (voir Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017).

6.2 Zone chaotique cricum-binaire

6.2.1 Détermination analytique du bord du chaos

D'après la Figure 6.4, suivant la région (q, ω) l'une des deux contributions, W_1 et W_2 , est suffisante pour rendre compte de la dynamique d'une particule autour du SBC. L'application symplectique (6.2) s'écrit donc

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E + W_n \sin(n\phi) \\ n\bar{\phi} &= n\phi + 2\pi n\omega \left| 2\bar{E} \right|^{-3/2} \end{aligned} \quad n = 1, 2 \quad (6.10)$$

où

$$\frac{W_n(\mu, q, \omega)}{\mu(1-\mu)} \simeq (-1)^{n-1} 2^{\frac{14n-13}{4}} \pi^{1/2} (1 + 2\mu(n-2)) \omega^{5/2} q^{n-\frac{5}{4}} \exp\left(-\frac{2^{3/2}}{3} n\omega q^{3/2}\right). \quad (6.11)$$

La linéarisation de l'application (6.10) autour de la résonance $\alpha : \beta^4$ associée à l'énergie $E_{n,\alpha,\beta} = 0.5(n\omega\alpha/\beta)^{2/3}$, en posant $E = E_{n,\alpha,\beta} + \varepsilon$, nous donne

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \varepsilon + W_n \sin(n\phi) \\ n\bar{\phi} &= n\phi + \underbrace{2\pi n\omega 2^{-3/2} \left(|E_{n,\alpha,\beta}| - \frac{3}{2} |E_{n,\alpha,\beta}|^{-5/2} \bar{\varepsilon} \right)}_{\bar{I}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

En définissant $\theta = n\phi$, nous retrouvons l'application de Chirikov, 1979 (voir aussi Chirikov et Shepelyansky, 2008),

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I + K_n \sin \theta \\ \bar{\theta} &= \theta + \bar{I} \end{aligned} \quad (6.13)$$

avec

$$K_n = -3\pi n\omega 2^{-3/2} |E_{n,\alpha,\beta}|^{-5/2} W_n. \quad (6.14)$$

4. Ici, la particule passe α fois par le péricentre alors que le SBC effectue β rotations ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$).

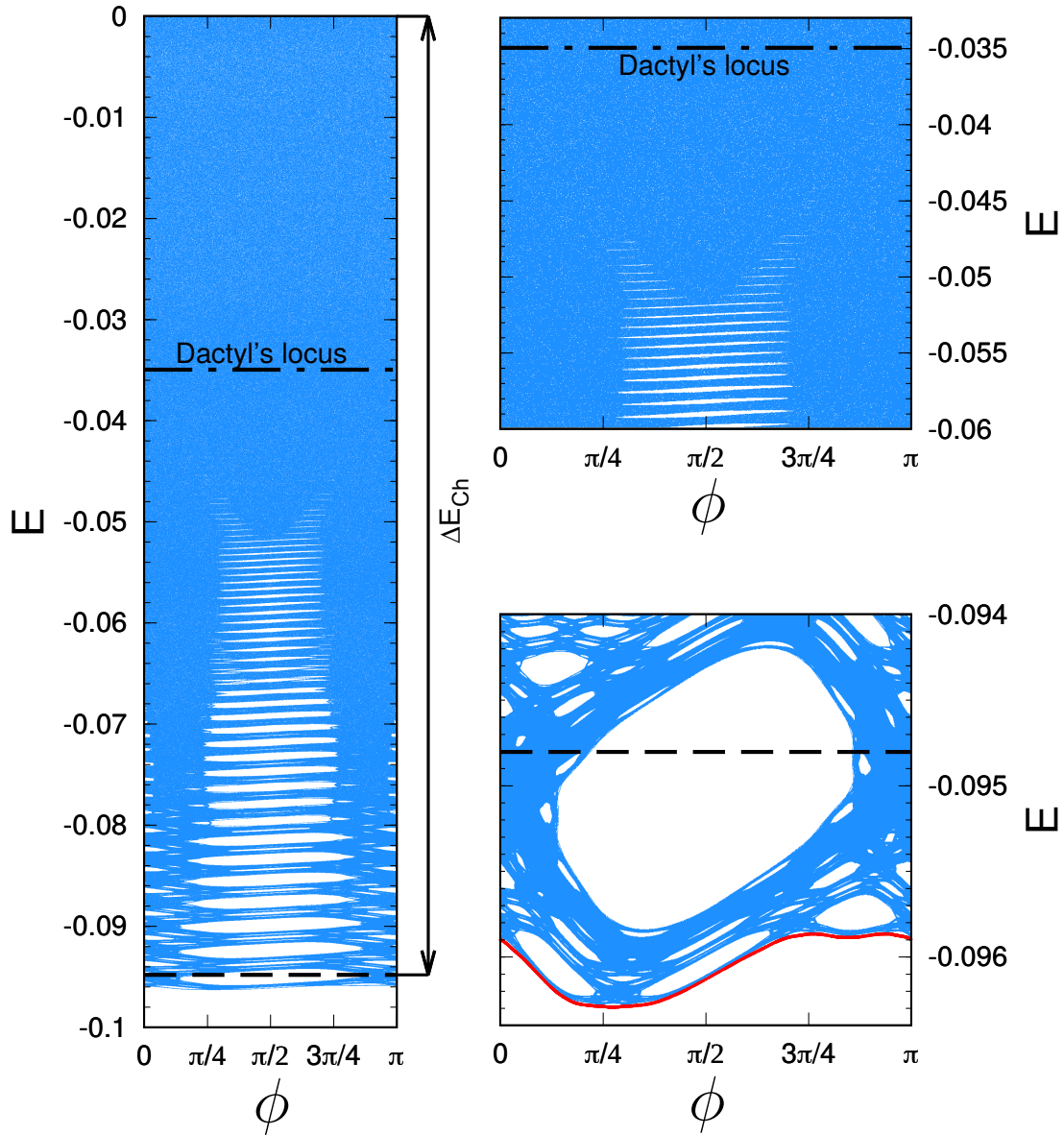


Figure 6.5 – Section de Poincaré (E, ϕ) de la dynamique orbitale de Dactyl, satellite de Ida, calculée à partir de l'application (6.10) pour $n = 2$ et $\mu = 1/2$. À gauche : la composante chaotique (couleur bleue) autour de la séparatrice $E = 0$. Les paramètres dynamiques de Ida ($d \simeq 24.9\text{km}$, $\omega \simeq 0.953\omega_0$) ont été déduits des paramètres physiques donnés par Petit et al., 1997 ; Vokrouhlický, Nesvorný et Bottke, 2003. Un état dynamique possible pour Dactyl ($a \simeq 14.3d$, $q \simeq 3.20d$), déduit de (Petit et al., 1997, voir point noir sur Figure 19), est montré par la ligne (---). La ligne (----) montre l'estimation analytique du bord de la composante chaotique donnée par le critère de recouvrement des résonances de Chirikov pour $K_2 = K_G$. En haut à droite : agrandissement de la zone autour de la localisation dynamique de Dactyl. En bas à droite : agrandissement de la zone où est situé le bord de la composante chaotique. La dernière courbe invariante de KAM séparant la composante chaotique du domaine intégrable est montrée en rouge. Adaptée de Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017.

En inversant cette dernière relation, nous avons

$$|E_{n,\alpha,\beta}(K_n, \mu, \omega, q)| = A_n(\mu) K_n^{-2/5} \omega^{7/5} q^{2n/5-1/2} \exp\left(-\frac{2^{5/2}}{15} n \omega q^{3/2}\right) \quad (6.15)$$

où $A_n(\mu) = \left(3\pi^{3/2} n \mu (1 - \mu) (1 + 2\mu(n - 2)) 2^{(14n-19)/4}\right)^{2/5}$. Le paramètre K_n de l'application standard de Chirikov contrôle le chaos (Chirikov et Shepelyansky, 2008 ; Chirikov, 1979). La valeur $K_n = K_G = 0.9716 \dots$ (Greene, 1979) correspond à la valeur à partir de laquelle le chaos est global, i.e., la diffusion chaotique peut s'effectuer de résonance à résonance pour $K_n > K_G$ (Chirikov, 1979 ; Lichtenberg et Lieberman, 1992). Via (6.15), l'énergie $\Delta E_{\text{Ch}} = |E(K_G)|$ associée à cette valeur de $K_n = K_G$ donne la position en énergie du bord du chaos (critère de recouvrement des résonances de Chirikov, 1960 ; Chirikov, 1979). C'est également la demi-largeur de la composante chaotique développée autour de la séparatrice de l'application symplectique (6.10). Cette composante chaotique ainsi que son bord sont illustrés à la Figure 6.5 montrant la dynamique chaotique de Dactyl, satellite de l'astéroïde Ida. Pour K_n modérément plus grand que K_G , des îlots de stabilité subsistent. Pour $K_n \simeq 2$, la bifurcation des résonances demi-entières commence ; on notera ce bord secondaire $\Delta E_{1/2} = |E(K_n = 2)|$.

6.2.2 Diagrammes de stabilité et zone chaotique centrale

Afin de rendre compte de l'environnement dynamique d'un SBC, nous pouvons construire un diagramme de stabilité. Celui-ci associe un exposant de Lyapunov à chacun des points de l'espace des phases, ceux-ci représentant chacun une condition initiale/particulière pour les orbites étudiées. Par exposant de Lyapunov, nous entendons l'exposant de Lyapunov maximal (voir par exemple Lichtenberg et Lieberman, 1992). Pour le problème qui nous intéresse ici, à savoir le destin d'une particule au voisinage d'un SBC, nous choisirons de construire les diagrammes de stabilité dans les plans (e, q) et (e, a) . Pour une condition initiale dans l'un de ces plans, nous itérons simultanément l'application (6.10) ainsi que son application tangente. Une orbite est considérée comme chaotique si l'exposant de Lyapunov donne, après un nombre fini d'itérations, un nombre positif non-nul. Une orbite sera considérée comme intégrable si son exposant de Lyapunov tend linéairement vers 0 à mesure que le nombre d'itérations augmente.

La Figure 6.6 présente des exemples de diagrammes de stabilité pour $\mu = 1/2$ et pour des valeurs différentes de la fréquence de rotation $\omega/\omega_0 = 0.068, 0.4$, et 1. On observe très clairement le profil dentelé du bord du chaos. Chacune des dents les plus proéminentes est associée soit à une résonance entière $\alpha:1$ soit à une résonance demi-entière $\alpha + \frac{1}{2}:1$ entre la fréquence orbitale de la particule et celle du SBC. Comme $\mu = 1/2$, i.e., les deux lobes du SBC sont identiques, deux dents voisines, associées à une résonance entière et une résonance demi-entière, sont sensiblement de même dimension, puisque par symétrie une rotation ou demi-rotation du SBC donne la même configuration. Ces diagrammes de stabilité montrent graphiquement comment les résonances entières et demi-entières se recouvrent en les suivants de la pointe à la base.

À partir de l'équation (6.15), il est possible de déterminer, pour une distance au péricentre q donnée, l'excentricité $e_{\text{cr}}(q)$ au dessus de laquelle la dynamique est chaotique. Par définition, nous avons

$$\Delta E_{\text{Ch}} = -E(K_G) = 1/2 a_{\text{cr}}(q) = (1 - e_{\text{cr}}(q)) / 2q, \quad (6.16)$$

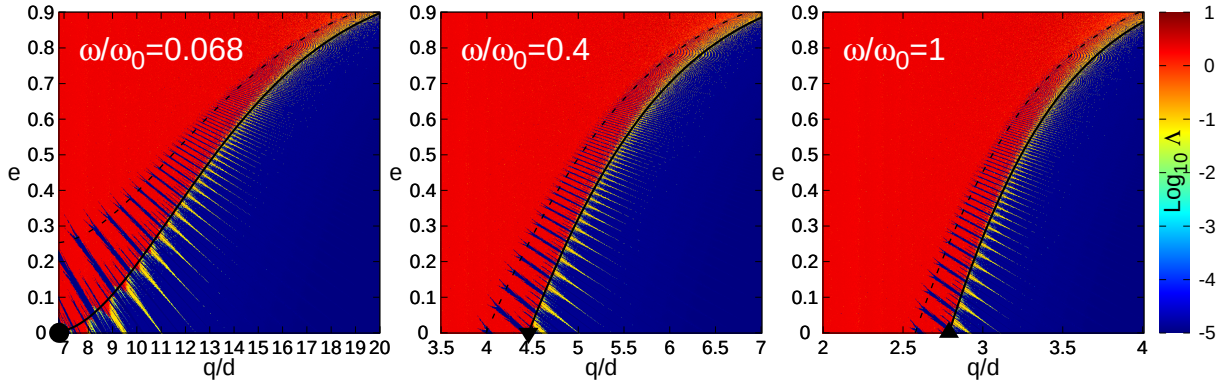


Figure 6.6 – Diagramme de stabilité pour $\mu = 1/2$ et pour $\omega/\omega_0 = 0.068$ (à gauche), 0.4 (au milieu), et 1 (à droite). Les domaines chaotiques (réguliers) sont représentés par une couleur rouge foncée (bleue foncée). Pour chaque trajectoire dont les éléments orbitaux initiaux sont (e, q) , l'exposant de Lyapunov Λ est calculé. Ici, 10^6 itérations de l'application de Kepler (6.10) pour $n = 2$ ont été réalisées pour chaque couple d'éléments orbitaux (e, q) . La courbe solide (—) indique le bord du chaos donné par la formule analytique (6.15) pour $K = K_G$. La courbe (---) donne le bord du domaine de bifurcation des résonances demi-entières données par la formule analytique (6.15) pour $K = 2$. Les symboles $\bullet$, $\blacktriangledown$, et $\blacktriangle$ marquent la limite de la zone chaotique centrale (voir Figure 6.7). D'après Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017.

ce qui donne l'excentricité critique

$$e_{\text{cr}}(q, \omega, \mu) = 1 - 2q\Delta E_{\text{Ch}}(q, \omega, \mu). \quad (6.17)$$

Ainsi les orbites pour lesquelles $e > e_{\text{cr}}(q, \omega, \mu)$ sont chaotiques. La courbe définie par (6.17) est superposée aux diagrammes de stabilité de la Figure 6.6. Cette courbe suit effectivement les dentelures du bord du chaos. Il est possible de définir également l'excentricité critique e_{cr_2} , au-delà de laquelle les résonances entières et demi-entières se recouvrent, en remplaçant dans l'équation (6.17), ΔE_{Ch} par $\Delta E_{1/2}$. De même la courbe ainsi définie par $e_{\text{cr}_2}(q, \omega, \mu)$ suit les lieux du plan (e, q) où la distinction entre les résonances entières et demi-entières disparaît (Figure 6.6).

Définissons à présent la **zone chaotique centrale** comme l'intervalle $[q_1, q_2]$ pour lequel la particule développe une dynamique chaotique pour n'importe quelle excentricité initiale. Autrement dit, la zone chaotique centrale est la région pour laquelle même une particule sur une orbite circulaire, i.e., avec $e = 0$, développe une dynamique chaotique. On observe à partir de la Figure 6.6 que cette zone s'accroît de manière significative à mesure que la fréquence de rotation du SBC décroît. Ici le bord externe de cette zone varie de $q_2 = 2.8d$ pour $\omega = \omega_0$ à $q_2 \simeq 7d$ pour $\omega \simeq 0.068\omega_0$.

En utilisant l'expression (6.17), pour un SBC donné, i.e. μ fixé, il est possible de déterminer analytiquement les limites $q_1(\omega)$ et $q_2(\omega)$ de la zone chaotique centrale. À fréquence ω du SBC fixée, $q_1 < q_2$ sont les zéros de la fonction $e_{\text{cr}}(q, \omega, \mu)$. Les trajectoires telles que $q_1 < q < q_2$ sont chaotiques et ce, quelle que soit l'excentricité initiale. La Figure 6.7 (panneau en haut à gauche) illustre l'étendue de cette zone chaotique circum-binaire en fonction de la fréquence de rotation d'un SBC symétrique ($\mu = 1/2$, $n = 2$). Sur cette représentation globale, on

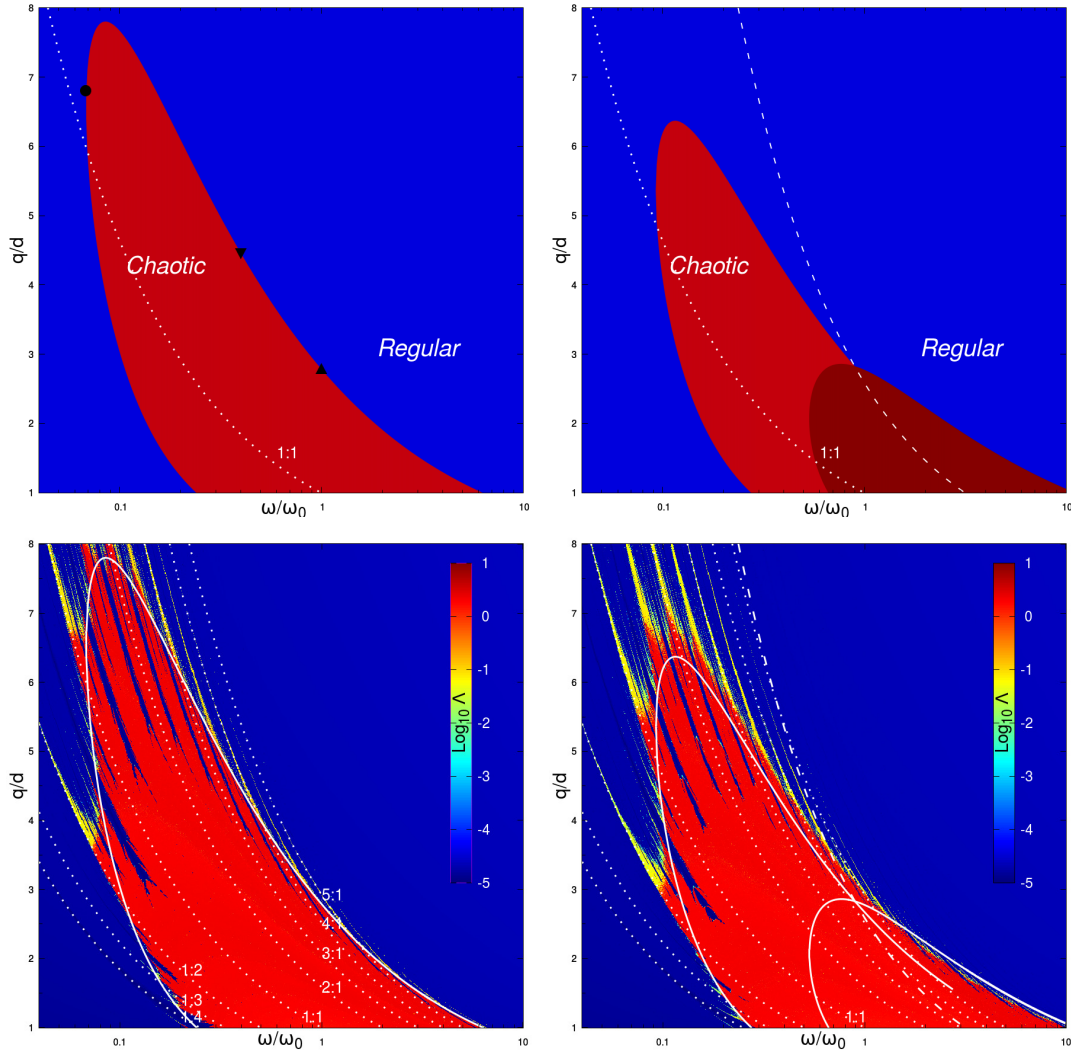


Figure 6.7 – Étendue de la zone chaotique centrale autour d'un petit corps en rotation en fonction de sa fréquence de rotation ω . En haut à gauche, cas du SBC symétrique ($\mu = 1/2$) : la zone chaotique centrale obtenue analytiquement est représentée par le domaine rouge. Le domaine bleu représente la zone complémentaire des orbites stables. Les symboles $\bullet$, $\blacktriangledown$, et $\blacktriangle$ indiquent la limite de la zone chaotique centrale pour $\omega \simeq 0.068, 0.4$, et 1 (voir les symboles correspondants à la Figure 6.6). En haut à droite, cas du SBC non symétrique (ici $\mu = 1/2 - \sqrt{1/12} \simeq 0.211$) : la zone chaotique centrale en rouge (en rouge foncé) est obtenue analytiquement en prenant en compte dans (6.10) le cas $n = 2$ ($n = 1$). La courbe blanche en tirets représente les lieux du plan (q, ω) sur lesquels $W_1(q, \omega) = W_2(q, \omega)$. En bas : diagrammes de stabilité dans le plan (q, ω) pour $e = 0$. La masse réduite est $\mu = 0.5$ (à gauche) et $\mu = 1/2 - \sqrt{1/12} \simeq 0.211$ (à droite). Le caractère chaotique est déterminé par le calcul de l'exposant de Lyapunov Λ . Ici, 10^6 itérations de l'application de Kepler (6.2) ont été effectuées pour chaque couple de paramètres initiaux (q, ω) avec $e = 0$. La courbe blanche continue délimite la zone chaotique centrale obtenue analytiquement (voir panneaux du haut). Sur tous les panneaux, les lignes en pointillés blancs représentent les résonances $\alpha:1$ et $1:\beta$. La résonance $\alpha:\beta$ est représentée par la courbe $q/d = (\omega\beta/\omega_0\alpha)^{-2/3}$. D'après Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017.

observe que cette zone s'étend notablement à mesure que la fréquence de rotation ω diminue. Dans le cas symétrique ($\mu = 1/2$), cette zone s'étend jusqu'à $q_2 \simeq 7.8d$ pour $\omega \simeq 0.08\omega_0$ alors que pour la fréquence képlérienne $\omega = \omega_0$ l'étendue de cette zone est 2.8 fois plus petite, $q_2(\omega_0) \simeq 2.8d$. Inversement, une fréquence de rotation ω plus élevée que ω_0 mène à un rétrécissement de cette zone chaotique centrale en accord avec l'effet de stabilisation observé numériquement autour de petits corps en rotation rapide (Feng et al., 2016).

L'extension de la zone chaotique centrale peut être expliquée en analysant la dépendance en ω de l'amplitude W_2 de la fonction frappe (6.9) et de la demi-largeur ΔE_{Ch} de la composante chaotique autour de la séparatrice (6.15). Pour un SBC symétrique ($\mu = 1/2$), pour $q = 5d$ et pour une fréquence de rotation képlérienne, $\omega = \omega_0$, l'amplitude de la fonction frappe, $W_2 \approx 10^{-8} (d\omega_0)^2$, est, quelle que soit l'excentricité initiale, incapable de produire des orbites chaotiques au voisinage du SBC puisque le plus petit demi-axe atteignable est $a_{\text{cr}} = 1/(2\Delta E_{\text{Ch}}) \approx 500d$ et la plus faible excentricité atteignable est $e_{\text{cr}} \approx 0.99$. Pour $q = 5d$, mais avec une fréquence de rotation bien plus faible que la fréquence képlérienne, e.g., $\omega = 0.3\omega_0$, l'amplitude de la frappe est *activée*, $W_2 \approx 2 \cdot 10^{-3} (d\omega_0)^2$, en comparaison avec le cas képlérien $\omega = \omega_0$, donnant alors $a_{\text{cr}} \approx q$, et, créant ainsi une zone chaotique où, quelle que soit l'excentricité, les orbites sont instables. Nous remarquons que l'extension de cette zone chaotique centrale pour $\omega < \omega_0$ a un prix : l'exposant de Lyapunov décroît puisqu'il est proportionnel à ω pour $\omega/\omega_0 \ll 1$.

Pour $\omega \lesssim 0.24\omega_0$, une **zone régulière centrale** apparaît dans l'immédiat voisinage du petit corps irrégulier (le SBC). Cette zone régulière centrale, ceinte par la zone chaotique, grandit à mesure que la fréquence de rotation ω diminue de $\omega \simeq 0.24\omega_0$ à $\omega \simeq 0.068\omega_0$. Cette zone régulière centrale apparaît pour des orbites ayant initialement une période plus petite que la période de rotation du petit corps (voir la courbe en pointillés associée à la résonance 1:1 sur le panneau en haut à gauche de la Figure 6.7). Pour des fréquences de rotation $\omega < 0.068\omega_0$, la fonction (6.17) n'admet pas de zéro et par conséquent il n'y a pas de zone chaotique centrale autour du petit corps irrégulier en rotation.

La zone chaotique la plus étendue est obtenue pour le cas d'un SBC symétrique ($\mu = 1/2$, Figure 6.7, panneau en haut à gauche). Dans le cas opposé, $\mu \rightarrow 0$, la zone chaotique disparaît quelle que soit ω , ceci est dû au fait que la perturbation due au plus petit lobe s'évanouit.⁵ Dans les cas intermédiaires avec $\mu < 1/2$, la zone chaotique est moins étendue que pour le cas $\mu = 1/2$, et la contribution octupolaire W_1 (6.8), bien que faible pour les fréquences de rotation ω faibles, n'est plus négligeable autour et au-delà de la fréquence képlérienne ω_0 . La Figure 6.7, en haut à droite, donne un exemple de zone chaotique centrale pour un SBC non-symétrique avec $\mu = 1/2 - \sqrt{1/12} \simeq 0.211$. Nous avons calculé la frontière de la zone chaotique centrale en utilisant (6.15) avec soit $n = 2$, la contribution de deuxième harmonique W_2 (6.9) est la seule retenue (domaine en rouge sur le panneau en haut à gauche de la Figure 6.7), soit $n = 1$, la contribution de première harmonique W_1 (6.8) est la seule retenue (domaine en rouge sombre sur le panneau en haut à gauche de la Figure 6.7). Ces deux zones chaotiques produites par les deux contributions W_1 et W_2 donnent ensemble une image qualitative globale de la zone chaotique centrale autour d'un petit objet irrégulier en rotation. La courbe blanche en pointillés donne les jeux de paramètres (q, ω) pour lesquels $W_1 = W_2$. La dépendance de W_2 en μ indique que le domaine chaotique induit par W_2 est de moins en moins étendu en fréquence ω et en distance q à mesure que μ décroît de $\mu = 1/2$ à $\mu = 0$. Le

5. On retrouve trivialement le cas du problème à deux corps.

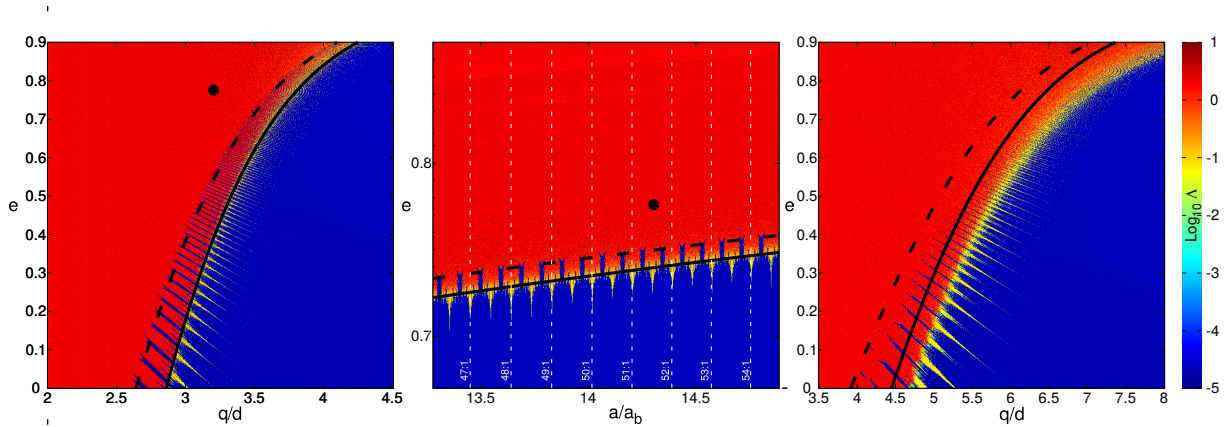


Figure 6.8 – Diagramme de stabilité orbitale autour de Ida (gauche et milieu, $d \simeq 24.9\text{km}$, $\omega \simeq 0.953\omega_0$, $\mu \simeq 1/2$) et autour de Itokawa (droite, $d \simeq 280\text{m}$, $\omega \simeq 0.37\omega_0$, $\mu \simeq 0.26$). Les zones en rouge représentent les domaines chaotiques. Le caractère chaotique d’une orbite dont les coordonnées orbitales initiales sont (q, e) ou (a, e) est déterminé par le calcul de son exposant de Lyapunov Λ . Le symbole ($\bullet$), sur les panneaux de gauche et du milieu, donne la position dynamique actuelle de Dactyl (voir Figure 19 dans Petit et al., 1997). Les courbes critiques $e_{\text{cr}}(q)$ (6.17) indiquant le recouvrement des résonances pour $K = K_G$ (—) et la bifurcation des résonances demi-entières pour $K = 2$ (---) sont tracées. Ces courbes sont obtenues en utilisant (6.17) avec (6.15) pour $n = 2$. D’après Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017.

domaine chaotique induit par W_1 est le plus large pour $\mu = 1/2 - \sqrt{1/12} \simeq 0.211$, et est de moins en moins étendu à mesure que μ croît (décroît) de $\mu \simeq 0.211$ à $\mu = 1/2$ ($\mu = 0$). Les panneaux du bas de la Figure 6.7 représentent les diagrammes de stabilité pour une particule initialement sur une orbite circulaire ($e = 0$) pour le cas symétrique $\mu = 1/2$ (panneau de gauche) et pour un cas non-symétrique $\mu = 1/2 - \sqrt{1/12} \simeq 0.211$ (panneau de droite). Le contour fractal de la zone chaotique centrale autour du petit corps est approximativement bien décrit par les contours obtenus analytiquement (6.17).

6.3 Ida et Dactyl

Appliquons à présent notre approche, basée sur l’application de Kepler, à de réels objets célestes. Parmi les objets recensés dans le Système solaire, il existe, en terme de taille, une démarcation assez nette entre les grands corps quasi-sphériques et les petits corps⁶ essentiellement patatoïdes. Cette démarcation se fait aux alentours de $R = 300\text{--}500\text{ km}$, où R est le rayon caractéristique de ces objets (voir par exemple Figures 1 et 2 dans Melnikov et Shevchenko, 2010). De plus, bon nombre des astéroïdes et des noyaux cométaires observés ressemblent à des *bonhommes de neige*, autrement dit à des SBC (voir Figs.6.1,6.2, et 6.3).

Parmi ceux-ci, l’astéroïde 243–Ida est particulièrement connu pour avoir un satellite, nommé Dactyl, qui évolue sur une orbite prograde par rapport à la rotation de Ida, et avec une faible

6. Le terme *petit corps* désigne un corps en orbite autour du Soleil qui n’est ni une planète, ni une planète naine.

inclinaison ($i < 8^\circ$ d'après Petit et al., 1997) par rapport au plan équatorial de celle-ci. L'astéroïde 243-Ida peut être approximativement décrit par un SBC symétrique ($\mu = 1/2$). D'après les données présentées par Belton et al., 1995 ; Belton et al., 1996 ; Petit et al., 1997, Ida est formée principalement de deux corps en contact et de caractéristiques semblables. Nous avons fixé sa densité de masse à $\rho \simeq 2.24 \text{ g.cm}^{-3}$ (Petit et al., 1997) et sa période de rotation à $2\pi/\omega \simeq 4.63 \text{ h}$ (Vokrouhlický, Nesvorný et Bottke, 2003). Ainsi, en utilisant (6.1), la fréquence de rotation pour Ida est fixée à $\omega \simeq 0.953\omega_0$. De plus, pour un SBC symétrique constitué de deux sphères tangentes de masses m , la densité de masse s'écrit $\rho\pi d^3/3 = 2m$ où d est la distance séparant le centre des deux sphères. Ainsi, pour Ida, nous obtenons $d \simeq 24.9 \text{ km}$.

La Figure 6.5 montre le portrait de phase (E, ϕ) de la dynamique de Dactyl autour de Ida. Ce portrait de phase a été obtenu en itérant l'application (6.10) pour $n = 2$. En étudiant le comportement de (6.17) avec les paramètres physiques de Ida, la zone chaotique centrale s'étend jusque $q \simeq 2.85d \simeq 71 \text{ km}$ autour de l'astéroïde. Cette estimation concorde avec les résultats observationnels et numériques concernant l'étude de la stabilité de l'orbite de Dactyl (Petit et al., 1997). Les courbes critiques (6.17) obtenues pour $K = K_G$ et $K = 2$ sont superposées aux diagrammes de stabilité dans le plan (q, e) (Figure 6.8, gauche) et dans le plan (a, e) (Figure 6.8, centre). Sur ces figures, la position de Dactyl est donnée par le point noir ($\bullet$). Celui-ci est enchâssé entre les résonances 51:1 et 52:1.⁷ Il apparaît clairement sur ces figures que la dynamique de Dactyl est chaotique et par conséquent instable, en accord avec les observations et expérimentations numériques (voir Figure 19 dans Petit et al., 1997).⁸

6.4 Itokawa et Hayabusa

Pour Ida, la fréquence de rotation $\omega \simeq 0.953\omega_0$ est sensiblement la même que la fréquence képlérienne ω_0 , la zone chaotique centrale est sensiblement la même que celle qu'on aurait obtenu pour un système binaire képlérien usuel. Pour l'astéroïde 25143 Itokawa, la fréquence de rotation ω est bien plus petite que ω_0 , on s'attend à ce que, toutes proportions gardées, la zone chaotique soit bien plus étendue.

Itokawa, objet d'exploration de la mission *Hayabusa* (Fujiwara et al., 2006), possède une forme bilobée (Figure 6.3) pouvant être assimilée à un SBC formé par deux ellipsoïdes de dimensions $490 \times 310 \times 260 \text{ m}$ ("le corps") et $230 \times 200 \times 180 \text{ m}$ ("la tête"), et de densités massiques 1750 kg/m^3 et 2850 kg/m^3 . Les centres des deux ellipsoïdes sont séparés d'une distance $d \simeq 280 \text{ m}$ (Lowry et al., 2014). La période de rotation de Itokawa est de 12.132 h (Kaasalainen et al., 2003), et sa masse totale est estimée à $3.58 \times 10^{10} \text{ kg}$ (Fujiwara et al., 2006). De ces données observationnelles, on obtient $2\pi/\omega_0 = 4.54 \text{ h}$, $\omega = 0.37\omega_0$, $m_1/m_2 \simeq 2.9$, et $\mu \simeq 0.26$.

Ces paramètres physiques permettent de calculer le diagramme de stabilité (Figure 6.8, à droite) obtenu en itérant l'application de Kepler pour le cas d'un SBC non-symétrique, i.e., en utilisant (6.2) et (6.7). Le rayon de la zone chaotique centrale $q \simeq 4.6$ est à peu près deux fois plus grande que si la fréquence de rotation de Itokawa était képlérienne. Sur la Figure 6.8 à droite, nous observons que le bord du chaos peut ici être estimé avec la seule composante W_2 de la fonction frappe (6.7).

7. Plus précisément, Dactyl semble être situé au sein de la résonance 103:2.

8. Notons que, dans la littérature, les estimations sur la dynamique de Dactyl sont uniquement déduites des courtes, et par conséquent potentiellement imprécises, observations de la sonde *Galileo*.

Comète	d (km)	M (kg)	m_1/m_2	P (h)	Références
1P/Halley	7.7	2.2×10^{14}	2.6	176.4	Merényi et al., 1990 Stooke et Abergel, 1991 Schleicher et al., 2015
8P/Tuttle	5.0	4×10^{14} ^a	2.14	11.4	Harmon et al., 2010
19P/Borrelly	4.0	2×10^{13}	3.5	25	Lamy, Toth et Weaver, 1998 Soderblom et al., 2004 Oberst et al., 2004 Buratti et al., 2004 Britt et al., 2004
67P/C-G	2.62	9.982×10^{12}	3.4	12.404	Jorda et al., 2016
103P/Hartley	1.2	2.2×10^{11}	3.3	18.2	Harmon et al., 2011 Thomas et al., 2013 Belton et al., 2013

^a En l'absence de données observationnelles, la densité de masse moyenne de 8P/Tuttle a été fixée à $0.5 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ qui est celle de 67P/Churyumov-Gerasimenko.

Table 6.1 — Données observationnelles pour cinq noyaux cométaires bilobés. Les données représentées sont d la taille du noyau (distance entre les centres de masses des deux lobes), M la masse du noyau cométaire, $m_1 > m_2$ les masses des deux lobes, P la période de rotation du noyau cométaire. Adaptée de Lages, Shevchenko et Rollin, 2018.

Les résultats numériques de Zimmer et al., 2014 montrent que les orbites autour de Itokawa dont le demi-axe est inférieur à 1 km sont les plus susceptibles d'être influencées par le champ de gravité complexe d'un corps non homogène en rotation. Une sonde sur une telle orbite, soit est éjectée après quelques révolutions, soit s'écrase sur l'astéroïde. La sonde *Hayabusa* évoluait sur une orbite autour du Soleil, proche de Itokawa mais en dehors de sa zone d'influence gravitationnelle, mesurée par le rayon de Hill $R_{\text{Hill}} \simeq 25 \text{ km}$ (Fuse et al., 2008). Nos résultats corroborent ceux de Zimmer et al., 2014 puisqu'en effet d'après le diagramme de stabilité (Figure 6.8, droite) aucune orbite stable circulaire n'existe en deçà de $q \simeq 4.6d \simeq 1.3 \text{ km}$.

6.5 Noyaux cométaires

Nous étudions la dynamique chaotique d'une particule dans le champ de gravité d'un noyau cométaire bilobé, en se basant sur les caractéristiques physiques de cinq comètes pouvant être assimilées à un SBC. En fait, la majorité des comètes dont la morphologie a pu être bien étudiée sont en fait des SBC (Jorda et al., 2016). Un des plus célèbres exemples est le noyau cométaire de 67P/Churyumov-Gerasimenko, visité par la mission spatiale *Rosetta*. Le noyau de la comète 1P/Halley est également connu pour être bilobé (Merényi et al., 1990; Stooke et Abergel,

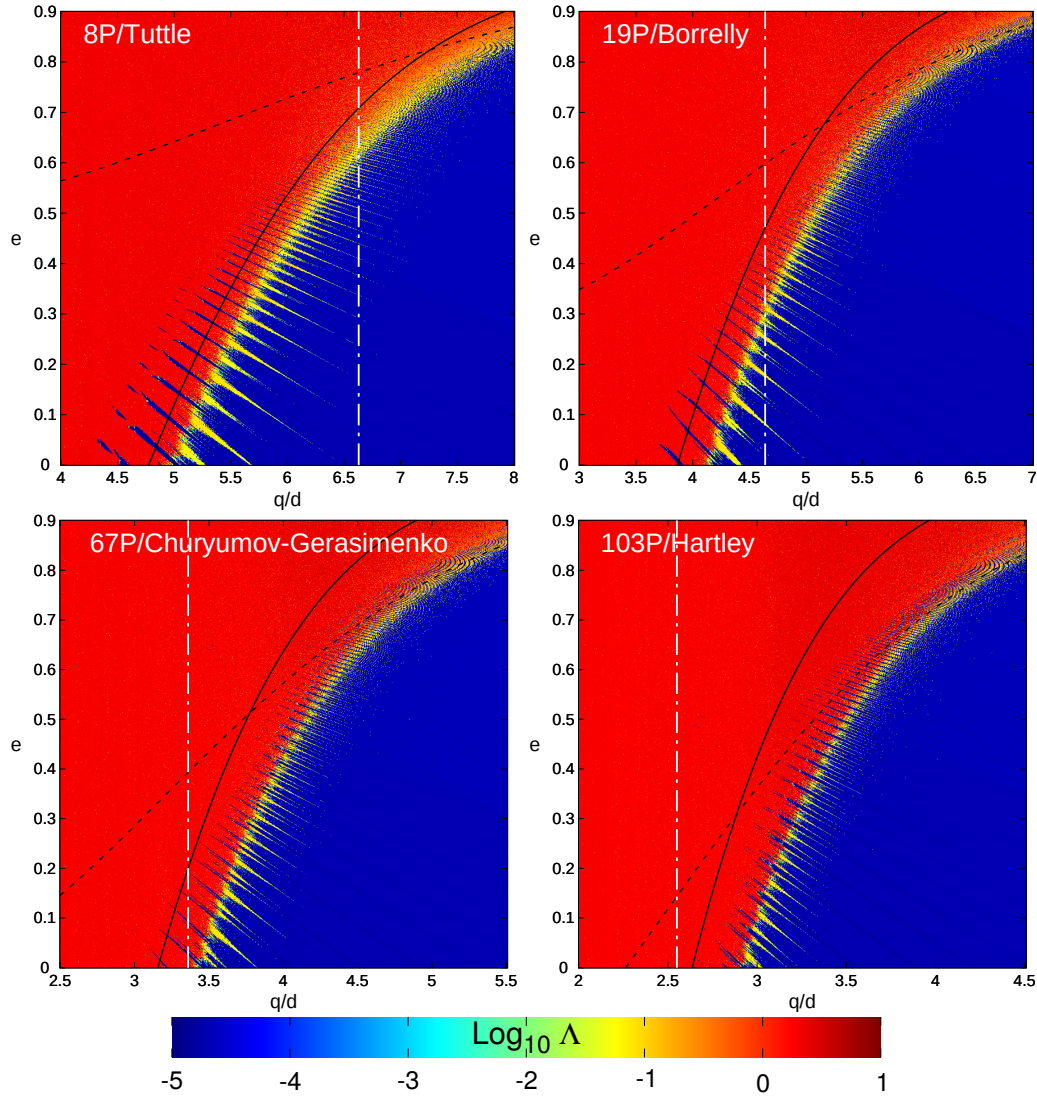


Figure 6.9 – Diagrammes de stabilité orbitale autour de quatre noyaux cométaires ordonnés, de gauche à droite, par rapports de fréquences ω/ω_0 croissants : 8P/Tuttle ($\omega \simeq 0.33\omega_0$), 19P/Borrelly ($\omega \simeq 0.48\omega_0$), 67P/Churyumov-Gerasimenko ($\omega \simeq 0.73\omega_0$), 103P/Hartley ($\omega \simeq 1.04\omega_0$). Le domaine chaotique est représenté par une zone rougeâtre. Le chaos est déterminé par le calcul de l'exposant maximal de Lyapunov Λ pour une trajectoire dont les éléments orbitaux initiaux sont (q, e) . Le nombre d'itérations de l'application de Kepler (6.2) est 10^6 . La courbe délimitant le bord du chaos (6.17) est montrée en tenant compte dans la fonction frappe ΔE (6.7) uniquement du terme W_1 (6.8) (----) et tenant compte uniquement du terme W_2 (6.9) (—). La ligne verticale en pointillés donne la distance au péricentre q_0 pour laquelle $W_2 = W_1$. Pour $q < q_0$ ($q > q_0$), $W_2 > W_1$ ($W_2 < W_1$). Le rapport W_2/W_1 varie de 10.2 pour $q = 4d$ à 0.211 pour $q = 8d$ dans le cas de 8P/Tuttle, de 5.72 pour $q = 3d$ à 0.0305 pour $q = 7d$ dans le cas de 19P/Borrelly, de 3.4 pour $q = 2.5d$ à 0.0155 pour $q = 5.5d$ dans le cas de 67P/Churyumov-Gerasimenko, et de 2.64 pour $q = 2d$ à 0.00801 pour $q = 4.5d$ dans le cas de 103P/Hartley. Adaptée de Lages, Shevchenko et Rollin, 2018.

1991), ainsi que ceux des comètes 8P/Tuttle (Harmon et al., 2010), 19P/Borrelly (Oberst et al., 2004), et 103P/Hartley (Thomas et al., 2013). À part 8P/Tuttle, les photographies de ces comètes sont montrées sur la Figure 6.2. Cette forme particulière bilobée semble être due à l'érosion non uniforme de la surface des comètes lorsque celles-ci passent au périhélie (Jewitt, Sheppard et Fernández, 2003), et/ou à des collisions à faibles vitesses entre plusieurs corps (Rickman et al., 2015). La Table 6.1 résume les propriétés observationnelles basiques de ces cinq noyaux cométaires.

La fréquence de rotation képlérienne ω_0 pour un SBC de masses m_1 et m_2 séparées par une distance d est calculée directement en utilisant la troisième loi de Kepler (3.15). Ainsi, le rapport ω/ω_0 pour les cinq comètes considérées peut être aisément calculé, on trouve $\omega/\omega_0 \simeq 0.055, 0.33, 0.48, 0.73$ et 1.04 pour 1P/Halley, 8P/Tuttle, 19P/Borrelly, 67P/Churyumov-Gerasimenko et 103P/Hartley. L'étendue des fréquences de rotation ω considérées ici va de $0.055\omega_0$ à $1.04\omega_0$. Au-delà de $\omega > \omega_0$, nous nous attendons à ce qu'il y ait peu d'objets candidats, puisque de nombreux noyaux cométaires et astéroïdes sont suspectés d'être des agglomérats lâches (*piles de débris*) qui se désassembleraient, la force de gravité ne compensant plus la force centrifuge.

La Figure 6.9 montre les diagrammes de stabilité orbitale autour de quatre des comètes considérées ici. Sur ces diagrammes, nous superposons le bord du chaos (6.17) calculé pour le régime dynamique $\omega/\omega_0 \gg (d/q)^{3/2}$ en utilisant l'amplitude W_1 (6.8) de la fonction frappe ΔE (6.7) et pour le régime dynamique $\omega/\omega_0 \ll (d/q)^{3/2}$ en utilisant l'amplitude W_2 (6.9) de la fonction frappe ΔE (6.7). Comme prévu le bord du chaos est qualitativement bien reproduit en considérant l'amplitude W_1 (W_2) pour les fortes (faibles) excentricités e et les grandes (petites) distances au périhélie q .

Les masses réduites μ des comètes considérées étant sensiblement les mêmes, nous retrouvons, à partir de la Figure 6.9, que la zone chaotique centrale s'étend notablement à mesure que ω décroît (Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017). On observe que cette zone s'étend jusqu'à $q \simeq 3d$ autour de 103P/Hartley ($\omega \simeq 1.04\omega_0$) et jusqu'à $q \simeq 5d$ autour de 8P/Tuttle ($\omega \simeq 0.33\omega_0$). La Figure 6.10 montre l'étendue de la zone chaotique centrale en fonction de la fréquence de rotation ω des noyaux cométaires.

Pour la région $0.3 \lesssim \omega/\omega_0 \lesssim 1$, comprenant les fréquences de rotation de 8P/Tuttle, 19P/Borrelly, 67P/Churyumov-Gerasimenko, et 103P/Hartley, nous observons clairement que, pour μ allant de ≈ 0.22 à ≈ 0.32 , les limites de la zone chaotique sont sensiblement les mêmes (voir les courbes blanches en pointillés sur la Figure 6.10 dans la zone $0.3 \lesssim \omega/\omega_0 \lesssim 1$). Ces limites sont même très proches de la limite de la zone chaotique pour le cas symétrique ($\mu = 1/2$). Pour ces quatre noyaux cométaires, une illustration générique de la zone chaotique centrale est donnée à la Figure 6.10 (panneau du bas à droite).

Pour la région $0.1 \lesssim \omega/\omega_0 \lesssim 0.3$, une zone régulière centrale existe tout autour du noyau cométaire, isolant ainsi ce dernier de la zone chaotique qui forme alors une zone annulaire de rayon interne q_1 et de rayon externe q_2 . Ces zones sont représentées à la Figure 6.10, en bas au centre, pour le cas d'un noyau cométaire modèle qui est symétrique $\mu = 1/2$ et dont la fréquence de rotation est $\omega = 0.1\omega_0$.

Pour la région $\omega/\omega_0 \lesssim 0.1$, d'après la Figure 6.10, il n'existe plus de zone chaotique centrale entourant le noyau cométaire.⁹ Ce résultat est en accord avec le diagramme de stabilité

9. Nous rappelons que cette zone est définie pour des orbites initiales circulaires ($e = 0$). Pour des excentricités plus élevées, les orbites peuvent être chaotiques, comme illustré à la Figure 6.11 dans le cas de

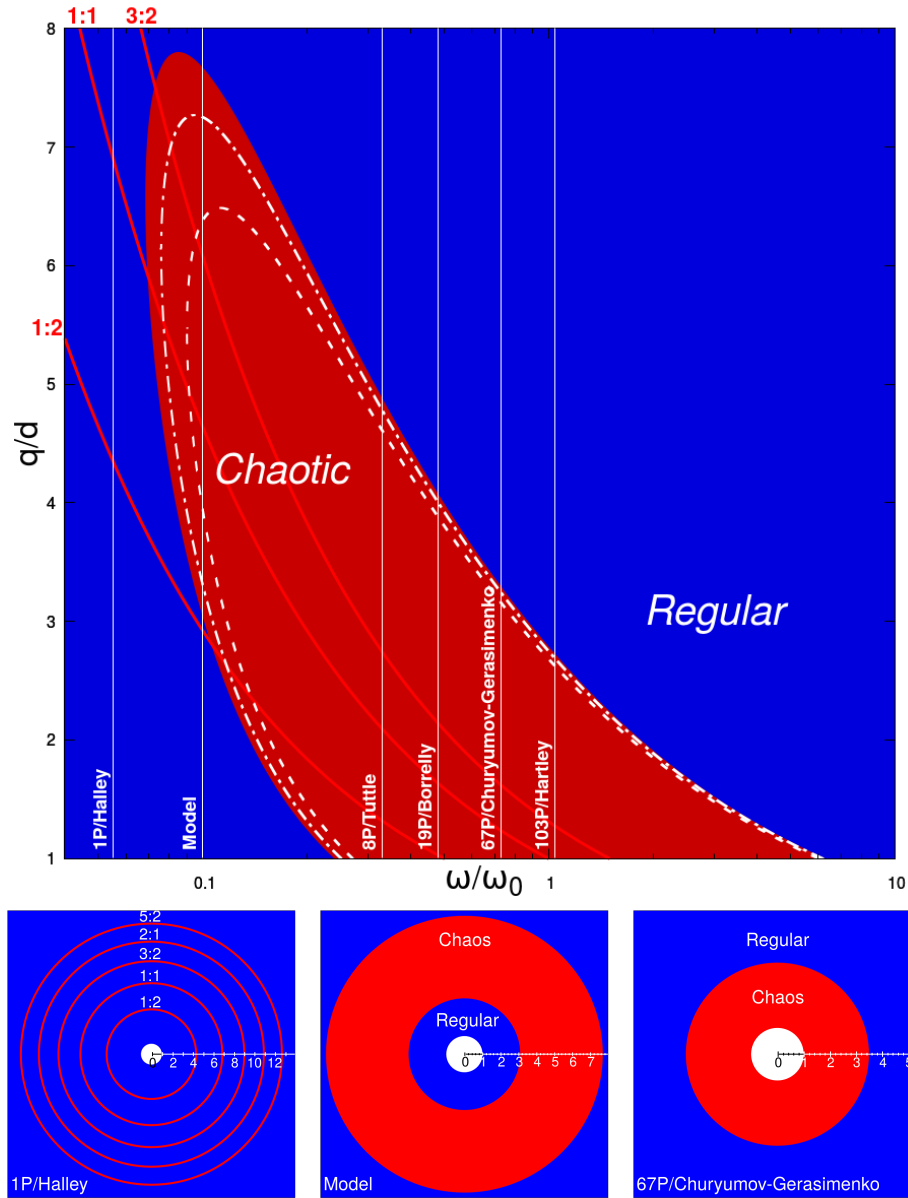


Figure 6.10 – Étendue de la zone chaotique centrale autour des noyaux cométaires en fonction de la fréquence de rotation ω . Panneau du haut : le domaine rouge correspond à la zone chaotique centrale pour un SBC symétrique $\mu = 1/2$; le domaine bleu correspond à la zone orbitale stable. Les pourtours de la zone chaotique centrale calculés pour $\mu \simeq 0.22$ (la masse réduite pour 19P/Borrelly) (---) et pour $\mu \simeq 0.32$ (la masse réduite de 8P/Tuttle) (-.-.-) sont tracés. Les fréquences de rotation ω des cinq noyaux cométaires (Table 6.1) sont représentées par les lignes verticales blanches. Les positions des résonances 1:1, 1:2 et 2:1 sont représentées par des courbes rouges. Panneaux du bas : représentations schématiques des résonances et des zones chaotiques (pour $e = 0$) autour du noyau de 1P/Halley (à gauche), du noyau d'une comète modèle symétrique $\mu = 1/2$ dont la fréquence de rotation est $\omega = 0.1\omega_0$ (au centre), et du noyau de 67P/Churyumov-Gerasimenko (à droite). Les centres de masse des noyaux cométaires sont placés au centre des différents panneaux. D'après Lages, Shevchenko et Rollin, 2018.

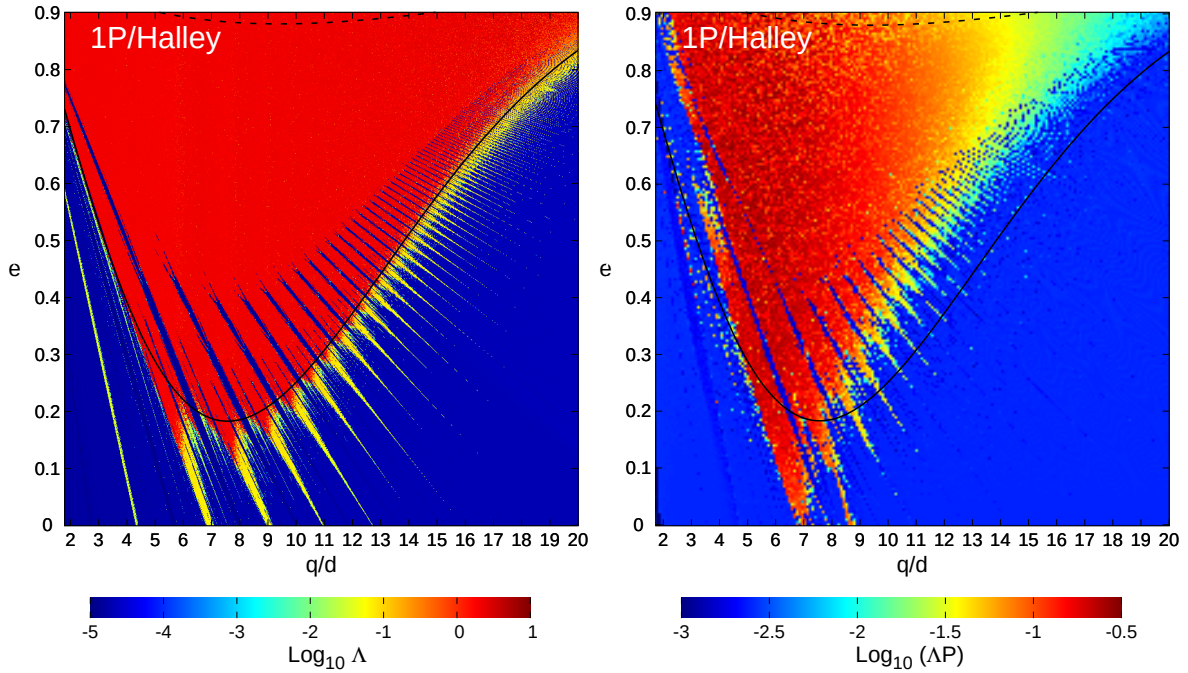


Figure 6.11 – Diagramme de stabilité orbitale autour du noyau cométaire de 1P/Halley ($\omega \simeq 0.055$, $\mu \simeq 0.28$) obtenu (à gauche) par l'itération de l'application de Kepler (6.2) et (à droite) en intégrant les équations du mouvement d'une particule autour du SBC avec les caractéristiques physiques de 1P/Halley. Le domaine chaotique est représenté par zone rougeâtre. Le chaos est déterminé par le calcul de l'exposant maximal de Lyapunov Λ pour une trajectoire dont les éléments orbitaux initiaux sont (q, e) . La courbe délimitant le bord du chaos (6.17) est montrée en tenant compte dans la fonction frappe ΔE (6.7) uniquement du terme W_1 (6.8) (----) et en tenant compte uniquement du terme W_2 (6.9) (—). Panneau de gauche : le nombre d'itération de l'application de Kepler (6.2) est 10^6 . L'exposant de Lyapunov Λ a les dimensions physiques de l'inverse d'un nombre d'itération de l'application. Panneau de droite : l'intégration numérique des équations du mouvement a été réalisé sur un laps de temps de $10^4 T_0$ où $T_0 = 2\pi/\omega_0$. L'exposant de Lyapunov Λ a les dimensions physiques de l'inverse d'un temps, et la quantité $(\Lambda P)^{-1}$ exprime le temps de Lyapunov en nombre de rotation (de période P) du noyau. D'après Lages, Shevchenko et Rollin, 2018.

orbitale (Figure 6.11) autour du noyau cométaire de 1P/Halley ($\omega \simeq 0.055\omega_0$, $\mu \simeq 0.28$). Sur la Figure 6.11, à gauche, nous voyons clairement qu'une particule initialement sur une orbite circulaire possède une dynamique régulière tant que la distance au périhélie ne correspond pas à une résonance entière ou demi-entière (voir les *dents* résonnantes coupant l'axe $e = 0$ sur la Figure 6.11 gauche). Ainsi, la zone chaotique centrale, définie comme le domaine en $[q_1, q_2]$ pour lequel n'importe quelle excentricité initiale conduit à une dynamique chaotique, est absent pour le cas de la comète de Halley. Cependant pour des excentricités initiales e plus élevées, le domaine chaotique est très étendu avec, e.g., une largeur de $\sim 10d$ pour $e \simeq 0.5$ ($q_1 \simeq 4d$, $q_2 \simeq 14d$) et $\sim 20d$ pour $e \simeq 0.8$ ($q_1 \simeq d$, $q_2 \sim 20d$).

Habituellement, l'application de Kepler est utilisée pour décrire des orbites fortement ex-

centriques autour d'un système binaire composé d'un corps primaire accompagné d'un corps secondaire jouant le rôle de perturbateur. C'est le cas par exemple de la dynamique de 1P/Halley autour du Soleil et de Jupiter (voir section 4, Chirikov et Vecheslavov, 1986, 1989 ; Rollin, Haag et Lages, 2015). L'application de Kepler fut dérivée pour $\omega a^{3/2} > \omega_0 d^{3/2}$, où $a = -1/2E$, afin de décrire les états de Rydberg moléculaires en présence d'un dipôle tournant (Benvenuto, Casati et Shepelyansky, 1994 ; Casati, Guarneri et Shepelyansky, 1988). Dans ces deux cas d'étude, la période orbitale du troisième corps est plus grande que la période de rotation du système binaire. Ainsi, les mouvements orbitaux décrits par l'application de Kepler sont situés au-dessus de la ligne de résonance 1:1 sur la Figure 6.10. D'après cette même figure, la dynamique d'un corps à proximité du noyau de 1P/Halley se situe en dessous de cette ligne de résonance. Par conséquent, afin de tester la validité de l'approche via l'application de Kepler (6.2) sous la ligne de résonance 1:1, i.e., pour $\omega a^{3/2} > \omega_0 d^{3/2}$, nous avons intégré numériquement les équations du mouvement décrivant la dynamique d'une particule autour d'un SBC ayant les caractéristiques physiques du noyau de 1P/Halley. Le diagramme de stabilité obtenu alors est montré à la Figure 6.11, à droite. Cette figure montre des caractéristiques similaires à celles obtenues avec l'application de Kepler, en particulier les bords chaotiques fractals des deux figures sont similaires.

Sur la Table 6.2 sont reportés, pour les noyaux cométaires étudiés, les rayons R_{Ch} des zones centrales chaotiques déduits des diagrammes de stabilité (Figures 6.9 et 6.11). Nous pouvons observer que les rayons obtenus à $e \simeq 0$ et $e \simeq 0.5$ sont similaires pour chaque noyau, à part pour la comète 1P/Halley. Pour un même noyau cométaire, il peut être intéressant de comparer la taille de la zone chaotique à la taille de la zone d'influence gravitationnelle du noyau. Ainsi, nous comparons les rayons R_{Ch} aux rayons de Hill des noyaux cométaires. Nous utilisons la formule donnée par Hamilton et Burns, 1992 pour les orbites excentriques, $R_{Hill} \approx q_\odot \left(M/3M_\odot \right)^{1/3}$ où $q_\odot$ est la distance au périhélie du noyau cométaire, M sa masse, et $M_\odot$ la masse du Soleil. Les rayons de Hill R_{Hill} pour chaque noyau sont reportés sur la Table 6.2. On observe que la taille typique R_{Ch} de la zone chaotique autour de 1P/Halley est la plus grande parmi les comètes étudiées, cette zone chaotique occupe, pour des excentricités modérées à élevées, une partie conséquente de la sphère de Hill, près de 38% pour $e \simeq 0.5$. Ceci est un effet de la faible vitesse de rotation du noyau de 1P/Halley.

L'inverse de l'exposant de Lyapunov Λ obtenu pour des conditions initiales (q, e) en itérant l'application de Kepler (6.2) donne le nombre d'itérations nécessaires à l'établissement du chaos. Les travaux de Shevchenko, 2007 donnent une forme semi-empirique pour l'exposant de Lyapunov

$$\Lambda(\lambda) \simeq C_K - 3/\lambda \quad (6.18)$$

où $C_K \simeq 2.2$. est la constante de Chirikov (Shevchenko, 2007) et λ le paramètre d'adiabaticité de l'application de Kepler (6.10) qui pour $n = 2$ est $\lambda = 2^{1/2} \pi \omega |W_2|^{-3/2}$ (Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017). Même dans le cas de 1P/Halley, qui est parmi les objets que nous avons considéré celui qui a la fréquence de rotation la plus lente, le chaos est non-adiabatique car le paramètre d'adiabaticité est très élevé, $\lambda \sim \omega |W_2|^{-3/2} \sim 100 \gg 1$.¹⁰ Par conséquent, l'exposant maximal de Lyapunov devrait être $\Lambda \simeq C_K \simeq 2.2$ pour toutes les zones chaotiques révélées par les diagrammes de stabilité orbitale. Nous avons effectivement vérifié que la couleur

10. En effet, d'après Lages, Shepelyansky et Shevchenko, 2017, $W_2 \simeq 10^{-2} (d\omega_0)^2$ pour $\omega \simeq 0.05\omega_0$ et $q > d$.

Comète	ω/ω_0	R_{ch} (km)		R_{Hill} (km)	$R_{\text{Ch}}/R_{\text{Hill}}$ (%)		T_L (h)	T_L/P
		$e \simeq 0$	$e \simeq 0.5$		$e \simeq 0$	$e \simeq 0.5$		
1P/Halley	0.055	—	31-108 ^a	200	—	16-54%	230	1.3
8P/Tuttle	0.33	25	32.5	620	4%	5.2%	28	2.5
19P/Borrelly	0.48	16	21	300	5%	7%	66	2.6
67P/C-G	0.73	9	11	320	3%	3.3%	35	2.9
103P/Hartley	1.04	3.4	4.2	52	7%	8.1%	56	3.1

^a Pour le noyau de 1P/Halley, nous donnons les rayons intérieur et extérieur de la zone chaotique annulaire pour $e \simeq 0.5$.

Table 6.2 – Caractéristiques des zones chaotiques entourant les noyaux cométaires : les paramètres sont ω la fréquence de rotation du noyau, ω_0 la fréquence képlérienne en assimilant le noyau à un système binaire képlérien, R_{Ch} le rayon de la zone chaotique centrale pour $e \simeq 0$ et $e \simeq 0.5$, R_{Hill} le rayon de Hill du noyau cométaire, T_L le temps de Lyapunov calculé pour une $q = R_{\text{Ch}}$ et $e \simeq 0.5$, et P la période de rotation du noyau cométaire. Adaptée de Lages, Shevchenko et Rollin, 2018.

rouge vive dominante des différents diagrammes de stabilité Figures 6.6, 6.7 (en bas), 6.8, 6.9, et 6.11 (à gauche) correspond bien à un exposant de Lyapunov $\Lambda \simeq C_K \simeq 2.2$ (voir Fig. 4 dans Lages, Shevchenko et Rollin, 2018).

L'exposant de Lyapunov Λ calculé à partir de l'application de Kepler (6.2) donne l'inverse d'un nombre d'itération. Il est nécessaire de connecter ce nombre d'itérations à un temps physique. Ainsi, le temps de Lyapunov local T_L pour un satellite en mouvement dans la zone chaotique d'un noyau peut être approximativement estimé par le rapport entre la période orbitale du satellite et l'exposant de Lyapunov de l'application de Kepler (Shevchenko, 2007, section 5). Comme précisé au paragraphe précédent, l'exposant de Lyapunov est supposé être le même sur toute la composante chaotique lorsque le paramètre d'adiabaticité est suffisamment élevé. Nous estimons alors T_L à l'aide de la période orbitale du satellite au bord de la zone chaotique, i.e., pour $a = R_{\text{Ch}}$ et $e = 0.5$, ceci donne la période orbitale maximale dans la zone chaotique, et par conséquent le temps local de Lyapunov maximal. Les estimations du temps de Lyapunov local pour chaque noyau cométaire sont reportées à la Table 6.2. On observe que ces temps de Lyapunov sont du même ordre de grandeur pour les différents noyaux, allant de ~ 1 à ~ 10 jours, et allant de ~ 1 à ~ 3 périodes de rotation du noyau. Ainsi, le mouvement d'une particule ou d'un satellite en orbite chaotique autour d'un de ces noyaux cométaires est rapidement, au bout de quelques rotations du noyau, imprévisible. Ceci est accentué pour des satellites sur des orbites plus basses ($a < R_{\text{Ch}}$), avec un temps local de Lyapunov plus court.

Parmi les cinq objets considérés listés dans les Tables 6.1 et 6.2, quatre d'entre eux ont vu leur direct voisinage visité par des sondes spatiales : 1P/Halley par *Vega-1*, *Vega-2*, *Giotto* en 1986, 19P/Borrelly par *Deep Space 1* en 2001, 67P/Churyumov-Gerasimenko par *Rosetta 1* en 2014–16, et 103P/Hartley par *Deep Impact EPOXI* en 2010. Lors de ces rencontres, aucun satellite n'a été observé autour de ces noyaux cométaires,¹¹ même si pour certains noyaux

11. À part des nuages de grains et de poussières constituant des réservoirs constamment vidés et remplis.

des recherches de satellites ont été méticuleusement menées (voir Bertini et al., 2015, et les références à l'intérieur). L'absence observée de satellite autour des noyaux cométaires est en accord avec les résultats théoriques présentés montrant une zone chaotique circum-nucléaire.

Parmi ces quatre noyaux, deux objets ont été observés précisément afin d'observer le transfert de masse entre le noyau et son environnement proche ainsi que la dynamique d'éjectas comme par exemple des morceaux d'eau glacée d'une taille de l'ordre du décimètre (A'Hearn et al., 2011 ; Keller et al., 2017). Ainsi, il existe une source pouvant introduire de la matière dans l'environnement proche du noyau comme cela est décrit par Fulle, 1997 et Scheeres et Marzari, 2000. Cependant, nos résultats théoriques impliquent que, même sans invoquer les autres forces non-gravitationnelles, aucune orbite stable à long terme ne peut être trouvée par ces éjectas qui leur permettraient de rester à l'intérieur de la zone chaotique circum-nucléaire.

6.6 Capture de matière par les petits corps du Système solaire

Les particules gravitationnellement diffusées par un corps irrégulier peuvent être capturées par ce dernier. En suivant les résultats exposés précédemment à la section 5.1, la section efficace de capture σ caractérise la probabilité qu'un système binaire képlérien ($\omega = \omega_0$) capture une particule lors de son passage au péricentre. Le fait que la zone chaotique autour d'un SBC s'agrandit considérablement lorsque $\omega \ll \omega_0$ doit conduire à un accroissement de la section efficace de capture σ . En effet, d'après Lages et Shepelyansky, 2013, l'expression de la section efficace de capture est $\sigma \sim \pi b^2 \sim qd(d\omega_0/v)^2$ où ici b est le paramètre d'impact et v la vitesse initiale à l'infini de la particule diffusée. Puisque d'après les équations (6.8), (6.9), l'énergie échangée (6.7) est non négligeable pour les distances au péricentre inférieures à $q \sim d(\omega_0/\omega)^{2/3}$, la section efficace de capture d'un corps irrégulier en rotation lente ($\omega/\omega_0 \ll 1$) devrait être augmentée de manière significative par rapport à la section efficace géométrique $\sim \pi d^2$. Un tel effet pourrait être important pour l'étude de la capture de poussière par un satellite en rotation.

Conclusion

Nous avons vu que la capture et la dynamique des particules de matière noire peuvent être décrites en généralisant l'application symplectique de Kepler (3.16). Les simulations numériques et les résultats analytiques montrent que la densité volumique de matière noire capturée aux alentours d'un système binaire est jusqu'à $\zeta_g \sim 10^4$ fois plus importante que la densité galactique de matière noire. La valeur du facteur d'accroissement ζ_g est maximale pour les grandes fréquences orbitales du système binaire. Notre approche basée sur la description du problème restreint à trois corps par une application symplectique est tout à fait générique. Elle peut également être utilisée pour l'analyse de la dynamique de comètes, d'astéroïdes, de poussière cosmique ou même de constituants libres flottants galactiques.

Il est possible de considérer le processus inverse d'*ionisation*. En observant l'application noire, une particule de matière noire sera éjectée d'un système binaire avec la vitesse $v_e \sim ((m_2/M) v_2)^{1/2}$ (5.2). Supposons un trou noir binaire dont la vitesse de rotation est $v_2 \sim c/10$. Pour un rapport de masse $m_2/M \sim 1/2$, la vitesse d'éjection est alors $v_e \sim 10^4 \text{ km.s}^{-1}$. Cette vitesse est ~ 100 fois plus élevée que la vitesse orbitale du Système solaire autour de la Galaxie. N'importe quel objet de masse négligeable devant m_2 est éjecté avec une vitesse de l'ordre de v_e . Ce mécanisme peut alors être à l'origine de trous noirs vagabonds ou d'étoiles errantes traversants l'Univers à très grandes vitesses.

Nous avons généralisé l'application de Kepler afin qu'elle puisse décrire le mouvement d'une particule dans le champ gravitationnel d'un petit corps irrégulier en rotation. Ce dernier pouvant être le plus souvent modélisé par un système binaire de contact (SBC), cette généralisation peut être accomplie en prenant en compte comme paramètre additionnel la fréquence de rotation du petit corps. Nous avons montré que la zone chaotique autour du SBC s'étend considérablement au fur et à mesure que la fréquence de rotation diminue. La taille de cette zone chaotique fait plus que doubler lorsque sa fréquence de rotation est diminuée 10 fois par rapport à la fréquence de rotation képlérienne permettant une désagrégation centrifuge du petit corps.

À partir de données observationnelles, nous avons déterminé analytiquement les propriétés des zones chaotiques autour des astéroïdes 243-Ida et 25143-Itokawa. En particulier, la construction de diagrammes de stabilité a permis de confirmer que la dynamique de Dactyl, satellite de Ida, est vraisemblablement chaotique. Notre approche décrit de manière qualitative la dynamique de Ida et Dactyl en accord avec les expériences numériques antérieures.

Nous avons aussi expliqué pourquoi il n'est pas possible de mettre de satellite en orbite autour de Itokawa et par la même occasion pourquoi Itokawa ne possède pas de satellite naturel.

Nous avons estimé les dimensions des zones chaotiques autour de cinq noyaux cométaires, connus pour être des SBC, et nous avons calculé les temps de Lyapunov des orbites instables à

l'intérieur de ces zones. Dans le cas de la comète 1P/Halley, la zone chaotique semble occuper une partie essentielle de la sphère de Hill de la comète (pour les orbites ayant une excentricité de modérée à grande).

Il est possible d'affirmer que les petits corps irréguliers du Système solaire, tels que les astéroïdes et les noyaux cométaires, auto-nettoient leur proche banlieue. Ce nettoyage est similaire au mécanisme engendrant les "lacunes de Wisdom" en présence d'une planète suffisamment massive (voir par exemple Murray et Dermott, [1999](#)), la différence étant que les lacunes de Wisdom sont formées par le recouvrement de résonances coorbitales du premier ordre, alors que la zone orbitale chaotique circum-binaire est issue du recouvrement des résonances spin-orbite entières et demi-entières.

Nos résultats théoriques nous permettent d'affirmer qu'aucun satellite ou même halo de particules, non régénérable, ne peut être observé aux abords directs d'un astéroïde ou d'un noyau cométaire bilobé.

Bibliographie

- A'Hearn, M. F. et al. (2011). « EPOXI at Comet Hartley 2 ». *Science* 332.6036, p. 1396-1400. ISSN : 0036-8075. DOI : [10.1126/science.1204054](https://doi.org/10.1126/science.1204054).
- Bartczak, P. et Breiter, S. (juin 2003). « Double Material Segment as the Model of Irregular Bodies ». *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 86, p. 131-141.
- Begeman, K. (1987). « HI rotation curves of spiral galaxies ». English. Thèse de doct. University of Groningen. URL : <http://hdl.handle.net/11370/42c22221-cf69-40d8-82bd-5a28101effef>.
- Belton, M. J. S. et al. (avr. 1995). « Bulk density of asteroid 243 Ida from the orbit of its satellite Dactyl ». *Nature* 374, p. 785-788. DOI : [10.1038/374785a0](https://doi.org/10.1038/374785a0).
- Belton, M. J. et al. (1996). « Galileo's Encounter with 243 Ida : An Overview of the Imaging Experiment ». *Icarus* 120.1, p. 1 -19. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1006/icar.1996.0032](https://doi.org/10.1006/icar.1996.0032).
- Belton, M. J. et al. (2013). « The complex spin state of 103P/Hartley 2 : Kinematics and orientation in space ». *Icarus* 222.2, p. 595 -609. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2012.06.037](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2012.06.037).
- Benvenuto, F., Casati, G. et Shepelyansky, D. L. (1994). « Chaotic autoionization of molecular Rydberg states ». *Phys. Rev. Lett.* 72 (12), p. 1818-1821. DOI : [10.1103/PhysRevLett.72.1818](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.1818).
- Bertini, I et al. (2015). « Search for satellites near comet 67P/Churyumov-Gerasimenko using Rosetta/OSIRIS images ». *A&A* 583, A19. DOI : [10.1051/0004-6361/201525979](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525979).
- Bertone, G., Hooper, D. et Silk, J. (2005). « Particle dark matter : evidence, candidates and constraints ». *Physics Reports* 405.5, p. 279 -390. ISSN : 0370-1573. DOI : [10.1016/j.physrep.2004.08.031](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.031).
- Borgonovi, F., Guarneri, I. et Sempio, P. (1988). « Long-time decay properties of Kepler map ». *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)* 102.2, p. 151-158. ISSN : 1826-9877. DOI : [10.1007/BF02726564](https://doi.org/10.1007/BF02726564).
- Britt, D. et al. (2004). « The morphology and surface processes of Comet 19P/Borrelly ». *Icarus* 167.1, p. 45 -53. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2003.09.004](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2003.09.004).
- Buratti, B. et al. (2004). « Deep Space 1 photometry of the nucleus of Comet 19P/Borrelly ». *Icarus* 167.1, p. 16 -29. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2003.05.002](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2003.05.002).
- Burton, W. B. (1983). « Summary : Observational Viewpoint ». *Symposium - International Astronomical Union* 100, 403-410. DOI : [10.1017/S0074180900033362](https://doi.org/10.1017/S0074180900033362).
- Casati, G., Guarneri, I. et Shepeliensky, D. L. (juil. 1988). « Hydrogen atom in monochromatic field : Chaos and dynamical photonic localization ». *IEEE Journal of Quantum Electronics* 24, p. 1420-1444. DOI : [10.1109/3.982](https://doi.org/10.1109/3.982).

- Casati, G., Guarneri, I. et Shepelyansky, D. L. (1987). « Exponential photonic localization for the hydrogen atom in a monochromatic field ». *Phys. Rev. A* 36 (7), p. 3501-3504. DOI : [10.1103/PhysRevA.36.3501](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.36.3501).
- Chauvineau, B., Farinella, P. et Mignard, F. (oct. 1993). « Planar orbits about a triaxial body - Application to asteroidal satellites ». *Icarus* 105, p. 350-384. DOI : [10.1006/icar.1993.1134](https://doi.org/10.1006/icar.1993.1134).
- Chirikov, B. et Shepelyansky, D. (2008). « Chirikov standard map ». *Scholarpedia* 3.3. revision #188621, p. 3550. DOI : [10.4249/scholarpedia.3550](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.3550).
- Chirikov, B. V. (1960). « Resonance processes in magnetic traps ». *Journal of Nuclear Energy. Part C, Plasma Physics, Accelerators, Thermonuclear Research* 1.4, p. 253-260. DOI : [10.1088/0368-3281/1/4/311](https://doi.org/10.1088/0368-3281/1/4/311).
- Chirikov, B. V. (1979). « A universal instability of many-dimensional oscillator systems ». *Physics Reports* 52.5, p. 263-379. ISSN : 0370-1573. DOI : [10.1016/0370-1573\(79\)90023-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(79)90023-1).
- Chirikov, B. V. et Vecheslavov, V. V. (1986). « Chaotic dynamics of Comet Halley ». *INP Preprint 86-184. Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk*. (Available at <http://www.quantware.ups-tlse.fr/chirikov/publbinp.html>).
- (août 1989). « Chaotic dynamics of Comet Halley ». *Astron. Astrophys.* 221, p. 146-154. URL : <http://adsabs.harvard.edu/abs/1989A%26A...221..146C>.
- Emelyanenko, V. V. (juil. 1990). « Motion of Nearly Parabolic Comets Under the Action of Weak Planetary Perturbations ». *Soviet Astronomy Letters* 16, p. 318. URL : <http://adsabs.harvard.edu/abs/1990SvAL...16..318E>.
- Feng, J. et al. (août 2016). « Numerical analysis of orbital motion around a contact binary asteroid system ». *Advances in Space Research* 58, p. 387-401. DOI : [10.1016/j.asr.2016.04.032](https://doi.org/10.1016/j.asr.2016.04.032).
- Feng, J. et al. (2017). « 1 :1 Ground-track resonance in a uniformly rotating 4th degree and order gravitational field ». *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 127.1, p. 67-93. ISSN : 1572-9478. DOI : [10.1007/s10569-016-9717-9](https://doi.org/10.1007/s10569-016-9717-9).
- Fujiwara, A. et al. (juin 2006). « The Rubble-Pile Asteroid Itokawa as Observed by Hayabusa ». *Science* 312, p. 1330-1334. DOI : [10.1126/science.1125841](https://doi.org/10.1126/science.1125841).
- Fulle, M. (sept. 1997). « Injection of large grains into orbits around comet nuclei. » *Astron. Astrophys.* 325, p. 1237-1248.
- Fuse, T. et al. (2008). « Searching satellites of asteroid Itokawa by imaging observation with Hayabusa spacecraft ». *Earth, Planets and Space* 60.1, p. 33-37. ISSN : 1880-5981. DOI : [10.1186/BF03352759](https://doi.org/10.1186/BF03352759).
- Gaskell, R. et al. (sept. 2008). « Gaskell Itokawa Shape Model V1.0 ». *NASA Planetary Data System* 92.
- Gontis, V. et Kaulakys, B. (1987). « Stochastic dynamics of hydrogenic atoms in the microwave field : modelling by maps and quantum description ». *Journal of Physics B : Atomic and Molecular Physics* 20.19, p. 5051. DOI : [10.1088/0022-3700/20/19/016](https://doi.org/10.1088/0022-3700/20/19/016).
- Gould, A. et Alam, S. M. K. (2001). « Can Heavy WIMPs Be Captured by the Earth ? » *The Astrophysical Journal* 549.1, p. 72-75. DOI : [10.1086/319040](https://doi.org/10.1086/319040).
- GRAVITY Collaboration (2018). « Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole ». *A&A* 615, p. L15. DOI : [10.1051/0004-6361/201833718](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833718).

- Greene, J. M. (1979). « A method for determining a stochastic transition ». *Journal of Mathematical Physics* 20.6, p. 1183-1201. DOI : [10.1063/1.524170](https://doi.org/10.1063/1.524170).
- Hamilton, D. P. et Burns, J. A. (1992). « Orbital stability zones about asteroids ». *Icarus* 96.1, p. 43-64. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/0019-1035\(92\)90005-R](https://doi.org/10.1016/0019-1035(92)90005-R).
- Harmon, J. K. et al. (2010). « Radar observations of 8P/Tuttle : A contact-binary comet ». *Icarus* 207.1, p. 499-502. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2009.12.026](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2009.12.026).
- Harmon, J. K. et al. (2011). « Radar Observations of Comet 103P/Hartley 2 ». *Astrophys. J.* 734.1, p. L2. URL : <http://stacks.iop.org/2041-8205/734/i=1/a=L2>.
- Heggie, D. C. et Urminsky, D. J. (jan. 2009). « On the relationship between instability and Lyapunov times for the three-body problem ». *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 392.3, p. 1051-1059. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2008.14149.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.14149.x).
- Heggie, D. C. (1975). « Binary Evolution in Stellar Dynamics ». *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* 173.3, p. 729. DOI : [10.1093/mnras/173.3.729](https://doi.org/10.1093/mnras/173.3.729).
- Hergenrother, C. W. et Whiteley, R. J. (2011). « A survey of small fast rotating asteroids among the near-Earth asteroid population ». *Icarus* 214.1, p. 194 -209. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2011.03.023](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2011.03.023).
- Hu, W. et Scheeres, D. J. (juil. 2004). « Numerical determination of stability regions for orbital motion in uniformly rotating second degree and order gravity fields ». *Planetary and Space Science* 52, p. 685-692. DOI : [10.1016/j.pss.2004.01.003](https://doi.org/10.1016/j.pss.2004.01.003).
- Jewitt, D., Sheppard, S. et Fernández, Y. (2003). « 143P/Kowal-Mrkos and the Shapes of Cometary Nuclei ». *Astron. J.* 125.6, p. 3366. URL : <http://stacks.iop.org/1538-3881/125/i=6/a=3366>.
- Jorda, L. et al. (2016). « The global shape, density and rotation of Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko from preperihelion Rosetta/OSIRIS observations ». *Icarus* 277, p. 257 -278. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2016.05.002](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2016.05.002).
- Kaasalainen, M. et al. (2003). « CCD photometry and model of MUSES-C target (25143) 1998 SF36 ». *A&A* 405.3, p. L29-L32. DOI : [10.1051/0004-6361:20030819](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20030819).
- Keller, H. U. et al. (2017). « Seasonal mass transfer on the nucleus of comet 67P/Chuyumov–Gerasimenko ». *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 469.Suppl 2, S357-S371. DOI : [10.1093/mnras/stx1726](https://doi.org/10.1093/mnras/stx1726).
- Khriplovich, I. B. et Shepelyansky, D. L. (2009). « Capture of dark matter by the solar system ». *International Journal of Modern Physics D* 18.12, p. 1903-1912. DOI : [10.1142/S0218271809015758](https://doi.org/10.1142/S0218271809015758).
- Kolyuka, Y. F., Tarasov, V. P. et Tikhonov, V. G. (oct. 1985). « The orbit of comet Halley, refined by current observations ». *Pisma v Astronomicheskii Zhurnal* 11, p. 778-784. URL : <http://adsabs.harvard.edu/abs/1985PAZh...11..778K>.
- Lages, J., Shepelyansky, D. et Shevchenko, I. I. (2018). « Kepler map ». *Scholarpedia* 13.2, p. 33238. DOI : [10.4249/scholarpedia.33238](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.33238).
- Lages, J. et Shepelyansky, D. L. (2013). « Dark matter chaos in the Solar system ». *MNRAS* 430.1, p. L25-L29. DOI : [10.1093/mnrasl/sls045](https://doi.org/10.1093/mnrasl/sls045).
- Lages, J., Shepelyansky, D. L. et Shevchenko, I. I. (2017). « Chaotic Zones around Rotating Small Bodies ». *Astron. J.* 153.6, p. 272. DOI : [10.3847/1538-3881/aa7203](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa7203).
- Lages, J., Shevchenko, I. I. et Rollin, G. (2018). « Chaotic dynamics around cometary nuclei ». *Icarus* 307, p. 391 -399. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2017.10.035](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.10.035).

- Lamy, P. L., Toth, I. et Weaver, H. A. (sept. 1998). « Hubble Space Telescope observations of the nucleus and inner coma of comet 19P/1904 Y2 (Borrelly) ». *Astron. Astrophys.* 337, p. 945-954.
- Lichtenberg, A. J. et Lieberman, M. A. (1992). *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer New York.
- Lowry, S. C. et al. (2014). « The internal structure of asteroid (25143) Itokawa as revealed by detection of YORP spin-up ». *A&A* 562, A48. DOI : [10.1051/0004-6361/201322602](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201322602).
- Lundberg, J. et Edsjö, J. (2004). « Weakly interacting massive particle diffusion in the solar system including solar depletion and its effect on Earth capture rates ». *Phys. Rev. D* 69 (12), p. 123505. DOI : [10.1103/PhysRevD.69.123505](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.123505).
- Maltagliati, L. (2017). *Nature Astronomy* 1. DOI : [10.1038/s41550-017-0168](https://doi.org/10.1038/s41550-017-0168).
- Marchis, F. et al. (mar. 2014). « The Puzzling Mutual Orbit of the Binary Trojan Asteroid (624) Hektor ». *Astrophys. J.* 783, L37, p. L37. DOI : [10.1088/2041-8205/783/2/L37](https://doi.org/10.1088/2041-8205/783/2/L37).
- Meeus, J. (1952). « Le centre de gravité du système solaire ». *Ciel et Terre* 68, p. 288. URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1952C&T...68..288M>.
- Melnikov, A. et Shevchenko, I. (2010). « The rotation states predominant among the planetary satellites ». *Icarus* 209.2, p. 786 -794. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2010.04.022](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2010.04.022).
- Merényi, E. et al. (1990). « The landscape of Comet Halley ». *Icarus* 86.1, p. 9-20. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/0019-1035\(90\)90194-E](https://doi.org/10.1016/0019-1035(90)90194-E).
- Murray, C. D. et Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Mysen, E. et Aksnes, K. (août 2007). « On the dynamical stability of the Rosetta orbiter. II. » *Astron. Astrophys.* 470, p. 1193-1199. DOI : [10.1051/0004-6361:20077472](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20077472).
- Mysen, E., Olsen, Ø. et Aksnes, K. (août 2006). « Chaotic gravitational zones around a regularly shaped complex rotating body ». *Planet. Space Sci.* 54, p. 750-760. DOI : [10.1016/j.pss.2006.04.005](https://doi.org/10.1016/j.pss.2006.04.005).
- Oberst, J et al. (2004). « The nucleus of Comet Borrelly : a study of morphology and surface brightness ». *Icarus* 167.1, p. 70 -79. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2003.05.001](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2003.05.001).
- Olsen, Ø. (avr. 2006). « Orbital resonance widths in a uniformly rotating second degree and order gravity field ». *Astron. Astrophys.* 449, p. 821-826. DOI : [10.1051/0004-6361:20054451](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20054451).
- Ostriker, J. P. et Peebles, P. J. E. (déc. 1973). « A Numerical Study of the Stability of Flattened Galaxies : or, can Cold Galaxies Survive? » *ApJ* 186, p. 467-480. DOI : [10.1086/152513](https://doi.org/10.1086/152513).
- Peter, A. H. G. (2009). « Dark matter in the Solar System. I. The distribution function of WIMPs at the Earth from solar capture ». *Phys. Rev. D* 79 (10), p. 103531. DOI : [10.1103/PhysRevD.79.103531](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.103531).
- Petit, J. et al. (nov. 1997). « The long-term dynamics of Dactyl's orbit ». *Icarus* 130.1, p. 177-197. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1006/icar.1997.5788](https://doi.org/10.1006/icar.1997.5788).
- Petrosky, T. Y. (1986). « Chaos and cometary clouds in the solar system ». *Physics Letters A* 117.7, p. 328 -332. ISSN : 0375-9601. DOI : [10.1016/0375-9601\(86\)90673-0](https://doi.org/10.1016/0375-9601(86)90673-0).
- Petrosky, T. Y. et Broucke, R. (1988). « Area-preserving mappings and deterministic chaos for nearly parabolic motions ». *Celestial Mechanics* 42, p. 53-79. URL : <http://adsabs.harvard.edu/abs/1988CeMec...42...53P>.

-
- Pravec, P. et al. (2008). « Spin rate distribution of small asteroids ». *Icarus* 197.2, p. 497 -504. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2008.05.012](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2008.05.012).
- Rickman, H. et al. (2015). « Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko : Constraints on its origin from OSIRIS observations ». *Astron. Astrophys.* 583, A44. DOI : [10.1051/0004-6361/201526093](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201526093).
- Rollin, G., Haag, P. et Lages, J. (2015). « Symplectic map description of Halley's comet dynamics ». *Physics Letters A* 379.14-15, p. 1017-1022. ISSN : 0375-9601. DOI : [10.1016/j.physleta.2015.02.001](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.02.001).
- Rollin, G., Lages, J. et Shepelyansky, D. L. (2015). « Chaotic enhancement of dark matter density in binary systems ». *Astron. Astrophys.* 576, A40. DOI : [10.1051/0004-6361/201425576](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201425576).
- Rollin, G. (2015). « Chaos dynamique dans le problème à trois corps restreint ». Thèse de doct. Besançon, France : Université de Franche-Comté. URL : <https://www.theses.fr/2015BESA2028>.
- Roy, A. et Haddow, M. (2003). « Energy Change in a Hard Binary Due to Distant Encounters ». *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 87.4, p. 411-435. ISSN : 1572-9478. DOI : [10.1023/B:CELE.0000006767.34371.2f](https://doi.org/10.1023/B:CELE.0000006767.34371.2f).
- Rubin, V. C., Ford Jr., W. K. et Thonnard, N. (juin 1980). « Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 ($R = 4\text{ kpc}$) to UGC 2885 ($R = 122\text{ kpc}$) ». *ApJ* 238, p. 471-487. DOI : [10.1086/158003](https://doi.org/10.1086/158003).
- Sanders, R. H. (2010). *The Dark Matter Problem : A Historical Perspective*. Cambridge University Press. DOI : [10.1017/CB09781139192309](https://doi.org/10.1017/CB09781139192309).
- Scheeres, D. J. (1994). « Dynamics about Uniformly Rotating Triaxial Ellipsoids : Applications to Asteroids ». *Icarus* 110.2, p. 225 -238. ISSN : 0019-1035. DOI : <https://doi.org/10.1006/icar.1994.1118>.
- (mar. 2012a). « Orbital mechanics about small bodies ». *Acta Astronautica* 72, p. 1-14. DOI : [10.1016/j.actaastro.2011.10.021](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2011.10.021).
- (2012b). *Orbital Motion in Strongly Perturbed Environments*. Springer-Praxis books in astronautical engineering. New York, NY : Springer. ISBN : 978-3-642-03255-4. DOI : [10.1007/978-3-642-03255-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-03255-1).
- Scheeres, D. J. et Marzari, F. (avr. 2000). « Temporary orbital capture of ejecta from comets and asteroids : Application to the Deep Impact experiment ». *Astron. Astrophys.* 356, p. 747-756.
- Scheeres, D. J., Williams, B. G. et Miller, J. K. (mai 2000). « Evaluation of the Dynamic Environment of an Asteroid : Applications to 433 Eros ». *Journal of Guidance Control Dynamics* 23, p. 466-475. DOI : [10.2514/2.4552](https://doi.org/10.2514/2.4552).
- Scheeres, D. J. et al. (mai 1996). « Orbits Close to Asteroid 4769 Castalia ». *Icarus* 121, p. 67-87. DOI : [10.1006/icar.1996.0072](https://doi.org/10.1006/icar.1996.0072).
- Scheeres, D. (2007). « Rotational fission of contact binary asteroids ». *Icarus* 189.2, p. 370 -385. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2007.02.015](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2007.02.015).
- Schleicher, D. G. et al. (2015). « The Evolving Photometric Lightcurve of Comet 1P/Halley's Coma during the 1985/86 Apparition ». *Astron. J.* 150.3, p. 79. URL : <http://stacks.iop.org/1538-3881/150/i=3/a=79>.
- Shepelyansky, D. (2009). « Chirikov criterion ». *Scholarpedia* 4.9. revision #152383, p. 8567. DOI : [10.4249/scholarpedia.8567](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.8567).
-

- Shepelyansky, D. (2012). « Microwave ionization of hydrogen atoms ». *Scholarpedia* 7.1, p. 9795. DOI : [10.4249/scholarpedia.9795](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.9795).
- Shevchenko, I. I. (mai 2007). « On the Lyapunov exponents of the asteroidal motion subject to resonances and encounters ». In : *Near Earth Objects, our Celestial Neighbors : Opportunity and Risk (Proc. IAU Symp. 236)*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 15-29. Sous la dir. de G. B. Valsecchi, D. Vokrouhlický et A. Milani. T. 236. IAU Symposium, p. 15-30. DOI : [10.1017/S174392130700302X](https://doi.org/10.1017/S174392130700302X).
- Shevchenko, I. I. (2011). « The Kepler map in the three-body problem ». *New Astronomy* 16.2, p. 94-99. ISSN : 1384-1076. DOI : [10.1016/j.newast.2010.06.008](https://doi.org/10.1016/j.newast.2010.06.008).
- (2015). « Chaotic Zones around Gravitating Binaries ». *Astrophys. J.* 799.1, p. 8. DOI : [10.1088/0004-637X/799/1/8](https://doi.org/10.1088/0004-637X/799/1/8).
- Soderblom, L. et al. (2004). « Imaging Borrelly ». *Icarus* 167.1, p. 4 -15. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2003.07.008](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2003.07.008).
- Stooke, P. J. et Abergel, A. (août 1991). « Morphology of the nucleus of Comet P/Halley ». *Astron. Astrophys.* 248, p. 656-668.
- Thomas, P. et al. (2013). « Shape, density, and geology of the nucleus of Comet 103P/Hartley 2 ». *Icarus* 222.2, p. 550 -558. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2012.05.034](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2012.05.034).
- Vokrouhlický, D., Nesvorný, D. et Bottke, W. F. (2003). « The vector alignments of asteroid spins by thermal torques ». *Nature* 425, p. 147-151.
- Warner, B. D., Harris, A. W. et Pravec, P. (2009). « The asteroid lightcurve database ». *Icarus* 202.1, p. 134-146. ISSN : 0019-1035. DOI : [10.1016/j.icarus.2009.02.003](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2009.02.003).
- Werner, R. A. (juil. 1994). « The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners ». *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 59, p. 253-278. DOI : [10.1007/BF00692875](https://doi.org/10.1007/BF00692875).
- Werner, R. A. et Scheeres, D. J. (sept. 1996). « Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia ». *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 65, p. 313-344. DOI : [10.1007/BF00053511](https://doi.org/10.1007/BF00053511).
- Whiteley, R. J., Hergenrother, C. W. et Tholen, D. J. (nov. 2002). « Monolithic fast-rotating asteroids ». In : *Asteroids, Comets, and Meteors : ACM 2002*. Sous la dir. de B. Warmbein. T. 500. ESA Special Publication, p. 473-480.
- Yeomans, D. K. et Kiang, T. (déc. 1981). « The long-term motion of comet Halley ». *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 197.3, p. 633-646. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/197.3.633](https://doi.org/10.1093/mnras/197.3.633).
- Yu, Y. et Baoyin, H. (2012). « Orbital Dynamics in the Vicinity of Asteroid 216 Kleopatra ». *AJ* 143, 62, p. 62. DOI : [10.1088/0004-6256/143/3/62](https://doi.org/10.1088/0004-6256/143/3/62).
- Zhou, J.-L. et al. (déc. 2000). « The transfer of comets from near-parabolic to short-period orbits : map approach ». *A&A* 364, p. 887-893. URL : <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000A%26A...364..887Z>.
- Zimmer, M. et al. (2014). « Precision Control of Autonomous Spacecraft During Close-Proximity NEO Operations Using Classical Control Methodologies ». In : *Lunar and Planetary Science Conference*. T. 45, p. 2226.
- Zwicky, F. (1933). « Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln ». *Helvetica Physica Acta* 6, p. 110-127.
- (oct. 1937). « On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae ». *ApJ* 86, p. 217. DOI : [10.1086/143864](https://doi.org/10.1086/143864).

Troisième partie

Analyse de réseaux complexes

Table des matières

Présentation	117
7 Matrice de Google (réduite)	121
7.1 Matrice de Google, algorithmes PageRank et CheiRank	121
7.1.1 Construction de la matrice de Google et du vecteur PageRank	121
7.1.2 Algorithme PageRank	125
7.2 Construction de la matrice de Google réduite	126
7.3 Sensibilité du vecteur de Perron ou Sensibilité du PageRank	128
8 Réseaux Wikipédia	131
8.1 Classement mondial des universités selon Wikipédia	131
8.1.1 Classements PageRank et CheiRank	133
8.1.2 Comparaison WRWU vs ARWU	133
8.1.3 Distribution géographique	136
8.1.4 Évolution à travers les siècles	138
8.1.5 Intrication des cultures	139
8.1.6 Écho médiatique	140
8.1.7 Réseaux réduits des universités	140
8.2 Maladies infectieuses dans Wikipédia	145
8.2.1 Classement PageRank et CheiRank des maladies infectieuses	146
8.2.2 Interactions mutuelles entre maladies infectieuses, et interactions entre maladies infectieuses et pays du globe	146
8.2.3 Sensibilités des pays du globe aux maladies infectieuses	151
9 Réseaux de protéines en interaction : application à l'oncologie	153
10 Réseau du commerce international	155
10.1 Matrice de Google pour le réseau du commerce international	156
10.2 Réseau réduit des échanges d'hydrocarbures dans l'UE	157
10.3 Sensibilité de la balance commerciale	159
Conclusion	163
Bibliographie	167

Présentation

Dans cette partie sont présentés des travaux consacrés à la matrice de Google et à l'analyse de réseaux complexes. Le lecteur trouvera ci-dessous une présentation des différents thèmes développés dans les chapitres suivants, ainsi que les principaux résultats obtenus.

La valorisation des gigantesques quantités de données est l'un des objectifs majeurs de l'économie actuelle. Celles-ci sont produites à un rythme effréné par notre société et leur stockage pose d'importants problèmes économiques et environnementaux. À défaut de pouvoir résoudre ces problèmes dans l'immédiat, il est plus que judicieux d'essayer de transformer ces mégadonnées en une manne économique. Cette valorisation ne peut se faire qu'en classant/triant ces énormes quantités d'information afin d'en extraire des informations pertinentes à destination de la recherche publique ou privée.

Les sources de données de plus en plus variées et de plus en plus volumineuses peuvent dans grand nombre de cas être modélisées par de grands réseaux (ou graphes) orientés. Le succès commercial du moteur de recherche Google est principalement dû à un algorithme, l'algorithme PageRank (voir l'article des co-fondateurs, Brin et Page, 1998, de Google), traitant le WWW comme un réseau sur lequel un surfeur aléatoire saute d'une page à une autre en fonction des hyperliens existants ; mimant ainsi une marche aléatoire markovienne sur réseau.¹² Prolongeant les travaux de Brin et Page, 1998, un réseau orienté peut être encodé dans une matrice stochastique – la matrice de Google (Langville et Meyer, 2012), qui appartient à la classe des opérateurs de Perron-Frobenius.

Classement international des universités selon Wikipédia Nous avons considéré les réseaux orientés d'articles¹³ de 24 éditions de Wikipédia pour produire le palmarès mondial des universités selon Wikipédia (Lages, Patt et Shepelyansky, 2016). En utilisant les algorithmes PageRank, 2DRank et CheiRank (voir Ermann, Frahm et Shepelyansky, 2015, pour une revue), nous traitons de façon statistique le savoir encodé dans ces 24 éditions représentant plus de 60% de la population mondiale et plus de 60% des pages de Wikipédia toutes éditions linguistiques confondues. Contrairement aux classements internationaux disponibles,¹⁴ posant au préalable des critères de classement, tels que le nombre de publications dans certains journaux comme Nature, le nombre de récipiendaires du prix Nobel ou de la médaille Fields parmi les chercheurs de l'université..., notre méthode mathématique, indépendante de tous critères liés à une vision

12. Même si aucune mention n'est faite au travaux de Markov dans l'article de Brin et Page, 1998.

13. Ici, les nœuds du réseau sont les articles Wikipédia d'une édition donnée et les liens orientés sont les renvois existants entre les différents articles.

14. Un recensement de ces classements est disponible à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/College_and_university_rankings

donnée du monde académique, permet d'inclure sur un même pied d'égalité de multiples points de vue culturels encodés dans le savoir humain accumulé dans les différentes éditions linguistiques de Wikipédia (Lages, Patt et Shepelyansky, 2016).

Le top 10 (top 100) de ce classement Wikipédia des universités recouvre à 90% (60%) le top 10 (top 100) du classement académique des universités mondiales de l'université Jiao Tong de Shanghai. Outre le fait que notre classement constitue une mesure complémentaire de l'excellence académique des établissements supérieurs d'enseignement et de recherche, il mesure également l'importance historique, sociétale, et/ou régionale des universités. Une analyse du développement historique des universités est donnée sur les 10 derniers siècles (Lages, Patt et Shepelyansky, 2016).¹⁵

Notre article a notamment été remarqué par le magazine *MIT Technology Review*, comme l'un des meilleurs articles de l'année 2015. Notre article a été l'objet d'une centaine d'articles dans les médias de 22 pays différents.¹⁶

En septembre 2018, nous avons publié le palmarès mondial des universités 2017 d'après l'extraction des réseaux d'articles Wikipédia en mai 2017 (Coquidé, Lages et Shepelyansky, 2019b).¹⁷ Nous avons appliqué aux réseaux d'articles Wikipédia une nouvelle méthode¹⁸ utilisant la matrice de Google réduite qui a permis de déterminer les interactions effectives entre les universités les plus influentes, sur une échelle de 10 siècles, et pour différentes cultures au travers de différentes éditions linguistiques (Coquidé, Lages et Shepelyansky, 2019b).

Googlomics : application de la matrice de Google (réduite) aux réseaux de protéines pour l'étude du cancer La matrice de Google réduite permet d'associer à un petit sous-réseau, de quelques nœuds, faisant partie d'un réseau orienté global de très grande taille, une matrice de Google effective. Cette matrice de Google, bien que réduite, encode toute l'information du réseau global ; elle se décompose naturellement en une matrice de liens directs entre les nœuds du sous-réseau et en une matrice donnant les liens indirects entre ces mêmes nœuds. Même en l'absence de liens directs entre deux nœuds, ces derniers peuvent être fortement liés par le truchement de liens successifs entre d'autres nœuds du réseau global (Frahm et Shepelyansky, 2016 ; Frahm, Jaffrès-Runser et Shepelyansky, 2016 ; Lages, Shepelyansky et Zinovyev, 2018).

Généralement les chemins de signalisation biologiques, signatures d'une machinerie moléculaire complexe, sont supposés constituer un sous-réseau enchâssé dans un réseau moléculaire global. Ainsi, toutes les propriétés de fonctionnement de ces chemins dépendent de l'environnement auquel est connecté le sous-réseau considéré. Usuellement seules sont prises en compte les relations causales directes entre les protéines associées à ces chemins de signalisation ; les relations causales indirectes qui dépendent de l'environnement sont le plus souvent ignorées.

Les réseaux orientés étudiés sont ici constitués de protéines en interaction enchâssées dans un environnement sain ou cancéreux (Lages, Shepelyansky et Zinovyev, 2018). Nous caracté-

15. Le classement mondial des universités selon Wikipédia, ainsi que d'autres classements complémentaires issus de nos travaux, sont disponibles à l'adresse <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/datasets/WRWU/>.

16. La liste, arrêtée au 5 septembre 2016, se trouve à l'adresse <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/datasets/WRWU/press/Press.html>.

17. L'article de référence ainsi que les données associées se trouve à l'adresse <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/datasets/WRWU17/>.

18. Voir description au paragraphe suivant.

risons la propagation du signal le long des chemins en considérant un processus stochastique markovien sur le réseau global biologique. La quantification des liens causals cachés entre les protéines participant aux chemins de signalisation est donnée par la matrice de Google réduite. Nous avons montré que l'analyse globale d'un réseau orienté biologique utilisant la matrice de Google permet de donner des indications sur l'évolution de la topologie du réseau suivant le contexte biologique (cancéreux ou pas) de celui-ci. Également, nous avons montré qu'une grande probabilité PageRank correspond à une protéine ayant un rôle particulier dans le réseau de régulation, comme par exemple, une protéine étant le point d'arrivée de multiples et longues cascades d'interactions moléculaires. Ce type de rôle est en général difficilement détectable par les autres approches standard d'analyse de graphes.

Nous avons appliqué la méthode de la matrice de Google réduite à des sous groupes de protéines correspondant à des fonctions biologiques bien définies (signal de survie de cellule, prolifération de cellules, ...). L'approche de la matrice de Google réduite permet d'inférer un ensemble d'interactions cachées traduisant l'existence de programmes biologiques non reflétés dans la structure des liens directs entre protéines. Nous montrons que la structure de telles relations cachées peut être modifiée d'un contexte à l'autre, ce qui est la signature d'un changement, par exemple, dans le *câblage* du réseau global transcriptionnel pendant la cancérogenèse ou la différenciation cellulaire.

Influence globale des maladies infectieuses à travers le prisme de Wikipédia Nous avons considéré l'édition de langue anglaise de Wikipédia datant de mai 2017 afin de construire le réseau réduit des articles consacrés à 230 maladies infectieuses et à 195 pays du globe. Ce réseau réduit a été obtenu en construisant d'abord la matrice de Google associée à ces 425 nœuds, tout en prenant en compte tous les chemins directs et indirects reliant ces articles dans Wikipédia. Les algorithmes PageRank et CheiRank ont été utilisés pour déterminer les maladies infectieuses les plus influentes au sein de l'encyclopédie Wikipédia, le top 3 étant la tuberculose, le sida, et la malaria. À partir de la matrice de Google réduite, nous avons déterminé la sensibilité des pays du globe à certaines maladies infectieuses, cette sensibilité intégrant l'influence de ces maladies à travers les âges. La comparaison de nos résultats avec les données issues de l'Organisation Mondiale de la Santé montre la pertinence de l'analyse via Wikipédia de l'influence globale des maladies infectieuses.

Influence du commerce des hydrocarbures sur les économies des pays de l'Union européenne Nous avons utilisé la base de données UN COMTRADE¹⁹ de l'Organisation des Nations Unies afin d'étudier le réseau du commerce international. Plus particulièrement, en utilisant la matrice de Google réduite, nous avons déterminé la sensibilité de la balance commerciale des pays de l'UE à l'augmentation du prix ou du volume d'un produit donné exporté par un pays donné, ceci sous l'influence du commerce global de 61 types de produits principaux entre tous les pays du globe. Outre la présentation de la méthode, nous l'appliquons à l'analyse de l'influence des exportations de pétrole et de gaz provenant de la Russie, des USA, de l'Arabie Saoudite, et de la Norvège sur la balance économique des pays de l'UE. Notre approche donne une description plus détaillée de la propagation de l'influence commerciale d'un pays en comparaison avec les approches habituellement utilisées basées sur les seuls flux directs d'exportation et d'importation.

19. UN COMTRADE : United Nations Commodity Trade Statistics Database.

Structure de la partie Dans le Chapitre 7, intitulé [Matrice de Google \(réduite\)](#), nous expliquons comment, à partir d'un réseau complexe, nous construisons la matrice de Google associée. Nous présentons également les algorithmes PageRank et CheiRank qui sont des mesures de centralité permettant de classer les nœuds d'un réseau complexe selon leur importance. Nous expliquons ensuite comment construire, à partir d'un grand réseau complexe, la matrice de Google réduite à un sous ensemble de nœuds d'intérêt. À la fin du Chapitre 7, nous donnerons la formule analytique de la dérivée du vecteur PageRank, ou, plus généralement la dérivée du vecteur de Perron, à savoir la variation infinitésimale du vecteur de Perron lorsque l'un des éléments de l'opérateur de Perron varie de façon infinitésimale. À notre connaissance, l'expression de cette dérivée ne se trouve pas dans la littérature. Le Chapitre 8, intitulé [Réseaux Wikipédia](#), présente, à la section 8.1, le classement mondial des universités selon Wikipédia, et à la section 8.2, l'influence des maladies infectieuses dans le monde. Le Chapitre 9, intitulé [Réseaux de protéines en interaction : application à l'oncologie](#), présente un résumé de l'application de la matrice de Google réduite aux réseaux de protéines en interaction. Le Chapitre 10, présente d'abord la construction du [Réseau du commerce international](#), puis présente une étude de la sensibilité des économies des pays de l'UE aux importations d'hydrocarbures provenant des pays hors UE. Le chapitre 10.3 vient conclure cette partie.

Chapitre 7

Matrice de Google (réduite)

Définissons un réseau (ou graphe) $\mathcal{R}$ constitué d'un ensemble de nœuds $\mathcal{N}$ reliés entre eux par un ensemble de liens $\mathcal{L}$. On note le nombre de nœuds $N = \text{card}(\mathcal{N})$ et le nombre de liens $N_l = \text{card}(\mathcal{L})$. Nous considérerons des réseaux orientés, les liens sont alors munis d'un sens, chacun allant d'un nœud source vers un nœud cible, $\mathcal{L} = \left\{ s_\ell \xrightarrow{\mathcal{P}_\ell} c_\ell \mid \{s_\ell, c_\ell\} \in \mathcal{N}^2 \right\}_{\ell=1, \dots, N_l}$. Dans le cas où les liens sont pondérés, le réseau est également caractérisé par une liste de poids $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_\ell\}_{\ell=1, \dots, N_l}$.

7.1 Matrice de Google, algorithmes PageRank et Chei-Rank

Dans cette section nous présentons la matrice de Google associée à l'algorithme PageRank initialement conçu par Brin et Page, 1998 pour classer les pages du WWW.¹ Nous présentons les principales notions et propriétés utiles à nos travaux. Le lecteur intéressé pourra se référer à Langville et Meyer, 2012 pour une présentation détaillée de la matrice de Google et de l'algorithme PageRank, et à Ermann, Frahm et Shepelyansky, 2015, 2016 pour une présentation exhaustive des applications de la matrice de Google.

7.1.1 Construction de la matrice de Google et du vecteur PageRank

Considérons un réseau $\mathcal{R}$ défini ci-avant, sa **matrice d'adjacence** A permet d'encoder la structure de celui-ci

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \rightarrow i \\ 0 & \text{si } j \not\rightarrow i \end{cases}, \quad (7.1)$$

puisque'un élément non nul A_{ij} signifie l'existence d'un lien pointant le nœud i à partir du nœud j . Dans le cas d'un réseau avec liens pondérés, la définition de la matrice d'adjacence peut être généralisée, $A_{ij} = \mathcal{P}_{j \rightarrow i}$ s'il existe un lien $j \rightarrow i$, et $A_{ij} = 0$ s'il n'existe pas de lien

1. WWW : World Wide Web, réseau des pages et documents du web référencés et hébergés par le réseau global internet.

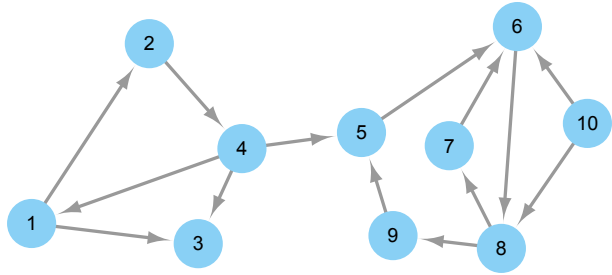


Figure 7.1 – Exemple d'un réseau complexe orienté avec $N = 10$ nœuds et $N_l = 14$ liens.

$j \rightarrow i$. Nous pouvons définir les degrés entrant et sortant d'un nœud i

$$k_{\text{in}}(i) = \sum_{k=1}^N A_{ik} \quad k_{\text{out}}(i) = \sum_{k=1}^N A_{ki}, \quad (7.2)$$

qui sont les nombres de liens arrivant et sortant du nœud i .² À partir de la matrice d'adjacence, nous définissons une **matrice stochastique** ou matrice de Markov S (Markov, 1906, 2007) dont les éléments sont

$$S_{ij} = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{k_{\text{out}}(j)} & \text{si } k_{\text{out}}(j) \neq 0 \\ \frac{1}{N} & \text{sinon} \end{cases}. \quad (7.3)$$

Si nous considérons un surfeur aléatoire errant dans le réseau, la matrice stochastique S est la matrice donnant les probabilités de transition entre les différents nœuds du réseau. Ainsi S_{ij} est la probabilité de transition du nœud j vers le nœud i , elle est inversement proportionnelle au nombre de liens sortant du nœud j si le nœud source n'est pas un nœud ballant.³ Pour le réseau présenté à la Figure 7.1, on a par exemple $S_{14} = S_{34} = S_{54} = 1/3$. Si le nœud source est ballant (voir le nœud 3 sur la Figure 7.1), afin que le surfeur ne reste pas bloqué sur celui-ci, on l'autorise à se téléporter sur n'importe lequel des nœuds du réseau. Pour le nœud 3 du réseau présenté à la Figure 7.1, on a $\{S_{i3} = 1/10\}_{i=1,\dots,10}$. Le surfeur aléatoire, dont le périple est régi par la matrice stochastique S , peut être piégé dans un sous-réseau ballant. Sur la Figure 7.1, le surfeur aléatoire, une fois entré dans le sous-réseau $\{5, \dots, 10\}$, ne peut plus en sortir. Afin de permettre au surfeur aléatoire de sortir de ce type de sous-réseau ballant, on définit une nouvelle matrice stochastique, la **matrice de Google** G (voir par exemple Langville et Meyer, 2012), dont les éléments sont

$$G_{ij} = \alpha S_{ij} + (1 - \alpha) v_i \quad (7.4)$$

où $\alpha \in]0, 1[$ est le paramètre d'amortissement, et où $\mathbf{v}^T = (v_1, \dots, v_N)^T$ est un vecteur préférentiel. Le surfeur aléatoire dont le périple est maintenant régi par la matrice de Google G , peut à chaque nouveau saut, soit, avec une probabilité α , effectuer une transition dictée par la matrice stochastique S , et donc par la structure du réseau, soit, avec une probabilité $(1 - \alpha)$, être téléporté aléatoirement vers un nœud du réseau suivant la loi de probabilité donnée par le vecteur préférentiel $\mathbf{v}$. La matrice de Google, correspondant à l'algorithme du

2. Dans le cas d'un réseau pondéré, $k_{\text{in}}(i)$ et $k_{\text{out}}(i)$ sont les sommes des poids *entrant vers* et *sortant du* nœud i .

3. Nœud ballant : nœud sans issue.

PageRank initialement présenté par Brin et Page, 1998,⁴ comprend un vecteur préférentiel uniforme $\{v_i = 1/N\}_{i=1,\dots,N}$; un surfeur aléatoire piégé dans un sous réseau du WWW peut alors être téléporté de manière équiprobable vers n'importe quelle autre page du WWW. La matrice de Google ainsi définie appartient à la classe des opérateurs de Perron-Frobenius (Langville et Meyer, 2012).

Théorème de Perron-Frobenius pour les matrices à éléments strictement positifs.

Une matrice A de taille $N \times N$ dont tous les éléments sont strictement positifs, $\{A_{ij} > 0\}_{i,j=1,\dots,N}$, possède les propriétés suivantes :⁵

1. il existe un nombre réel positif λ_1 , appelé racine de Perron, qui est une valeur propre non dégénérée de A et qui est, en module, la valeur propre, strictement, la plus grande de A . Si $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,N}$ sont les valeurs propres de A , alors $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_N|$. La valeur propre λ_1 est alors le rayon spectral de A .
2. le vecteur propre à droite de A associé à la valeur propre λ_1 est le vecteur $\mathbf{v}_1$ tel que $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ et dont les composantes sont réelles strictement positives, $\{v_{1i} > 0\}_{i=1,\dots,N}$. Le vecteur $\mathbf{v}_1$ est appelé le vecteur de Perron à droite.
3. le vecteur propre à gauche de A associé à la valeur propre λ_1 est le vecteur $\mathbf{w}_1$ tel que $\mathbf{w}_1^T A = \lambda_1 \mathbf{w}_1^T$ et dont les composantes sont réelles strictement positives, $\{w_{1i} > 0\}_{i=1,\dots,N}$. Le vecteur $\mathbf{w}_1$ est appelé le vecteur de Perron à gauche.
4. il existe un et un seul vecteur propre positif à droite et à gauche, les autres vecteurs comportent des éléments négatifs ou complexes.

La matrice de Google G étant stochastique, son vecteur de Perron gauche est $\mathbf{e}^T = (1, 1, \dots, 1)$, puisque $\mathbf{e}^T G = \mathbf{e}^T$. La racine de Perron est alors $\lambda_1 = 1$. Le vecteur de Perron à droite $\mathbf{P}$ obéit alors à l'équation

$$G\mathbf{P} = \mathbf{P}. \quad (7.5)$$

Dans le cas de la matrice de Google, le vecteur de Perron $\mathbf{P}$ normé, $\|\mathbf{P}\|_1 = \sum_{k=1}^N P_k = 1$, est appelé vecteur PageRank associé à l'algorithme du même nom. Le vecteur PageRank est composé d'éléments strictement positifs inférieurs à un, ces éléments peuvent être interprétés comme des probabilités associées au processus stochastique décrit par la matrice de Google G . De l'équation (7.5), nous déduisons que $\mathbf{P}$ est le vecteur stationnaire du processus stochastique. Partant d'une distribution initiale de probabilité $\mathbf{p}_0$, le vecteur $\mathbf{p}_k = G^k \mathbf{p}_0$ donne la distribution de probabilité après k itérations de la chaîne de Markov. Si par exemple, $p_{0i} = \delta_{ii_0}$, i.e. le surfeur aléatoire commence son périple sur le nœud i_0 , alors la composante p_{ki} donne la probabilité que le surfeur aléatoire arrive sur le nœud i après k itérations. Puisque n'importe quel vecteur $\mathbf{p}_0$ de dimension N peut être décomposé sur la base des vecteurs propres à droite de G et que $\lambda_1 = 1 > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_N|$, les applications successives de G sur $\mathbf{p}_0$ doivent converger vers le vecteur PageRank

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G^k \mathbf{p}_0 \propto \mathbf{P}, \quad \forall \mathbf{p}_0 \not\propto \mathbf{P}. \quad (7.6)$$

4. Dans l'article original de Brin et Page, 1998, l'algorithme PageRank est présenté sans avoir recours au formalisme matriciel. Ce dernier permet, via la définition de la matrice stochastique, baptisée G comme Google, d'avoir une vision compacte et claire de cet algorithme en terme de probabilités de transition entre les différents nœuds du réseau.

5. Nous n'énumérons ici que les propriétés intéressantes qui nous serviront par la suite.

La composante P_i du vecteur PageRank $\mathbf{P}$ donne alors la probabilité de trouver le surfeur aléatoire sur le nœud i après un périple suffisamment long pour que le processus stochastique ait atteint un régime stationnaire. Autrement formulé, la composante P_i est proportionnelle au nombre de visites du nœud i par le surfeur aléatoire durant son périple infini, $P_i = \lim_{k \rightarrow \infty} (n_i(k)/k)$ où $n_i(k)$ est le nombre de fois que le nœud i est visité par le surfeur aléatoire durant son périple de k itérations. Ainsi, le vecteur PageRank fournit une mesure de la centralité d'un nœud dans le réseau global. Cette mesure dépend intrinsèquement de la structure du réseau orienté considéré. On assigne un index PageRank $K \in \{1, \dots, N\}$ à chacun des nœuds du réseau. Ainsi, l'index assigné au nœud i est $K(i)$ tel que $K(i) < K(j)$ si $P_i > P_j$. On assigne l'index $K = 1$ ($K = N$) au nœud le plus (moins) central du réseau, i.e. le nœud ayant la probabilité PageRank la plus élevée (basse).⁶ Ce classement n'est pas drastiquement modifié tant que α reste dans l'intervalle $[0.5, 1[$ (Ermann, Frahm et Shepelyansky, 2015). On peut donner une définition par récurrence du classement PageRank : un nœud est d'autant plus central qu'il est pointé par des nœuds centraux.

Considérons maintenant le réseau $\mathcal{R}^*$ obtenu en inversant le sens des liens du réseau précédent $\mathcal{R}$. La matrice d'adjacence $A^* = A^T$ du réseau $\mathcal{R}^*$ est alors défini par les éléments de matrice $\{A_{ij}^* = A_{ji}\}_{i,j=1,\dots,N}$. Les éléments de la matrice stochastique S^* associés à $\mathcal{R}^*$ sont alors

$$S_{ij}^* = \begin{cases} \frac{A_{ji}}{k_{\text{in}}(j)} & \text{si } k_{\text{in}}(j) \neq 0 \\ \frac{1}{N} & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.7)$$

où $k_{\text{in}}(j)$ est le degré entrant du nœud j dans le réseau $\mathcal{R}$ défini par (7.2). Les éléments de la matrice de Google G^* associés au réseau $\mathcal{R}^*$ sont alors

$$G_{ij}^* = \alpha S_{ij}^* + (1 - \alpha) v_i. \quad (7.8)$$

De même que G , la matrice G^* appartient à la classe des opérateurs de Perron-Frobenius. Le vecteur PageRank associé à la matrice de Google G^* est appelé le vecteur CheiRank $\mathbf{P}^*$ (Chepelianskii, 2010), on a $G^* \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^*$. Le vecteur CheiRank donne la distribution de probabilité stationnaire du processus stochastique défini par la matrice de Google G^* . À l'instar des éléments du vecteur PageRank $\mathbf{P}$, ceux du vecteur CheiRank $\mathbf{P}^*$ sont proportionnels aux nombres de visite du surfeur aléatoire sur les différents nœuds du réseau $\mathcal{R}^*$. Pour le réseau $\mathcal{R}$, la probabilité P_i^* donne la probabilité que le surfeur aléatoire ait commencé son périple infini sur le nœud i . Le vecteur CheiRank fournit une mesure de diffusivité des nœuds du réseau. On définit de même un index CheiRank $K^* \in \{1, \dots, N\}$. L'index $K^* = 1$ ($K^* = N$) est alors assigné au nœud le plus (moins) diffusif, i.e. au nœud ayant la plus grande (faible) probabilité CheiRank. On peut donner une définition par récurrence du classement CheiRank : un nœud est d'autant plus diffusif qu'il pointe vers des nœuds diffusifs.

6. Pour les réseaux complexes étudiés ici, il n'y a pas de nœuds ex-æquo dans le haut des classements PageRank. Des nœuds ex-æquo sont présents dans l'extrême bas des classements PageRank, ceux-ci, non importants car non centraux, sont discriminés en utilisant des paramètres additionnels plus ou moins arbitraires.

7.1.2 Algorithme PageRank

Nous allons ici décrire de manière succincte une méthode permettant d'obtenir numériquement le vecteur PageRank. Choisissons des vecteurs propres de G normés, $\{\mathbf{v}_i \mid \|\mathbf{v}_i\|_1 = 1\}_{i=2,\dots,N}$ associés aux valeurs propres $\{\lambda_i = |\lambda_i| e^{i \arg\{\lambda_i\}}\}_{i=2,\dots,N}$. Un vecteur quelconque $\mathbf{p}_0$ peut être décomposé sur l'ensemble des vecteurs propres de la matrice G , $\mathbf{p}_0 = a_1 \mathbf{P} + \sum_{i=2}^N a_i \mathbf{v}_i$.⁷ Définissons le vecteur $\mathbf{p}_k = G\mathbf{p}_{k-1} / \|G\mathbf{p}_{k-1}\|_1$. Puisque $\{|\lambda_i| < 1\}_{i=2,\dots,N}$, le vecteur PageRank est obtenu via une méthode itérative

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{p}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left\| a_1 \mathbf{P} + \sum_{i=2}^N a_i |\lambda_i|^k e^{ik \arg \lambda_i} \mathbf{v}_i \right\|_1^{-1} \left(a_1 \mathbf{P} + \sum_{i=2}^N a_i |\lambda_i|^k e^{ik \arg \lambda_i} \mathbf{v}_i \right) \right) = \mathbf{P}. \quad (7.9)$$

Le pseudo-code ci-dessous permet de calculer le vecteur PageRank pour un réseau complexe. Les problèmes manipulant des matrices nécessitent en général $O(N^2)$ opérations où N est la taille des matrices considérées. Dans le cas des réseaux complexes comme le WWW, la matrice de Google est extrêmement creuse. Une page web pointe en moyenne vers dix autres pages (Langville et Meyer, 2012). Le nombre de liens est alors de l'ordre $\sim 10N$. En pratique, un algorithme PageRank efficace ne nécessite que la manipulation de listes, le nombre d'opérations est alors $\sim O(N)$. Cette propriété a permis au moteur de recherche Google de classer de manière efficace l'ensemble des pages web indexées, au nombre de $\sim 10^{10}$ en 2004 (Langville et Meyer, 2012), et de supplanter au début des années 2000 les autres moteurs de recherche.

Algorithme : PageRank

Données : • paramètres : N, α, ε ;
 • liste des liens ($j \rightarrow i$) avec les poids associés A_{ij} ;
 • liste des nœuds ballants ;

Résultat : calcul des composantes du vecteur PageRank

Initialisation : • renormalisation des poids $\tilde{A}_{ij} \leftarrow A_{ij} / \sum_{k=1}^N A_{kj}$;
 • choisir un vecteur initial v quelconque tel que $\sum_{i=1}^N v_i = 1$ avec $\{0 < v_i < 1\}_{i=1,\dots,N}$;

Répéter
 mettre à zéro le vecteur résultat $\{\bar{v}_i \leftarrow 0\}_{i=1,\dots,N}$;
pour chaque lien ($i \rightarrow j$) **faire**
 | $\bar{v}_i \leftarrow \bar{v}_i + \tilde{A}_{ij} v_j$;
fin
 $k' \leftarrow 0$;
pour chaque nœud ballant i **faire**
 | $k' \leftarrow k' + v_i$;
fin
pour chaque nœud i **faire**
 | $\bar{v}_i \rightarrow \alpha \bar{v}_i + k' \alpha / N + (1 - \alpha) / N$;
fin
 $n_p \leftarrow \|\bar{v} - v\|_p$;
 $n_1 \leftarrow \|\bar{v}\|_1$;
pour chaque nœud i **faire**
 | $v_i \leftarrow \bar{v}_i / n_1$;
fin

jusqu'à $n_p < \varepsilon$;

7. On suppose que $\mathbf{p}_0 \not\propto \mathbf{P}$, i.e. $a_1 \neq 0$.

7.2 Construction de la matrice de Google réduite

Le concept de **matrice de Google réduite** (MGR) a été introduit par Frahm et Shepelyansky, 2016 et mis en œuvre pour la première fois dans l'étude des réseaux d'articles Wikipédia (Frahm, Jaffrès-Runser et Shepelyansky, 2016 ; Frahm et al., 2017) et dans l'étude de réseaux de protéines en interaction (Lages, Shepelyansky et Zinovyev, 2018⁸, voir aussi le Chapitre 9). Le but de la construction de la MGR est de concentrer l'analyse sur un nombre réduit de nœuds (des nœuds revêtant un intérêt particulier) qui usuellement sont noyés dans un réseau global contenant un très grand nombre de nœuds. Cette MGR, possédant les mêmes propriétés mathématiques que n'importe quelle matrice de Google, incorpore toute l'information initialement présente dans la matrice de Google associée au réseau global. Elle encode à la fois les liens directs entre les nœuds que nous avons choisis d'analyser et les liens indirects entre ces mêmes nœuds générés par les innombrables chemins empruntant l'ensemble des autres liens constituant la majeure partie du réseau global. Ce concept s'inspire du calcul de la matrice de diffusion quantique en physique nucléaire (Mahaux et Weidenmüller, 1968 ; Sokolov et Zelevinsky, 1989), physique mésoscopique (Beenakker, 1997) et chaos quantique (Guhr, Müller-Groeling et Weidenmüller, 1998).

Considérons un réseau $\mathcal{R}$ contenant N nœuds reliés par N_l liens orientés. Considérons un petit ensemble $\mathcal{S}_r$ de n_r nœuds et l'ensemble complémentaire $\mathcal{S}_s$ contenant les $n_s = N - n_r \simeq N$ autres nœuds. Ces deux sous ensemble de nœuds constituent chacun un sous réseau orienté connexe ou non connexe. Appelons $\mathcal{R}_r$ et $\mathcal{R}_s$ ces deux sous réseaux complémentaires. Par commodité, écrivons la matrice de Google G associée au réseau global $\mathcal{R}$ sous la forme⁹

$$G = \begin{pmatrix} G_{rr} & G_{rs} \\ G_{sr} & G_{ss} \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

La matrice G_{rr} est la sous matrice $n_r \times n_r$ de G exprimant les liens directs entre les nœuds du sous réseau $\mathcal{R}_r$. En mettant à zéro (à un) les éléments de cette matrice inférieurs (supérieurs) à $\sim (1 - \alpha)/N$, la matrice G_{rr} est similaire à la matrice d'adjacence du sous réseau $\mathcal{R}_r$.¹⁰ La matrice G_{ss} est la sous matrice $n_s \times n_s$ exprimant les transitions stochastiques entre les nœuds du sous réseau $\mathcal{R}_s$. La matrice G_{rs} est la sous matrice $n_r \times n_s$ de G donnant les transitions des nœuds de l'ensemble $\mathcal{S}_s$ vers ceux de l'ensemble $\mathcal{S}_r$. Inversement, la matrice G_{sr} est la sous matrice $n_s \times n_r$ de G donnant les transitions des nœuds de l'ensemble $\mathcal{S}_r$ vers ceux de l'ensemble $\mathcal{S}_s$. Avec la mise en forme (7.10), le vecteur PageRank s'écrit

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_r \\ \mathbf{P}_s \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

où $\mathbf{P}_r$ ($\mathbf{P}_s$) contient les probabilités PageRank des nœuds du sous ensemble $\mathcal{S}_r$ ($\mathcal{S}_s$). La MGR G_R associée au nœuds d'intérêts, formant le sous ensemble $\mathcal{S}_r$, est implicitement définie par l'équation

$$G_R \mathbf{P}_r = \mathbf{P}_r. \quad (7.12)$$

8. Article disponible dans sa version quasi définitive en décembre 2016 sur bioRxiv <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/096362v1?versioned=true>.

9. Nous adoptons dans la suite la plupart des notations de Frahm et Shepelyansky, 2016.

10. Cette assertion est strictement vraie pour des réseaux dont les liens ne sont pas pondérés et pour une matrice de Google globale dont le vecteur préférentiel est uniforme.

À l'instar de la matrice G et du vecteur PageRank $\mathbf{P}$, tous deux associés au réseau global $\mathcal{R}$, on requiert ainsi que le vecteur $\mathbf{P}_r$ soit le vecteur PageRank d'une matrice de Google G_R encodant les transitions stochastiques entre les nœuds $\mathcal{S}_r$ formant un nouveau réseau réduit effectif $\mathcal{R}_R \neq \mathcal{R}_r$. La matrice G_R satisfaisant (7.12) s'écrit

$$G_R = G_{rr} + G_{ind} \quad \text{où} \quad G_{ind} = G_{rs} (1_s - G_{ss})^{-1} G_{rs}. \quad (7.13)$$

Ici 1_s est la matrice identité $n_s \times n_s$. La MGR G_R est ainsi la somme de la matrice G_{rr} associée aux liens directs entre les nœuds du sous ensemble $\mathcal{S}_r$ et d'une matrice G_{ind} associée aux liens indirects. La matrice G_{ind} peut être réécrite comme $G_{ind} = G_{rs} \left(\sum_{k=0}^{\infty} G_{ss}^k \right) G_{sr}$. Le k ème terme de cette somme correspond aux chemins indirects passant par $k+1$ nœuds successifs du sous réseau $\mathcal{R}_s$. La construction de la MGR G_R incorpore toute l'information contenue dans la matrice de Google G du réseau global. Les processus stochastiques réalisés entre les nœuds du sous réseau d'intérêt $\mathcal{S}_r$ s'effectuent soit directement en accord avec la matrice G_{rr} soit indirectement par diffusion au travers de tout le réseau global. Par exemple, si le nœud $j \in \mathcal{S}_r$ ne pointe pas vers le nœud $i \in \mathcal{S}_r$, i.e. $A_{ij} = 0$, alors l'élément correspondant dans G_{rr} est minimal ($G_{rrij} \sim 1/N \ll 1$ pour un très grand réseau). Inversement, l'élément correspondant dans G_{ind} peut éventuellement être très grand soulignant le fait que deux nœuds peuvent être très fortement liés de manière indirecte par le truchement de liens directs successifs parmi les nœuds du sous ensemble $\mathcal{S}_s$. Par exemple, la chaîne de m liens $j \in \mathcal{S}_r \rightarrow k_1 \in \mathcal{S}_s \rightarrow k_2 \in \mathcal{S}_s \rightarrow \dots \rightarrow k_{m-1} \in \mathcal{S}_s \rightarrow i \in \mathcal{S}_r$ lie indirectement les nœuds i et j appartenant à $\mathcal{S}_r$. Pour que $\mathbf{P}_r$ soit un vecteur de distribution de probabilités, il faut qu'au passage de (7.11) à (7.12), il subisse une normalisation $\mathbf{P}_r \rightarrow \|\mathbf{P}_r\|^{-1} \mathbf{P}_r$. Les composantes de ce vecteur $\mathbf{P}_r$ préservent le classement PageRank relatif entre les différents nœuds n_r de $\mathcal{S}_r$. Le calcul de la matrice *indirecte* G_{ind} (7.13) est la partie non triviale du calcul de la MGR G_R . En effet, le calcul numérique direct de $(1_s - G_{ss})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} G_{ss}^k$ converge très lentement car la matrice $1 - G_{ss}$ est presque singulière. En effet, pour $n_r \ll n_s \simeq N$, la valeur propre dominante de $G_{ss} \sim G$ est $\lambda_c \simeq 1$. Associons à la valeur propre λ_c de la matrice G_{ss} les vecteurs propres à droite Ψ_D et à gauche Ψ_G tels que $G_R \Psi_D = \lambda_c \Psi_D$, $\Psi_G^T G_R = \lambda_c \Psi_G^T$, et $\Psi_G^T \Psi_D = 1$. Afin d'accélérer les calculs numériques (Frahm et Shepelyansky, 2016), nous introduisons les projecteurs $P_c = \Psi_D \Psi_G^T$ et $Q_c = 1_s - P_c$, pour décomposer le calcul de $(1 - G_{ss})^{-1}$ en deux parties complémentaires

$$\begin{aligned} (1 - G_{ss})^{-1} &= (P_c + Q_c) (1 - G_{ss})^{-1} (P_c + Q_c) \\ &= \frac{1}{(1 - \lambda_c)} P_c + Q_c \left(\sum_{k=0}^{\infty} G_{ss}^k \right) Q_c \\ &= \frac{1}{(1 - \lambda_c)} P_c + Q_c \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{G}_{ss}^k \quad \text{où} \quad \tilde{G}_{ss} = Q_c G_{ss} Q_c. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Le premier terme proportionnel au projecteur $P_c = \Psi_D \Psi_G^T$ de rang 1 est aisément calculable. En effet, il est possible d'obtenir Ψ_D , Ψ_G et λ_c par une méthode itérative similaire à celle utilisée pour obtenir le vecteur PageRank $\mathbf{P}$ pour G . Le second terme converge bien plus rapidement que $\sum_{k=0}^{\infty} G_{ss}^k$, puisque, pour $n_s \ll N$, la valeur propre dominante de $\tilde{G}_{ss}$ est à peu près égale à $\alpha < 1$ (Frahm et Shepelyansky, 2016; Langville et Meyer, 2012).

La MGR G_R peut se décomposer en trois matrices

$$G_R = G_{rr} + G_{pr} + G_{qr}. \quad (7.15)$$

La matrice G_{rr} rend compte des liens directs entre les nœuds du sous réseau $\mathcal{R}_r$. La matrice $G_{pr} = (1 - \lambda_c)^{-1} \tilde{\Psi}_D \tilde{\Psi}_G^T$ où $\tilde{\Psi}_D = G_{rs} \Psi_D$ et $\tilde{\Psi}_G^T = \Psi_G^T G_{sr}$ est celle des trois qui possède le poids le plus élevée. Cette matrice ne nous donne guère plus d'information que celle obtenue par l'analyse directe du réseau global $\mathcal{R}$ à l'aide de la matrice de Google globale G . En effet, l'*ingrédient* principal de cette matrice est Ψ_D qui, pour $n_s \ll N$, est similaire au vecteur PageRank $\mathbf{P}$, $\Psi_D \sim \mathbf{P}$. La matrice $G_{qr} = G_{rs} \left(Q_c \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{G}_{ss}^k \right) G_{sr}$ nous renseigne sur les liens indirects entre les n_r nœuds d'intérêt en oubliant la composante triviale G_{pr} , on qualifiera ainsi ces liens de liens cachés. On découpe la matrice $G_{qr} = G_{qrd} + G_{qrnd}$ en sa partie diagonale, G_{qrd} , et non diagonale, G_{qrnd} . Les interactions cachées d'un lien sur lui même étant difficilement interprétables, nous utiliserons par la suite la partie non diagonale G_{qrnd} . On définit également les poids des différentes matrices, $W_R \equiv 1$, W_{rr} , W_{pr} , W_{qr} , et W_{qrnd} comme la somme de tous les éléments divisée par n_r .¹¹

L'analyse à l'aide de la matrice de Google réduite d'un réseau $\mathcal{R}_r$, sous réseau de petite taille d'un vaste réseau $\mathcal{R}$, consiste à mettre en regard les éléments de la matrice G_{rr} , correspondant aux liens directs entre les nœuds de $\mathcal{R}_r$, avec les éléments de la matrice G_{qr} , correspondant aux liens dits cachés entre ces mêmes nœuds.

7.3 Sensibilité du vecteur de Perron ou Sensibilité du PageRank

Considérons une matrice de Google G , ou plus généralement tout opérateur matriciel de Perron-Frobenius obéissant aux propriétés énoncées à la page 123. Le vecteur PageRank ou vecteur de Perron associé à la matrice G est $\mathbf{P} = G\mathbf{P}$. Nous pouvons poser la question suivante : comment se comportent les probabilités PageRank lorsque l'un des éléments de G change de manière infinitésimale ? Plus précisément, nous voulons définir un moyen de mesurer la sensibilité de la probabilité PageRank P_i du nœud i à un changement infinitésimal de la probabilité de transition du nœud j_0 vers le nœud i_0 . Pour ce faire, cherchons à changer l'élément de matrice $G_{i_0 j_0}$ d'une certaine quantité. Comme la somme des probabilités de transition à partir d'un nœud j_0 doit être égale à 1, la modification d'une des transitions sur la j_0 ème colonne entraîne une renormalisation de tous les éléments de la colonne. Nous choisissons de faire varier l'élément de matrice $G_{i_0 j_0}$ de deux manières différentes : soit $G_{i_0 j_0} \rightarrow G_{i_0 j_0} + \varepsilon_{i_0 j_0}$, soit $G_{i_0 j_0} \rightarrow G_{i_0 j_0} (1 + \varepsilon_{i_0 j_0})$. Le première type de variation est le plus usuel, il est conforme à la notation de Leibniz. Le second type de variation permet de pondérer la sensibilité PageRank d'un nœud vis-à-vis d'une transition de probabilité par la valeur de cette dernière. Nous allons voir que ces deux types de variations mènent à un calcul de sensibilité semblable à un coefficient près, l'élément de matrice $G_{i_0 j_0}$. Nous développons les calculs ci-après en notant en rouge l'élément $G_{i_0 j_0}$ à ajouter dans le cadre du second type de variation.

11. Par exemple, $W_{rr} = n_r^{-1} \sum_{i,j=1}^{n_r} G_{rrij}$.

Ainsi, après variation, les éléments de la matrice de Google deviennent

$$G_{ij}(\varepsilon_{i_0 j_0}) = \begin{cases} G_{ij} & \text{si } j \neq j_0, \\ \frac{G_{ij}}{1 + \varepsilon_{i_0 j_0} \mathbf{G}_{i_0 j_0}} & \text{si } j = j_0 \text{ et } i \neq i_0, \\ \frac{G_{i_0 j_0} + \varepsilon_{i_0 j_0} \mathbf{G}_{i_0 j_0}}{1 + \varepsilon_{i_0 j_0} \mathbf{G}_{i_0 j_0}} & \text{si } j = j_0 \text{ et } i = i_0. \end{cases} \quad (7.16)$$

En considérant une variation infinitésimale $\varepsilon_{i_0 j_0}$, nous obtenons

$$G_{ij}(\varepsilon_{i_0 j_0}) = \begin{cases} G_{ij} & \text{si } j \neq j_0, \\ G_{ij_0} - G_{ij_0} \mathbf{G}_{i_0 j_0} \varepsilon_{i_0 j_0} & \text{si } j = j_0 \text{ et } i \neq i_0, \\ G_{i_0 j_0} + (1 - G_{i_0 j_0}) \mathbf{G}_{i_0 j_0} \varepsilon_{i_0 j_0} & \text{si } j = j_0 \text{ et } i = i_0, \end{cases} \quad (7.17)$$

ou autrement formulé,¹²

$$G_{ij}(\varepsilon_{i_0 j_0}) = G_{ij} + \varepsilon_{i_0 j_0} (\delta_{ii_0} - G_{ij_0}) \mathbf{G}_{i_0 j_0} \delta_{jj_0}. \quad (7.18)$$

Nous notons que, comme exigé, la somme des éléments d'une colonne reste égale à 1, $\sum_{i=1}^N G_{ij}(\varepsilon_{i_0 j_0}) = 1$. Définissons la dérivée de la matrice de Google vis-à-vis de l'élément de matrice $G_{i_0 j_0}$ comme

$$\frac{dG}{dG_{i_0 j_0}} \equiv \lim_{\varepsilon_{i_0 j_0} \rightarrow 0} \varepsilon_{i_0 j_0}^{-1} (G_{ij}(\varepsilon_{i_0 j_0}) - G_{ij}(0)) = \mathbf{G}_{i_0 j_0} (\mathbf{e}_{i_0} - G \mathbf{e}_{j_0}) \mathbf{e}_{j_0}^T \quad (7.19)$$

où $\mathbf{e}_k$ est un vecteur dont les composantes sont toutes nulles sauf la k ème composante qui est égale à 1. Nous définissons maintenant la dérivée du vecteur PageRank comme

$$\frac{d\mathbf{P}}{dG_{i_0 j_0}} = \frac{d}{dG_{i_0 j_0}} \lim_{m \rightarrow +\infty} (G^m \mathbf{v}) \quad (7.20)$$

où $\mathbf{v}$ est un vecteur normalisé quelconque non orthogonal à $\mathbf{P}$. En développant l'équation précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dG_{i_0 j_0}} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} G^k \frac{dG}{dG_{i_0 j_0}} G^{m-1-k} \mathbf{v} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} G^k \frac{dG}{dG_{i_0 j_0}} \mathbf{P} \\ &= P_{j_0} \mathbf{G}_{i_0 j_0} \sum_{k=0}^{+\infty} G^k (\mathbf{e}_{i_0} - G \mathbf{e}_{j_0}). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Cette dernière équation peut être réécrite comme

$$\frac{d\mathbf{P}}{dG_{i_0 j_0}} = P_{j_0} \mathbf{G}_{i_0 j_0} \left(\mathbf{e}_{i_0} - \mathbf{P} + \sum_{k=1}^{+\infty} G^k (\mathbf{e}_{i_0} - \mathbf{e}_{j_0}) \right) \quad (7.22)$$

12. Ici, δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Comme cela est attendu, nous notons que $\sum_{i=1}^N dP_i/dG_{i_0j_0} = 0$. La somme apparaissant à l'équation (7.22) converge rapidement puisque pour k suffisamment grand, on obtient $G^k(\mathbf{e}_{i_0} - \mathbf{e}_{j_0}) \sim \mathbf{P} - \mathbf{P} = 0$. Nous observons que la dérivée du PageRank est proportionnelle à la probabilité PageRank P_{j_0} du nœud source j_0 d'où émane la variation. Également, la dérivée de la i_0 ième composante du vecteur PageRank, correspondant à la cible de la variation, est la plus grande des composantes du *vecteur dérivée* PageRank, $d\mathbf{P}/dG_{i_0j_0}$. Les deux types de variations envisagées mènent au même résultat au coefficient $G_{i_0j_0}$ près.

On définit la **sensibilité d'un nœud** i vis-à-vis de la transition $j_0 \rightarrow i_0$ par la dérivée logarithmique de la probabilité PageRank

$$D(j_0 \rightarrow i_0, i) \equiv \frac{1}{P_i} \frac{dP_i}{dG_{i_0j_0}}. \quad (7.23)$$

Dans la suite des travaux présentés, nous utiliserons la sensibilité utilisant le second type de variation $G_{i_0j_0} \rightarrow G_{i_0j_0}(1 + \varepsilon_{i_0j_0})$ prenant en compte le coefficient $G_{i_0j_0}$.

Chapitre 8

Réseaux Wikipédia

L'Encyclopédie, initialement conçue par Diderot et d'Alembert, 1751-1766, a pour ambition d'agréger le savoir humain afin de le rendre disponible au plus grand nombre de citoyens. Ainsi, *L'Encyclopédie*, via ses descendants, a été l'un des catalyseurs du développement moderne des sciences et de la société. Le transfert de connaissances s'est considérablement accéléré avec l'avènement de Wikipédia,¹ l'encyclopédie en ligne collaborative, qui maintenant surclasse *l'Encyclopedia Britannica* tant en volume total écrit qu'en qualité des articles consacrés aux différents domaines scientifiques (Giles, 2005). En 2018, Wikipédia contenait plus de 280 éditions de différentes langues représentant autant de points de vue culturels différents et complémentaires sur le savoir humain. Le classement de cette importante quantité d'information, et par extension, de toutes les mégadonnées, est un des enjeux majeurs actuels. Ainsi, sonder Wikipédia afin d'extraire une information classée pertinente sur les différents aspects des activités humaines s'avère être une entreprise pertinente. L'analyse académique des informations contenues dans Wikipédia trouvent de plus en plus d'applications, comme cela a été recensé par Nielsen, 2012.

Pour les études présentées ci-après, nous avons disposé de deux jeux de 24 éditions Wikipédia collectées en février 2013 et mai 2017. Les 24 langues considérées, arabe (AR), danois (DA), allemand (DE), grecque (EL), anglais (EN), espagnol (ES), persan (FA), français (FR), hébreux (HE), hindi (HI), hongrois (HU), italien (IT), japonais (JA), coréen (KO), malais (MS), néerlandais (NL), polonais (PL), portugais (PT), russe (RU), suédois (SV), thaï (TH), turque (TR), vietnamien (VI), mandarin (ZH) représentaient 59% de la population mondiale et 68% du nombre total d'articles Wikipédia en 2013. Les Tables 8.1 et 8.2 donnent les nombres d'articles des différentes éditions.

L'article de revue par Ermann, Frahm et Shepelyansky, 2015 recense toutes les analyses des réseaux d'articles Wikipédia menées avant 2015 et utilisant la matrice de Google.²

8.1 Classement mondial des universités selon Wikipédia

Comme cela est mentionné dans les rapports de l'UNESCO (voir par exemple Altbach, Reisberg et Rumbley, 2009), l'enseignement supérieur est au cœur du développement des sociétés modernes. Ainsi, la préoccupation de savoir comment mesurer l'efficacité de l'enseignement

1. <https://www.wikipedia.org>.

2. Voir Ermann, Frahm et Shepelyansky, 2016 pour une revue mise à jour.

Edition	Language	<i>N</i>	Edition	Language	<i>N</i>
EN	English	4212493	VI	Vietnamese	594089
DE	German	1532978	FA	Persian	295696
FR	French	1352825	HU	Hungarian	235212
NL	Dutch	1144615	KO	Korean	231959
IT	Italian	1017953	TR	Turkish	206311
ES	Spanish	974025	AR	Arabic	203328
RU	Russian	966284	MS	Malaysian	180886
PL	Polish	949153	DA	Danish	175228
JA	Japanese	852087	HE	Hebrew	144959
SV	Swedish	780872	HI	Hindi	96869
PT	Portuguese	758227	EL	Greek	82563
ZH	Chinese	663485	TH	Thai	78953

Table 8.1 – Nombre *N* d'articles dans les 24 éditions Wikipédia extraites en février 2013 (Eom et al., 2015).

Edition	Language	<i>N</i>	Edition	Language	<i>N</i>
EN	English	5416537	ZH	Chinese	939625
SV	Swedish	3786455	FA	Persian	539926
DE	German	2057898	AR	Arabic	519714
NL	Dutch	1900222	HU	Hungarian	409297
FR	French	1866546	KO	Korean	380086
RU	Russian	1391225	TR	Turkish	291873
IT	Italian	1353276	MS	Malaysian	289234
ES	Spanish	1287834	DA	Danish	225523
PL	Polish	1219733	HE	Hebrew	205411
VI	Vietnamese	1155932	EL	Greek	130429
JP	Japanese	1058950	HI	Hindi	121503
PT	Portuguese	967162	TH	Thai	116495

Table 8.2 – Nombre *N* d'articles dans les 24 éditions Wikipédia extraites en mai 2017.

académique dans chaque pays est devenue une question importante au point de vue politique, économique et sociétal. Les différents palmarès universitaires, dont la revue exhaustive est faite dans Hazelkorn, 2015, sont parmi les outils les plus utilisés pour mesurer l'efficacité académique. Il est de notoriété publique que le plus célèbre d'entre eux, le classement dit de Shanghai (ARWU)³ compilé chaque année depuis 2003 par l'université Jiao Tong de Shanghai, a eu une influence significative sur les politiques d'enseignement supérieur et par conséquent sur les évaluations nationales périodiques des établissements d'enseignement supérieur et de recherche (ESR) (Altbach, Reisberg et Rumbley, 2009; Hazelkorn, 2015). L'analyse des atouts et faiblesses des différentes méthodes de classement des universités a été effectuée par différents groupes de recherche (Bornmann, Mutz et Daniel, 2013; Docampo, 2011; Docampo et Cram, 2014; Jöns et Hoyler, 2013). Une analyse comparative de ces méthodes est faite dans Rauhvargers, 2013 et Hazelkorn, 2015. Même s'il est possible de critiquer l'aspect comptable de ces méthode, il est indéniable que ces classements participent à l'évolution des systèmes nationaux d'ESR. Les méthodes de classement actuellement disponibles sont basées sur des règles de sélection de facto humaines qui ne peuvent pas être exhaustives et qui peuvent favoriser telle ou telle préférence culturelle en terme d'organisation de l'enseignement supérieur et de la recherche. Par exemple, en fonction des critères choisis au préalable, certains classement sont très défavorables aux universités possédant une grande composante de recherche en sciences humaines⁴, et d'autres seront par exemple plus favorables à une certaine organisation nationale de la politique d'ESR. Ainsi, il serait hautement intéressant de construire une méthode statistique permettant de classer les universités indépendamment de tous critères préalables. Afin de répondre à cet intérêt, nous avons élaboré le classement Wikipédia des universités (WRWU)⁵ en sondant le savoir accumulé dans les 24 éditions de Wikipédia présentées dans les Tables 8.1 et 8.2.

3. Pour Academic Ranking of World Universities, www.shanghairanking.com.

4. C'est l'une des critiques ayant été formulée à l'encontre du classement ARWU.

5. Pour Wikipedia Ranking of World Universities, <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/datasets/WRWU/>

8.1.1 Classements PageRank et CheiRank

Chaque édition linguistique est vue comme un réseau complexe de N articles reliés par N_l hyperliens. Nous classons à l'aide des algorithmes PageRank, CheiRank, et 2DRank⁶ les articles de chacune des 24 éditions Wikipédia. Dans chacun de ces classements, nous extrayons les articles consacrés aux établissements d'ESR. Plus précisément, nous sélectionnons les articles qui ont des titres contenant le mot clé "université" dans la langue correspondant à l'édition considérée. Des extractions automatiques complémentaires sont aussi opérées avec des mots clés additionnels tels que par exemple "institut", "école", "college"... Nous extrayons aussi les établissements d'ESR désignés par des acronymes comme par exemple "ETH Zürich". Une vérification manuelle de l'extraction automatique est également faite a posteriori pour, par exemple, ôter du classement les universités fictives, les collèges et écoles de l'enseignement secondaire et primaire... On obtient ainsi 24 listes ordonnées de 100 universités, une par édition. Par exemple, en utilisant l'algorithme PageRank pour l'édition française de Wikipédia contenant $N = 1\,352\,825$ articles, le top 3 des universités est 1. Université Harvard ($K = 904$), 2. École polytechnique ($K = 1\,549$), et 3. Université d'Oxford ($K = 1\,558$). Nous élaborons le top 100 pour chacune des 24 éditions.⁷ Pour une université U , nous définissons un score global

$$\Theta_{U,A} = \sum_E (101 - R_{U,E,A}) \quad (8.1)$$

où la somme est effectuée sur les 24 éditions Wikipédia, et où $1 \leq R_{U,E,A} \leq 100$ est le rang de l'université U dans l'édition E d'après l'algorithme A . Pour une université U absente du top 100 de l'édition E d'après l'algorithme A , nous attribuons le score $R_{U,E,A} = 0$; ainsi cette université n'acquiert aucun score pour l'édition E d'après l'algorithme A . Ce score Θ permet d'agréger d'une manière simple tous les classements des 24 éditions Wikipédia. Pour l'algorithme A , le score $\Theta_{U,A}$ le plus élevé détermine l'université au sommet du classement, le deuxième score le plus élevé détermine l'université occupant la deuxième place du classement, et ainsi de suite. Au total, nous avons classé $N_u = 1025, 1379$, et 1560 différentes universités à l'aide des algorithmes PageRank, CheiRank, et 2DRank. Ces différents classements sont notés par la suite WPRWU, WCRWU, et W2RWU.

8.1.2 Comparaison WRWU vs ARWU

Sauf indication contraire, nous résumons ci-après les résultats obtenus avec les éditions Wikipédia collectées en février 2013 et publiés dans Lages, Patt et Shepelyansky, 2016.

Les Tables 8.3 et 8.4 montrent que 9 des 10 (5 des 10) universités présentes dans le top 10 WPRWU (WCRWU) sont aussi présentes dans le top 10 ARWU présenté à la Table 8.5. Bien que l'ordre ne soit pas le même entre le top 10 WPRWU et le top 10 ARWU, le top 10 WPRWU donne tout de même un classement fiable des toutes premières universités en terme d'excellence académique. Nous notons que WPRWU installe aux deux premières places *Oxbridge*,⁸ alors que celles-ci ne sont classées que cinquième et dixième dans ARWU. L'algorithme PageRank

6. Les résultats obtenus avec l'algorithme 2DRank étant ici marginalement commentés, nous renvoyons le lecteur intéressé à la description qui en est faite dans Zhiron, Zhiron et Shepelyansky, 2010.

7. Ces classements sont disponibles aux adresses <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/datasets/WRWU13/> et <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/datasets/WRWU17/>.

8. Oxbridge est un mot valise désignant conjointement les universités d'Oxford et de Cambridge.

Rank	WPRWU13	Θ_{PR}	N_a
1st	University of Cambridge	2272	24
2nd	University of Oxford	2247	24
3rd	Harvard University	2112	22
4th	Columbia University	2025	23
5th	Princeton University	1887	23
6th	Massachusetts Institute of Technology	1869	21
7th	University of Chicago	1783	22
8th	Stanford University	1765	21
9th	Yale University	1716	20
10th	University of California, Berkeley	1557	19

Table 8.3 – Les dix premières universités du classement Wikipédia élaboré avec l'algorithme PageRank. Le score Θ est défini par (8.1) ; N_a est le nombre d'occurrences de l'université considérée dans les 24 top 100 associés aux différents éditions Wikipédia collectées en février 2013. D'après Lages, Patt et Shepe-lyansky, 2016.

Rank	WCRWU13	Θ_{CR}	N_a
1st	University of Oxford	1191	18
2nd	Harvard University	1025	17
3rd	Yale University	1021	16
4th	Massachusetts Institute of Technology	816	16
5th	University of Cambridge	803	11
6th	Columbia University	779	14
7th	Uppsala University	751	11
8th	University of Göttingen	735	13
9th	Humboldt University of Berlin	703	12
10th	Moscow State University	699	14

Table 8.4 – Les dix premières universités du classement Wikipédia élaboré avec l'algorithme CheiRank. Le score Θ est défini par (8.1) ; N_a est le nombre d'occurrences de l'université considérée dans les 24 top 100 associés aux différents éditions Wikipédia collectées en février 2013. D'après Lages, Patt et Shepe-lyansky, 2016.

Rank	ARWU13	WPRWU13	WCRWU13
1st	Harvard University	-2 ▼	-1 ▼
2nd	Stanford University	-6 ▼	-9 ▼
3rd	University of California, Berkeley	-7 ▼	-17 ▼
4th	Massachusetts Institute of Technology	-2 ▼	0 –
5th	University of Cambridge	+4 ▲	0 –
6th	California Institute of Technology	-22 ▼	-71 ▼
7th	Princeton University	+2 ▲	-15 ▼
8th	Columbia University	+4 ▲	+2 ▲
9th	University of Chicago	+2 ▲	-45 ▼
10th	University of Oxford	+8 ▲	+9 ▲

Table 8.5 – Les dix premières universités du classement ARWU en 2013. Les deux dernières colonnes montrent les différences entre ARWU et WPRWU, et entre ARWU et WCRWU. D'après Lages, Patt et Shepe-lyansky, 2016.

mesurant l'influence d'un article, les universités du top 10 WPRWU sont les plus influentes dans Wikipédia.

Le recouvrement des top 10 WCRWU et ARWU est plus faible. Cela est dû au fait que WCRWU incorpore les propriétés de diffusion des articles consacrés aux universités puisque l'algorithme CheiRank mesure les effets des liens sortants des nœuds d'un réseau. Nous observons que les articles consacrés à certaines universités ne sont pas très diffusifs (un relativement faible nombre de liens sortants, par exemple pour les pages des universités de Chicago et Berkeley). Par conséquent, ces universités présentes dans le top 10 WPRWU ne sont pas présentes dans le top 10 WCRWU. Ainsi, contrairement au classement WPRWU qui ne comporte que des universités anglo-saxonnes, certaines universités non anglophones, dont les articles sont plus diffusifs sur Wikipédia, occupent une position dans le top 10 WCRWU.

Pour les cent premières universités (Figure 8.1), WPRWU et ARWU partagent 62 universités en commun. Parmi les éditions représentées sur la figure, il est intéressant de constater que le classement de l'édition anglaise possède le meilleur recouvrement avec ARWU (65/100), suivi de l'édition française (41/100) et de l'édition allemande (35/100). ARWU favorise significativement les universités anglo-saxonnes, tandis que les éditions françaises et allemandes favorisent fortement les universités de leurs propres langues ; 32/100 universités francophones dans le classement français, et 63/100 universités germanophones dans le classement allemand. Ces différences culturelles sont développées dans toutes les éditions.

Les 1025 et 1379 universités provenant des top 100 des 24 éditions sont ordonnées par

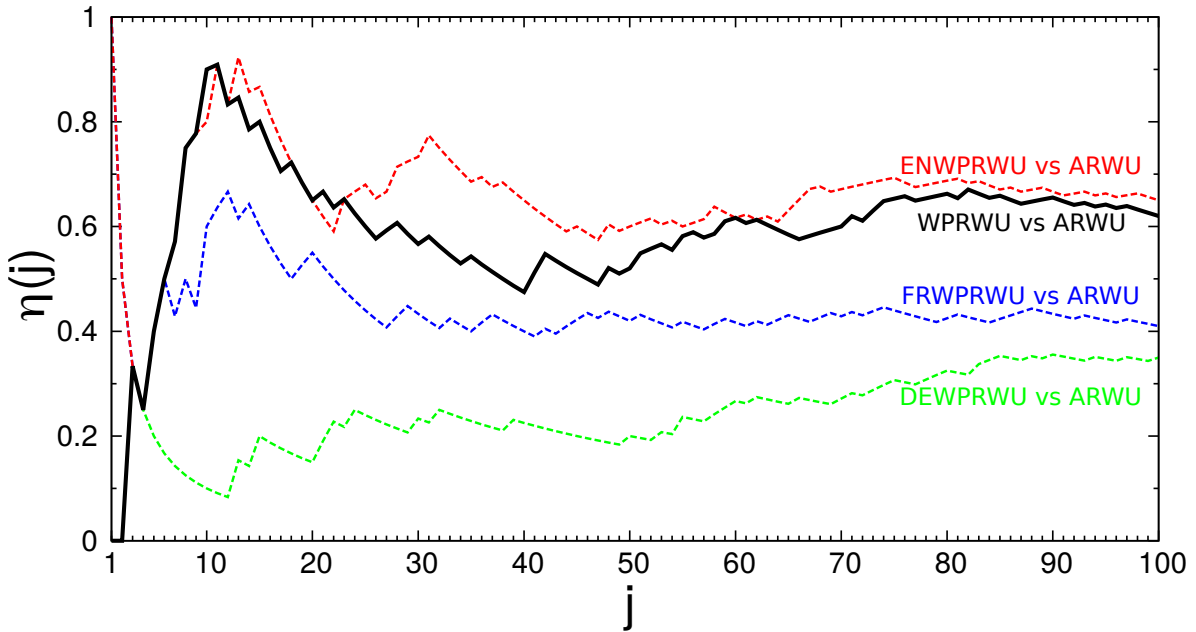


Figure 8.1 – Recouvrement $\eta(j) = j_c/j$ des classements WRWU et ARWU en fonction de l'index de rang j . Ici j_c est le nombre d'universités communes dans le top j des deux classements. La courbe noire donne le recouvrement entre les top 100 WPRWU et ARWU, les courbes de couleur donnent les recouvrements du top 100 ARWU et du top 100 WPRWU de l'édition anglaise (—), française (---), et allemande (---). D'après Lages, Patt et Shepelyansky, 2016.

leurs rangs respectifs WPRWU K_U et WCRWU K_U^* . La distribution de ces universités sur le plan PageRank–CheiRank (K_U, K_U^*) est montrée à la Figure 8.2 pour les 1000 premières universités. Contrairement à la distribution dispersée de l'ensemble des articles Wikipédia sur le plan (K, K^*) (voir par exemple Ermann, Frahm et Shepelyansky, 2015), la distribution des universités est relativement bien localisée autour de la diagonale $K_U = K_U^*$. L'information entrante et sortante des articles consacrés aux universités est approximativement équilibrée comme cela est le cas pour les flux commerciaux d'import–export du réseau du commerce international pour lequel les pays essaient de garder une balance économique proche de zéro à défaut d'être positive (voir par exemple Ermann, Frahm et Shepelyansky, 2015). Ainsi, les universités de Oxford, Yale, et Uppsala sont plus diffusives qu'influentes (situées sous la diagonale $K_U = K_U^*$) tandis que les universités de Cambridge, Princeton, et Chicago sont plus influentes que diffusives (situées au dessus de la diagonale $K_U = K_U^*$). La Figure 8.2 montre que certaines universités peuvent améliorer l'influence de leurs articles dans Wikipédia.

La distribution des 100 premières universités du classement ARWU est aussi présentée sur la Figure 8.2. Les 100 premières universités du classement ARWU sont principalement localisées sur les 100 premières positions K_U et K_U^* . Il existe cependant un certain nombre d'université présentes dans les premières positions K_U et K_U^* mais absentes du top 100 ARWU. Ces universités sont par exemple les universités de Humboldt et de Göttingen. Ces deux cas illustrent la principale différence entre les classements ARWU et WRWU. Le classement WRWU favorise les universités qui sont importantes sur le plan historique, e.g. les deux universités citées ci-avant ont une place importante dans l'histoire allemande et, plus généralement, européenne.

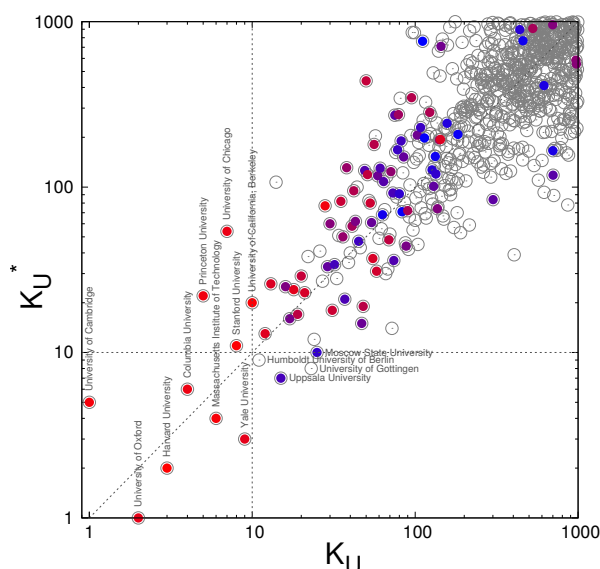


Figure 8.2 – Distribution des universités sur le plan PageRank–CheiRank (K_U, K_U^*) ($\circ$), où K_U et K_U^* sont les rangs d'une université U dans les classements WPRWU et WCRWU. Les universités apparaissant dans le top 100 ARWU sont représentées par des disques colorés allant de la couleur rouge ($\bullet$) pour le rang 1 dans ARWU à la couleur bleue ($\bullet$) pour le rang 100 dans ARWU. Les noms de certaines universités sont donnés. D'après Lages, Patt et Shepelyansky, 2016.

Le classement ARWU a contrario privilégie les universités aux accomplissements récents.

8.1.3 Distribution géographique

À partir des universités des top 100 de WPRWU et ARWU, nous obtenons leur distribution par pays. Les trois pays les plus représentés sont les USA, l'Allemagne, et le Royaume-Uni pour WPRWU, et les USA, le Royaume-Uni, et l'Australie pour ARWU. Le poids des USA est significativement plus faible pour WPRWU (38%) par rapport à ARWU (52%). Si nous faisons la moyenne directement à partir des top 100 des 24 éditions nous obtenons que les trois pays les plus représentés sont les USA, le Royaume-Uni, et l'Allemagne avec un poids plus faible des USA (32%).

Ainsi, le classement Wikipédia fournit un point de vue plus équilibré, moins américanocentré, voire moins anglo-saxon centré, sur les universités les plus influentes. En effet, chaque édition considère comme influentes un nombre non négligeable d'universités de sa propre langue, ce qui accroît les contributions des différentes langues/cultures considérées, même si elles ne s'accordent pas forcément sur les universités les plus influentes.

La distribution géographique des universités présentes dans les top 100 PageRank des 24 éditions est montrée à la Figure 8.3. La distribution des universités relative aux classements CheiRank est quant à elle montrée à la Figure 8.4. En comparant les deux mappemondes, nous observons que les classements CheiRank font apparaître bon nombre de pays d'Afrique et d'Asie centrale n'apparaissant pas dans les classements PageRank. Les articles associés aux universités de ces pays sont donc diffusifs. Ils comportent souvent de plus ou moins longues listes de liens sortants. Contrairement aux tops 100 globaux WPRWU et WCRWU, les tops 100 des 24 éditions classent un nombre important d'universités japonaises et indiennes. Ceci est dû au fait que les classements des éditions hindi et japonaise comportent chacun une très large portion d'universités de leur propre langue (respectivement 81% et 85%). Cependant, cet effet d'*auto-citations* est grandement estompé dans les tops 100 WPRWU et WCRWU pour lesquels les points de vue des autres éditions sont pris en compte. Ainsi, aucune université indienne n'apparaît dans le top 100 WPRWU.

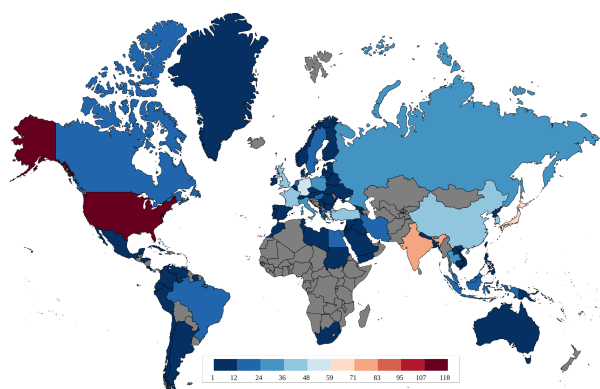


Figure 8.3 – Distribution géographique des universités présentes dans les top 100 Page-Rank des 24 éditions Wikipédia. Le nombre total d'universités est 1025. D'après Lages, Patt et Shepelyansky, 2016.

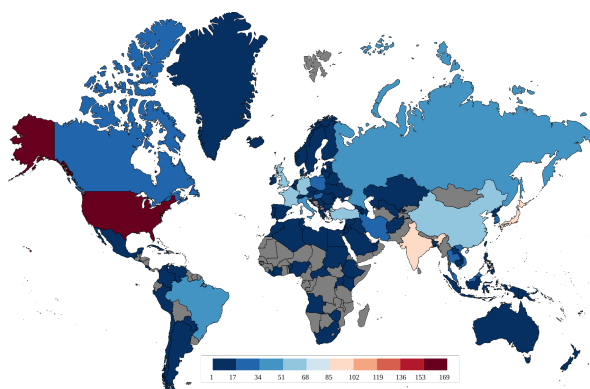


Figure 8.4 – Distribution géographique des universités présentes dans les top 100 Chei-Rank des 24 éditions Wikipédia. Le nombre total d'universités est 1379. D'après Lages, Patt et Shepelyansky, 2016.

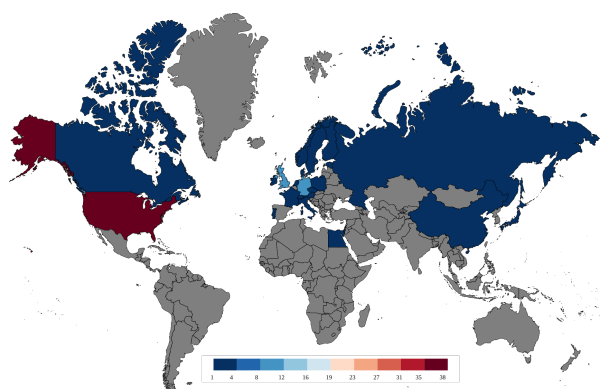


Figure 8.5 – Distribution géographique des universités présentes dans le top 100 du classement WPRWU. D'après Lages, Patt et Shepelyansky, 2016.

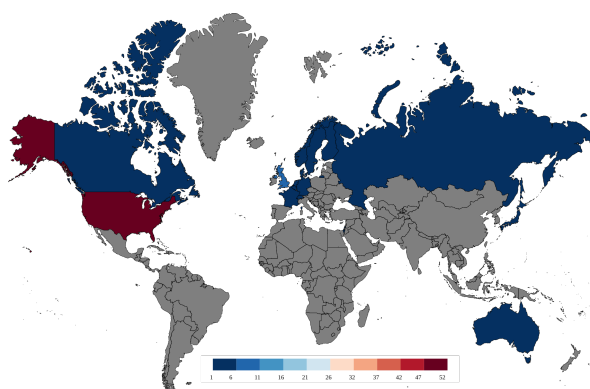


Figure 8.6 – Distribution géographique des universités présentes dans le top 100 du classement ARWU. D'après Lages, Patt et Shepelyansky, 2016.

À partir des distributions géographiques des classements WPRWU et ARWU montrés à la Figure 8.5 et à la Figure 8.6, nous notons que les universités australiennes, bien classées dans ARWU, ne sont pas présentes dans le top 100 WPRWU, tandis qu'inversement la Chine est présente dans le top 100 WPRWU mais absente dans le top 100 ARWU. Aussi, par rapport à ARWU, la proportion d'universités américaines est moindre pour WPRWU, l'Allemagne prenant la deuxième place des pays les plus présents dans le top 100 WPRWU au lieu de la 6ème position dans ARWU.

Un critère intéressant de comparaison de l'efficacité des universités nationales est le nombre d'universités présentes dans le top 100 des classements WPRWU et ARWU ramené au nombre d'habitants du pays. Les distributions des pays ayant le plus d'universités par habitants dans les tops 100 WPRWU et ARWU sont présentées à la Figure 8.7. Aux trois premières positions, nous trouvons l'Estonie, la Suède, et la Suisse pour WPRWU, et la Suisse, Israël, et le Danemark

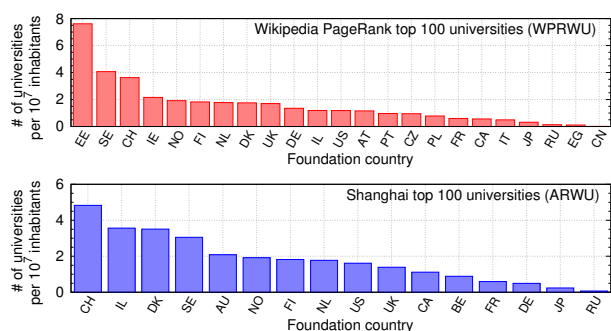


Figure 8.7 – Distributions par pays et par nombre d'habitants des universités des top 100 WPRWU et ARWU. Les codes des pays sont ceux de la norme [ISO 3166-1 alpha-2](#). D'après Lages, Patt et Shepelyansky, 2016.

pour ARWU. L'Estonie, grâce à l'Université de Tartu, apparaît à la première place du fait de son faible nombre d'habitants. L'Université de Tartu est une ancienne université, fondée en 1632, située historiquement au carrefour des cultures balte, suédoise, russe, polonaise, et allemande. En faisant le raccourci «langue ↔ culture», l'Université de Tartu doit être importante pour les éditions correspondantes. Cet exemple souligne que le classement WPRWU prend en compte l'histoire des universités et l'évolution du contexte géopolitique alors que le classement ARWU ignore a priori cette caractéristique. La Suisse, ~ 8 million d'habitants, est bien classée dans ces classements par habitants puisque les universités suisses sont au nombre de 4 et de 9 dans les top 100 ARWU et WPRWU. Ces universités sont actuellement parmi les meilleures du monde sur le plan académique (e.g., ETH Zürich a eu 32 prix Nobel affiliés) et ont également un passé historique important (e.g., l'Université de Genève a été fondée en 1559 par Jean Calvin).

8.1.4 Évolution à travers les siècles

Si nous regardons la distribution géographique des universités présentes dans WPRWU et dont l'année de fondation est antérieure à un certain siècle, on a :⁹

- avant le XII^{ème} siècle, l'émergence d'universités en Italie¹⁰ et au Royaume-Uni,
- avant le XVII^{ème} siècle, l'établissement des universités dans la majorité des pays européens, avec un nombre d'universités plus important en Italie et en Allemagne, création également des premières universités au Japon et en Corée,
- avant le XIX^{ème} siècle, forte émergence des universités américaines et début de création d'universités dans toute l'Asie,
- avant le XX^{ème} siècle, domination en nombre des universités américaines,
- et au XXI^{ème} siècle, forte émergence des universités asiatiques, avec dans l'ordre l'Inde, le Japon, et la Chine.

Si nous considérons le top 100 du classement global WPRWU, nous observons que la majeure partie des premières universités ont été fondées au XIX^{ème} siècle (environ 50). Seules dix à vingt universités fondées au XX^{ème} siècle *réussissent à entrer* dans le top 100. Ainsi, nous observons que le club des 100 premières universités est relativement *réticent* à l'acceptation de membres plus nouvellement créés. Les premières 43 (5) universités ont été fondées avant le XX^{ème} (XIX^{ème}) siècle, et sont restées de facto à leur position jusqu'à maintenant. Au total,

9. Distributions non reproduites ici, quelques exemples sont montrés aux Figs. 9 et 10 de Lages, Patt et Shepelyansky, 2016.

10. Nous gardons les noms actuels des pays lorsque ceux-ci correspondent géographiquement au lieu de fondation des universités.

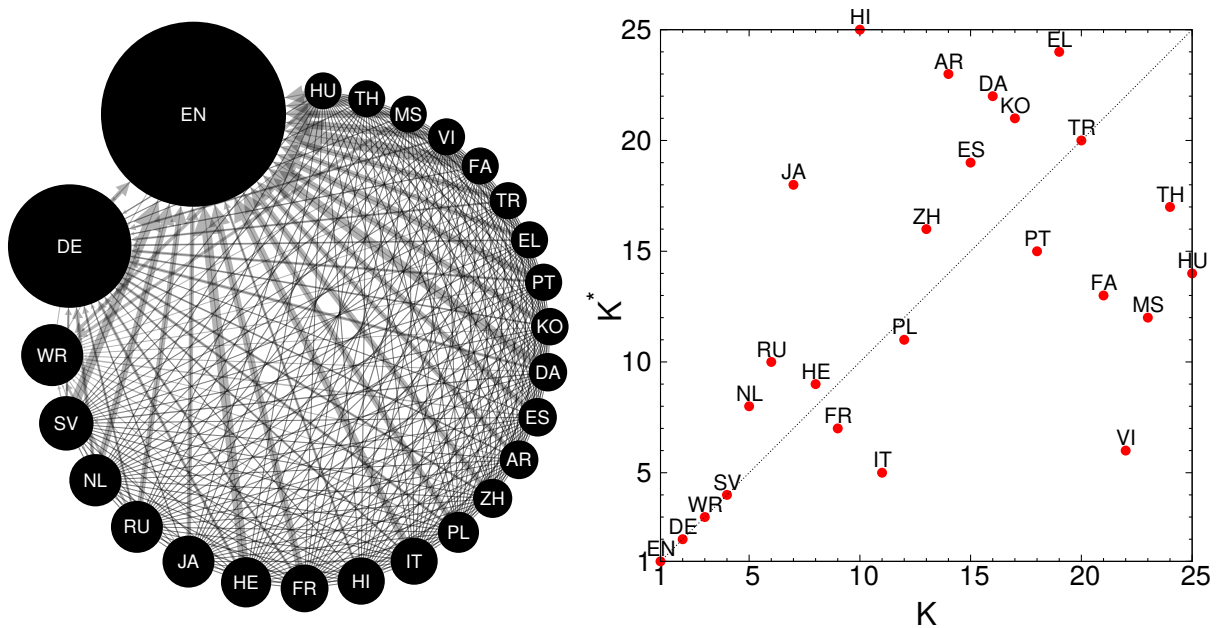


Figure 8.8 – À gauche : Réseau des cultures construit à partir des tops 100 des classements PageRank des universités dans les 24 éditions Wikipédia. La largeur du lien orienté est proportionnelle au nombre d'universités de la culture cible citées dans le top 100 de la culture source ; les liens intra-culture ne sont pas considérés. La taille d'un nœud est proportionnelle à sa probabilité PageRank dans le réseau des cultures. À droite : Distribution des cultures dans le plan PageRank–CheiRank (K, K^*) associé au réseau des culture à gauche. Adaptée de Lages, Patt et Shepelyansky, 2016.

dans le top 100 du classement WPRWU, il y a 9, 45, 14, et 6 universités fondées au XX^{ème}, XIX^{ème}, XVIII^{ème}, et XVII^{ème} siècles. Cela confirme la nature hautement rigide du top 100 WPRWU plaçant les universités fondées avant le XX^{ème} siècle aux toutes premières places.

Pour le lecteur intéressé, nous mentionnons les noms des universités fondées les premières et présentes dans notre classement : U Oxford, U Bologna (XI^{ème} siècle) ; U Salamanca, U Modena and Teggio Emilia, U Parma (XII^{ème} siècle) ; U Cambridge, U Padua, U Coimbra, U Naples Federico II, Complutense U Madrid, U Siena, U Lleida (XIII^{ème} siècle).

8.1.5 Intrication des cultures

Les classements PageRank établis pour les différentes éditions peuvent être utilisés pour analyser l'intrication des points de vue culturels. Nous assimilons, en première approximation, une langue à une culture et vice versa. Nous comptons alors combien d'universités N_{ij} , de culture (langue) i apparaît dans le top 100 PageRank des universités de culture (langue) j . Nous avons ainsi un réseau pondéré de cultures, le lien de la culture j vers la culture i est alors pondéré par N_{ij} . Il est alors possible de définir une matrice de Google pour ce réseau des cultures avec un facteur d'amortissement $\alpha = 0.85$. Nous considérons 24+1 cultures puisque certaines universités ne peuvent pas être associées à l'une des éditions/langues considérées. Ces universités sont associées à la culture *reste du monde* dénommée WR. Nous ne considérons pas les auto-citations à l'intérieur d'une même culture, ainsi $N_{ii} = 0, \forall i = \{1, \dots, 25\}$.

Le réseau des cultures, construit à partir des top 100 des classements PageRank des 24 éditions, est montré à la Figure 8.8 (gauche). On observe la nette influence des universités américaines, suivie de celle des universités allemandes. Avec une influence moindre, viennent ensuite dans l'ordre les universités suédoises, néerlandaises, russes, japonaises, israéliennes, françaises. . . l'influence du nœud WR est quelque peu arbitraire car toutes les éditions peuvent pointer vers une université dont la langue n'est pas l'une des 24 considérées, a contrario nous n'avons pas accès aux autres éditions, la *culture* WR ne pointe alors vers aucune autre culture. La Figure 8.8 (droite) montre les cultures sur le plan PageRank–CheiRank (K, K^*) relatif au réseau des cultures montré à gauche. Ce diagramme permet de voir que les cultures anglaises, allemandes et suédoises, sont aussi influentes que diffusives. Les autres cultures suivant leurs places sur le diagramme sont soit plus influentes que diffusives, comme par exemple les cultures néerlandaise, russe, japonaise, et indienne, soit plus diffusives qu'influentes, comme par exemple les cultures italienne et vietnamienne. L'édition hindi comporte 81 universités de langue hindi ce qui explique que cette culture est la moins diffuse, i.e. ici autocentrée et moins apte à citer les universités des autres cultures.

8.1.6 Écho médiatique

Ce classement Wikipédia des universités (Lages, Patt et Shepelyansky, 2016) a attiré l'intérêt des médias comme l'indique la centaine d'articles de presse nationaux et internationaux consacrés dans 22 pays différents : *Le Monde*, *MIT Technology Review*, *Times Higher Education*, *MarketWatch*, ... ¹¹

8.1.7 Réseaux réduits des universités

Bien que les réseaux Wikipédia aient changés entre février 2013 (Table 8.1) et mai 2017 (Table 8.2), le classement des universités WPRWU obtenu pour 2017 est similaire à celui de 2013 avec 100% (90%) de recouvrement pour le top 10 (top 100). Les deux tops 10 contiennent les mêmes universités avec le même classement du top 4 mais une inversion des universités Oxbridge. Le classement des universités basé sur l'architecture des réseaux d'articles Wikipédia semble être robuste au temps. À titre de comparaison, les classements ARWU 2013 et 2017 se recouvrent à 100% (84%) pour les universités du top 10 (top 100). Avec des différences anecdotiques, ce que nous avons dit auparavant pour l'étude que nous venons d'exposer pour les éditions 2013 reste valable pour les éditions 2017.

Il est davantage intéressant d'utiliser ici la matrice de Google réduite afin de capturer les interactions éventuelles entre les différentes universités. Ainsi, en se concentrant sur les $n_r = 20$ premières universités classées par l'algorithme PageRank à l'intérieur de l'édition anglaise de mai 2017 (ENWRWU) ¹², la Figure 8.9 montre l'intensité des éléments des matrices G_{rr} et G_{grnd} qui composent la MGR G_R associée aux $n_r = 20$ articles Wikipédia. Les éléments de la matrice G_{rr} reflètent les éléments de la matrice d'adjacence relatifs à ces $n_r = 20$ universités,

11. Voir la page web <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/datasets/WRWU/press/Press.html> pour la liste complète des articles de presse.

12. On notera XXWRWU le classement PageRank des universités dans l'édition Wikipédia XX où XX est l'un des codes de langue donnés à la page 131. Ces 24 classements (et d'autres) sont disponibles à l'adresse <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/datasets/WRWU17/>.

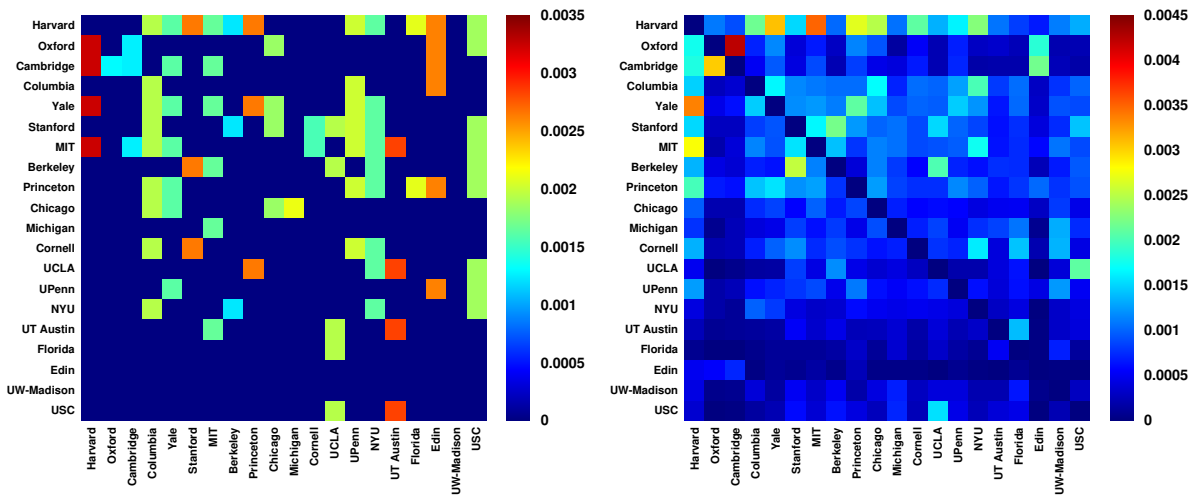


Figure 8.9 – Matrices G_{rr} (à gauche) et G_{qrnd} (à droite) associées au top 20 du classement ENWRWU. Les universités sont ordonnées suivant leurs rangs dans le classement PageRank de l'édition anglaise de Wikipédia. Le poids des matrices est $W_{rr} = 0.00877$ et $W_{qrnd} = 0.01381$. D'après Coquidé, Lages et Shepelyansky, 2019b.

par contre G_{qrnd} donne une information sur les liens indirects entre les universités. On voit par exemple que les liens $Oxford \rightleftharpoons Cambridge$ sont bien plus forts dans G_{qrnd} , à savoir la matrice de liens dits cachés, que dans G_{rr} , la matrice des liens directs. Ceci témoigne de la multitude de chemins indirects permettant de relier ces deux universités dans l'édition anglaise de Wikipédia. D'autres intensités de liens sont également *augmentées* par la contribution indirecte de G_{qrnd} . On peut également voir apparaître des liens absents de la matrice d'adjacence comme le lien $NYU \rightarrow Columbia$ qui possède un poids non négligeable dans G_{qrnd} . C'est un lien apparemment caché n'apparaissant pas dans l'analyse isolée des $n_r = 20$ universités, mais qui apparaît lorsque l'on considère, au travers de la MGR, l'ensemble du réseau Wikipédia global. Dans l'exemple montré à la Figure 8.9 pour le top 20 de ENWRWU, le poids, W_{qrnd} , de la matrice, G_{qrnd} , de liens cachés est ici à peu près 50% plus important que le poids, W_{rr} , de la matrice, G_{rr} , de liens directs. Ceci suggère l'importance des liens indirects entre les différentes universités.

Afin de caractériser les interactions entre universités au travers du réseau Wikipédia, nous cherchons à construire un réseau réduit d'universités obtenu à partir de la matrice composite $G_{rr} + G_{qrnd}$ encodant à la fois les liens directs et indirects. Le réseau réduit des universités issu du classement ENWRWU est montré à la Figure 8.10 (en haut). On a ici choisi quatre zones géographiques dans lesquelles se situent les $n_r = 20$ premières universités de ENWRWU, à savoir ici les côtes est et ouest des USA, la région centrale et le Royaume-Uni. En effet, le top 20 ENWRWU n'est composé que d'universités américaines et britanniques. Un code couleur indique dans quelles zones géographiques se situent les universités. On choisit pour chacune de ces quatre zones géographiques, l'université la mieux classée. Ces quatre universités leaders, repérées par un nœud plein, sont placées sur le plus grand cercle gris et vont constituer les graines de la construction du réseau réduit. Ensuite, on recherche au travers de la matrice composite $G_{rr} + G_{qrnd}$, quelles sont les quatre universités vers lesquelles chacune des universités-graines pointent préférentiellement. En d'autres termes, nous sélectionnons les quatre probabilités de transition les plus élevées dans la matrice $G_{rr} + G_{qrnd}$, permettant le

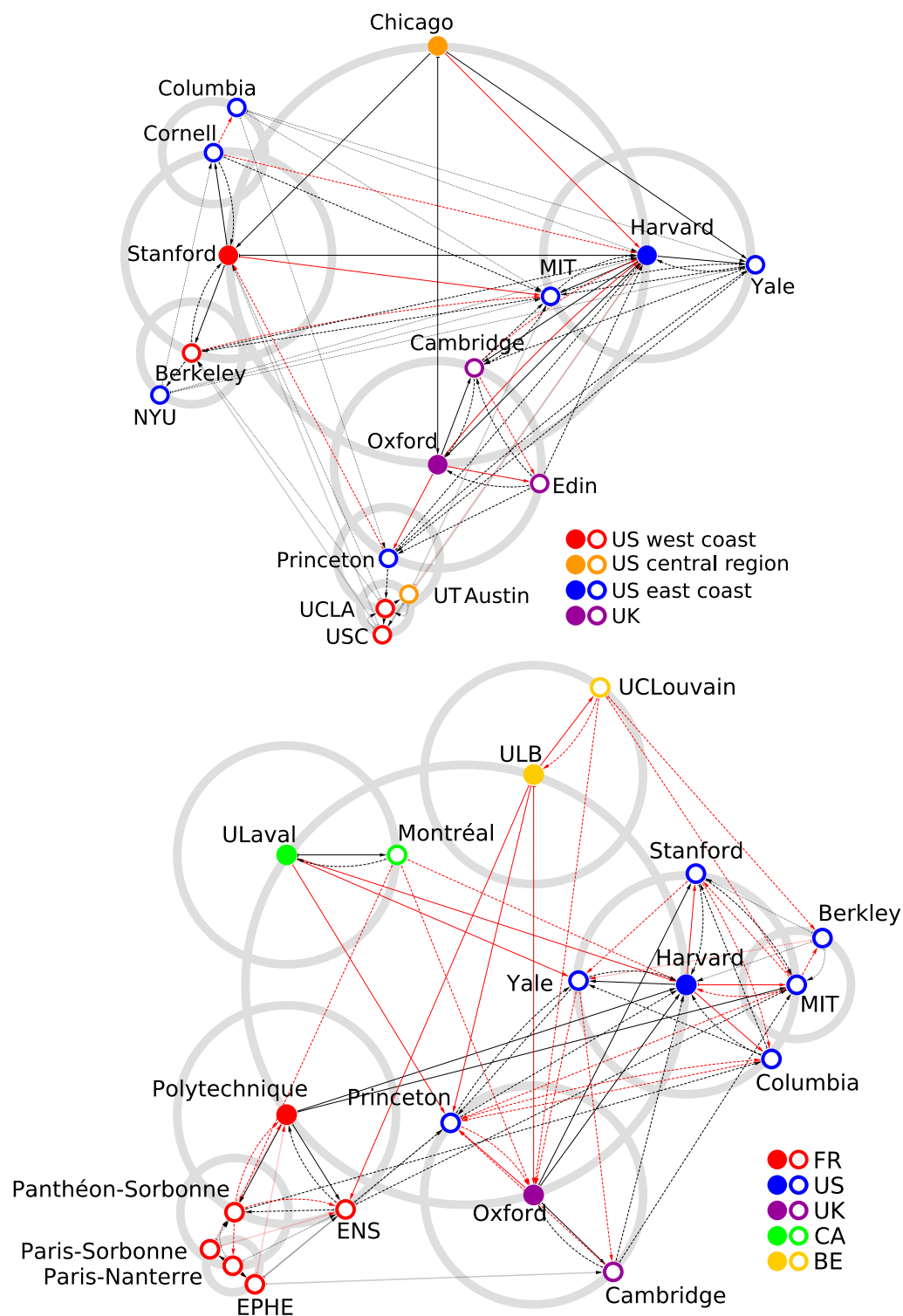


Figure 8.10 – Réseau réduit des universités construit à partir du top 20 des classements ENWRWU (en haut) et FRWRWU (en bas). L’algorithme de construction de ces réseaux réduits est donné dans le texte. Adaptée de Coquidé, Lages et Shepelyansky, 2019b, p. 11,12.

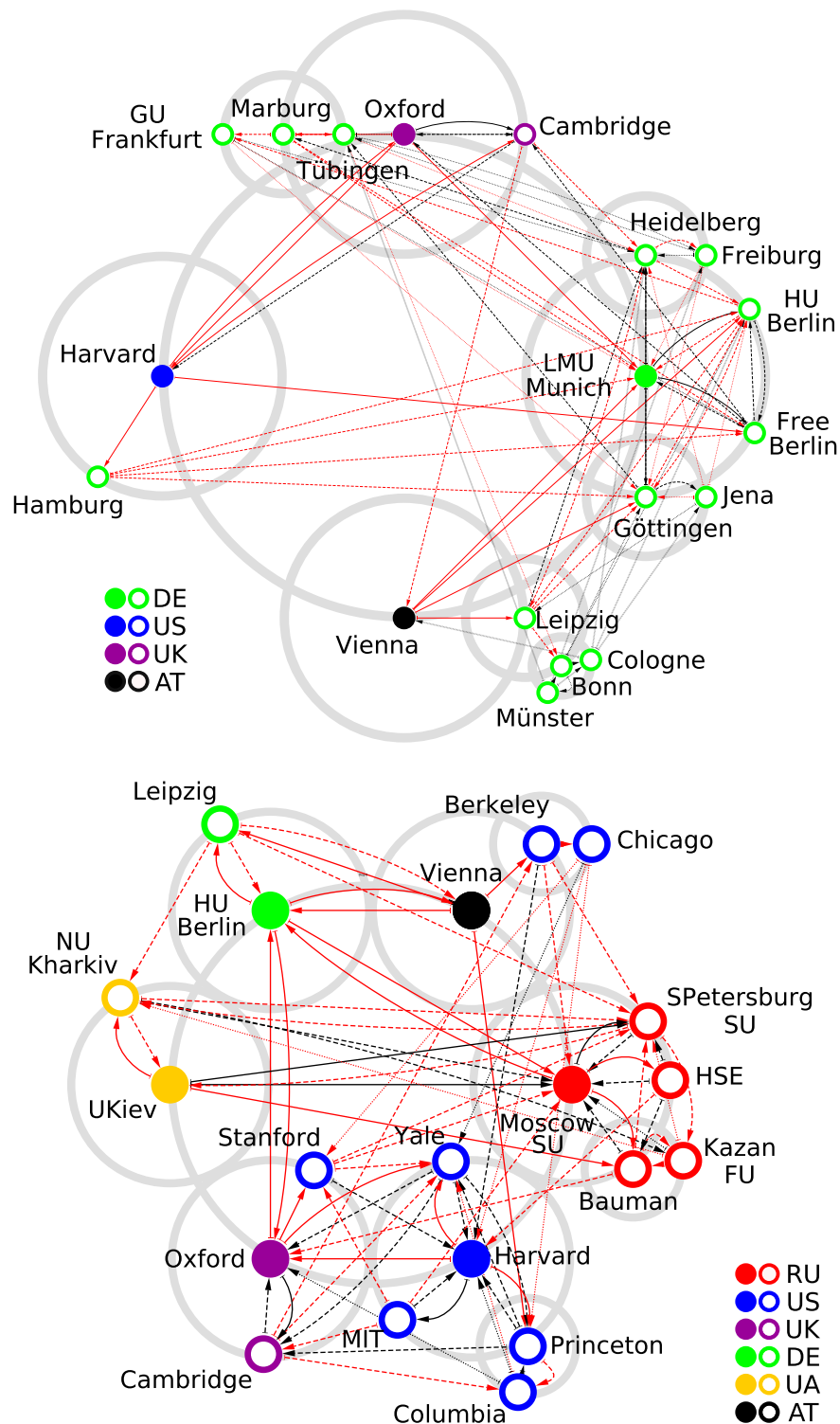


Figure 8.11 – Réseau réduit du top 20 des universités des classements DEWRWU (en haut) et RUWRWU (en bas). L'algorithme de construction de ces réseaux réduits est donné dans le texte. Adaptée de Coquidé, Lages et Shepelyansky, 2019b, p. 12,14.

saut depuis une des universités–graines vers une autre université. Ces universités vers lesquelles pointent préférentiellement les universités–graines sont soit d'autres universités–graines soit de nouvelles universités non encore présentes sur le réseau. Chacune de ces universités nouvellement sélectionnées est placée sur un cercle centré sur l'université–graine qui l'a engendrée. Si plusieurs universités–graines pointent vers une même nouvelle université, cette dernière est placée, si possible, sur le cercle centré autour de l'université graine appartenant à la même zone géographique. Toutes les probabilités de transitions sélectionnées ainsi sont matérialisées par un lien pointant de l'université–graine vers les autres universités. Ces liens sont soit de couleur noire, soit de couleur rouge lorsque le lien est purement caché, à savoir qu'il n'existe pas de lien direct entre les deux universités répertorié dans la matrice d'adjacence. À la suite de cette première itération de la construction du réseau réduit, les universités nouvellement apparues dans le réseau deviennent à leur tour les universités–graines pour la seconde itération. On cherche alors pour chacune de ces universités quelles sont les quatre universités vers lesquelles elles pointent préférentiellement. Les nouvelles universités sont placées sur des cercles centrés sur les universités qui les ont engendrées, et ainsi de suite. Pour ENWRWU, après 3 itérations de cette construction, plus aucune université n'apparaît, on obtient 3 niveaux d'acointance entre les universités du top 20 ENWRWU. Ces niveaux d'acointance sont repérés par différents motifs de liens. Ce processus de construction ne garantit pas forcément la présence de l'ensemble des universités du top 20 ENWRWU. À la Figure 8.10 (en haut), seules 16 universités sur les 20 sont représentées. Les universités de la région centre, Michigan et Wisconsin-Madison, et les universités de la côte est, Floride, et UPenn, sont, par manque de connectivité aux universités leaders, absentes du réseau réduit. Ce réseau montre que certaines universités sont relativement bien groupées par zone géographiques, ainsi, MIT, Harvard et Yale forment un groupe d'universités de la côte est, et, Oxford, Cambridge, Édimbourg, forment un groupe d'universités britanniques. On note également un bon nombre de liens interrégionaux et une bipolarité marquée est-ouest, les universités du centre des États-Unis étant en minorité et n'étant quasiment pas pointées par les autres universités. On observe également un nombre non négligeable de liens cachés entre les universités.

Afin d'effectuer une comparaison culturelle des classements anglais, français, allemand, et russe, nous montrons également les réseaux réduits issus des top 20 FRWRWU (Figure 8.10 en bas), DEWRWU (Figure 8.11 en haut), et RUWRWU (Figure 8.11 en bas).

Pour le top 20 FRWRWU (Figure 8.10 en bas), les cinq zones géographiques choisies sont les pays représentés dans ce top 20, à savoir les États-Unis, le Royaume-Uni, la France, le Canada et la Belgique. On obtient une répartition claire par pays, à savoir, principalement, une grappe fortement connectée d'universités françaises, et une autre grappe fortement connectée d'universités anglo-saxonnes. Les universités françaises forment une grappe assez isolée puisque, à part l'Université de Montréal et l'ULB, aucune université ne pointe vers une université française. Aussi, les universités francophones pointent majoritairement vers les universités anglo-saxonnes. Ceci montre un certain isolement des universités françaises au travers de cette analyse Wikipédia. Notons également que dans ce réseau réduit FRWIKI, les universités anglophones forment un sous-espace invariant duquel un surfeur aléatoire ne peut s'échapper, même si des universités françaises sont présentes dans le top 20 FRWIKI, les universités anglophones constituent ici l'attracteur principal.

Pour le top 20 DEWRWU (Figure 8.11 en haut), l'image est très différente des deux derniers réseaux réduits, puisqu'on observe une préférence nette dans le top 20 DEWRWU pour les

universités allemandes, seules 3 universités du top 20 ne sont pas germanophones (Harvard, Oxford et Cambridge). Une conséquence de cette nette préférence est le faible recouvrement observé en DEWRWU et ARWU ($\sim 35\%$ entre les deux top 100, voir Figure 8.1). Seuls quatre pays sont représentés, l'Autriche, l'Allemagne, le Royaume-Uni, et les États-Unis. La grappe principale a été générée par LMU Munich¹³ et l'Université de Vienne.

Pour le top 20 RUWRWU (Figure 8.11 en bas), le nombre de pays représentés, à savoir 6, est plus important ce qui témoigne d'influences culturelle plus variées dans le domaine universitaire. Sur 20, on dénombre 8 universités américaines, 5 russes, 2 ukrainiennes, 2 allemandes (appartenant à l'ex-RDA), 2 anglaises, et 1 autrichienne. On remarque une grappe fortement connectées d'universités russes et ukrainiennes, une autre grappe entre universités anglo-saxonnes, et une grappe plus modeste d'universités germanophones. Les liens directs sont principalement des liens à l'intérieur des grappes citées, témoignant certainement de l'ex-séparation Est/Ouest du monde. Les liens entre les différentes zones d'influences sont essentiellement des liens purement cachés rappelant qu'avant et après la séparation Est/Ouest toutes ces universités participaient conjointement à la diffusion mondiale du savoir académique. Il est intéressant de noter que les liens entre les universités de l'ancienne RDA et les universités russes sont encore bien présents même si Wikipédia a été créé bien après la chute du mur de Berlin.

Pour le lecteur intéressé, d'autres réseaux réduits d'universités sont présentés dans Coquidé, Lages et Shepelyansky, 2019b permettant d'appréhender les interactions entre les différentes universités du globe.

8.2 Maladies infectieuses dans Wikipédia

Les maladies infectieuses sont responsables du quart des décès dans le monde, et en particulier des deux tiers des décès des enfants de moins de cinq ans.¹⁴ Il va sans dire que l'étude de l'impact global de ces maladies dans le monde est un sujet de première importance. Nous sondons ici Wikipédia afin de déterminer, au travers du prisme de cette encyclopédie, l'influence des maladies infectieuses sur les différents pays du globe. Nous appliquons les méthodes issues de la matrice de Google (réduite), et décrites au Chapitre 7, au réseau d'articles de l'édition anglaise de Wikipédia. Comme cela a été dit précédemment les articles consacrés aux sciences sont de bonne qualité, similaire à celle attendue pour une encyclopédie (Giles, 2005). Par exemple, les articles Wikipédia consacrés aux biomolécules sont continuellement mis à jour par des spécialistes du domaine (Butler, 2008 ; Callaway, 2010).

Nous considérons $n_r = 425$ articles Wikipédia dont $n_p = 195$ consacrés aux pays du globe et $n_m = 230$ consacrés aux maladies infectieuses.¹⁵ Ces maladies infectieuses sont classées en plusieurs catégories suivant leurs origines, à savoir, bactérienne, virale, parasitaire, fongique, à prions, multiple, ou incertaine.

13. LMU Munich : Université Ludwig Maximilian de Munich.

14. D'après le National Institutes of Health <https://www.nih.gov>.

15. La liste de ces pays et maladies, ainsi que tous les résultats obtenus, sont présentés à l'adresse <http://perso.utinam.cnrs.fr/~lages/datasets/Wiki4InfectiousDiseases/>.

8.2.1 Classement PageRank et CheiRank des maladies infectieuses

Une fois le classement des articles via l'algorithme PageRank fait, l'extraction du classement des maladies infectieuses donne le top 4 : sida, malaria, pneumonie, et variole. Les articles associés, dans l'ordre, à ces maladies infectieuses sont, parmi les articles consacrés aux maladies infectieuses, les plus influents dans Wikipédia. Le classement global des $n_m = 230$ maladies est présenté dans Rollin, Lages et Shepelyansky, 2019 et Rollin, Lages et Shepelyansky, 2018.

8.2.2 Interactions mutuelles entre maladies infectieuses, et interactions entre maladies infectieuses et pays du globe

Afin de quantifier d'une part l'interaction entre les maladies infectieuses (au travers des articles qui leur sont consacrés), et d'autre part l'impact qu'ont ces maladies sur les pays du globe, nous construisons la MGR des $n_r = n_p + n_m = 425$ articles concernés. Une partie de cette MGR concernant les secteurs *pays africain* et *maladies virales* est représentée pour illustration à la Figure 8.12. Sur cette figure, les blocs diagonaux rendent compte des liens orientés directs et/ou indirects entre pays africains (bloc AF→AF), et entre maladies virales (bloc VI→VI), alors que les blocs hors-diagonaux rendent compte des liens orientés directs et/ou indirects entre pays africains et maladies virales (bloc hors-diagonal AF→VI en bas à gauche) et entre maladies virales et pays africains (bloc hors-diagonal VI→AF en haut à droite).

Nous construisons le réseau réduit des maladies infectieuses sur le même modèle que celui construit pour les universités. Nous prenons comme maladies-graines, les maladies infectieuses les mieux classées dans leur catégorie, les *maladies leaders*, à savoir la tuberculose pour les maladies bactériennes, le sida pour les maladies virales, la malaria pour les maladies parasitaires, la candidose pour les mycoses, la pneumonie pour les maladies à causes multiples, Creutzfeldt–Jakob pour les maladies à prions, et desmodesmus pour les maladies à causes incertaines. Sur la Figure 8.13, seules 16 des 230 maladies infectieuses sont représentées, ces maladies sont celles préférentiellement connectées aux maladies leaders. Quatre des maladies leaders sont bien connectées : les nœuds correspondant à la tuberculose, le sida, la malaria, et la pneumonie ont un degré supérieur ou égal à six. Les nœuds correspondant à la maladie de Creutzfeldt–Jakob et à desmodesmus sont, quant à eux, plus isolés. En ne considérant que les maladies obtenues lors de la première itération de construction du réseau réduit, nous retrouvons plusieurs interactions connues entre les maladies infectieuses, à savoir :

- la syndémie¹⁶ tuberculose–sida (voir par exemple, Kwan et Ernst, 2011 ; Pawlowski et al., 2012) qui est ici représentée par une boucle fermée entre les deux maladies,
- l'interaction entre le sida et la syphilis (voir par exemple Karp et al., 2009) qui est un exemple typique de syndémie impliquant le sida et une MST,¹⁷
- l'interaction de la candidose avec le sida, puisque la première est une maladie opportuniste très commune pour les malades du VIH (voir par exemple Armstrong-James, Meintjes et Brown, 2014), et l'interaction de la candidose avec la sepsis¹⁸ puisque, e.g.,

16. Pour une définition de syndémie, <https://fr.wikipedia.org/wiki/Synd%C3%A9mie>.

17. MST : maladie sexuellement transmissible.

18. Bien que la plupart des sepsis ont une origine bactérienne, il y a des cas où la sepsis peut être due à un champignon ou à un virus.

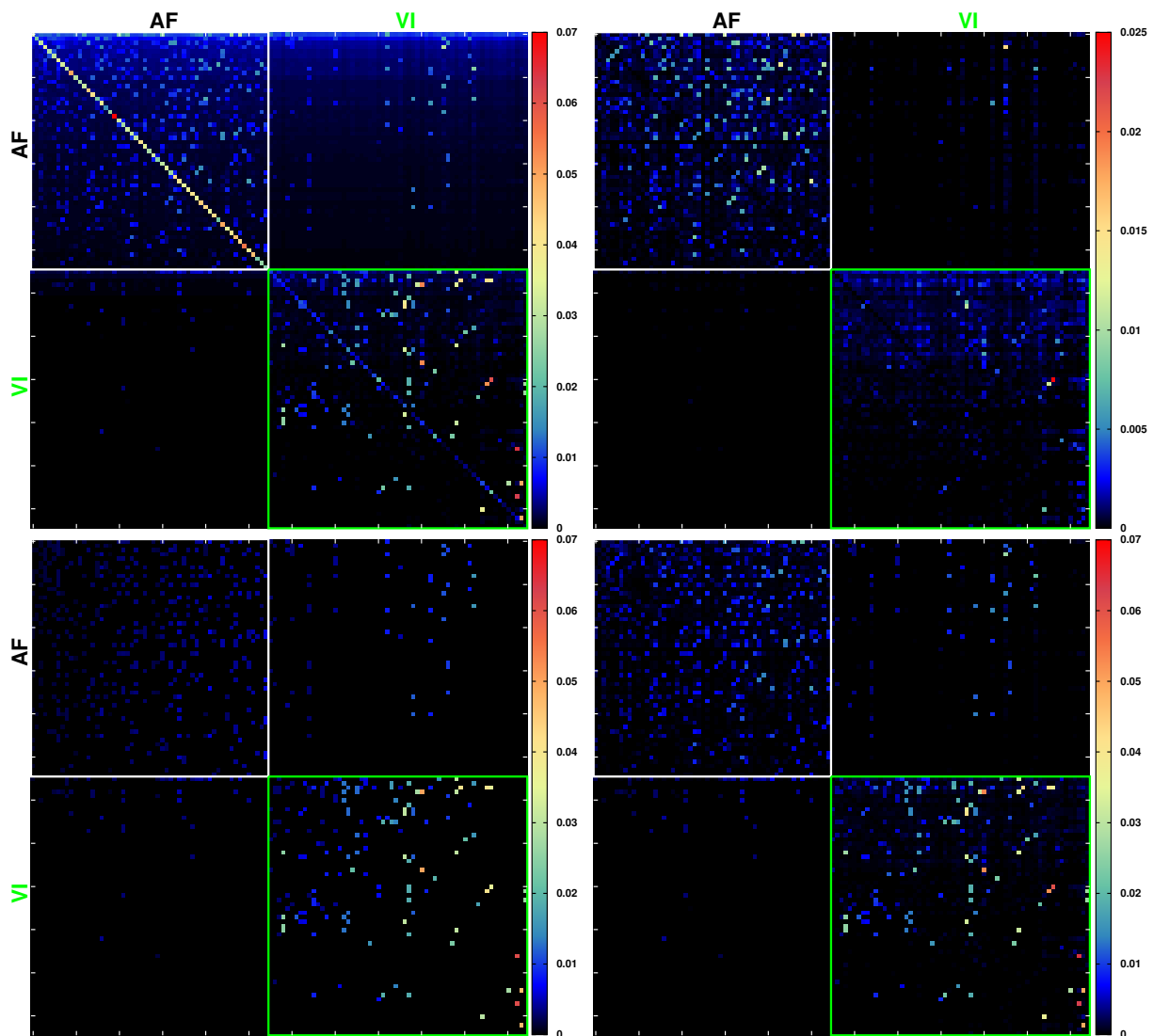


Figure 8.12 – Matrice de Google réduite G_R (en haut à gauche), et trois autres composantes matricielles G_{qrnd} (en haut à droite), G_{rr} (en bas à gauche), et $G_{\text{rr}} + G_{\text{qrnd}}$ (en bas à droite), toutes associées au sous réseau d'articles consacrés aux pays et aux maladies infectieuses dans l'édition Wikipédia de mai 2017. Pour plus de visibilité, nous montrons ici uniquement les éléments de matrice qui correspondent au sous ensemble des articles consacrés aux pays africains et au sous ensemble des articles consacrés aux maladies virales (voir Rollin, Lages et Shepelyansky, 2018 pour la MGR globale de dimension 425×425 représentant tous les pays et toutes les maladies virales). D'après Rollin, Lages et Shepelyansky, 2019.

la candidose invasive peut dans des rares cas mener à des chocs septiques entraînant la mort dans 70% des cas (voir par exemple Pappas et al., 2018),

- l'interaction pneumonie vers sepsis ou l'interaction malaria vers sepsis. La première interaction reflète le fait que la sepsis est une des complications possibles de la pneumonie, la seconde interaction reflète le fait que les symptômes de la malaria ressemblent à ceux de la sepsis (Auma et al., 2013),
- la boucle fermée entre la tuberculose et la lèpre reflète le fait que ces deux maladies

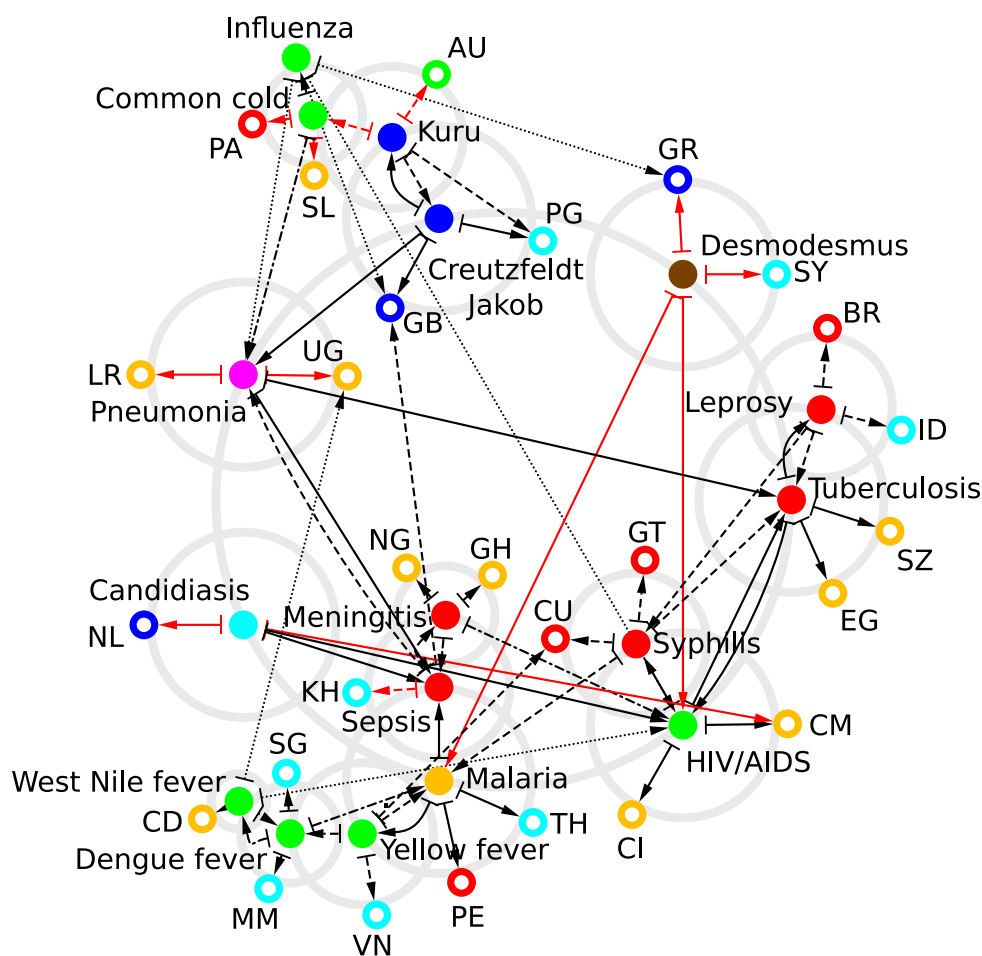


Figure 8.13 – Réseau réduit des maladies infectieuses. Nous considérons, pour chacune des sept catégories de maladies infectieuses, la maladie dont l'article a le meilleur classement PageRank, à savoir, la tuberculose pour les maladies bactériennes (●), le sida pour les maladies virales (●), la malaria pour les maladies causées par des parasites (●), la candidose pour les mycoses (●), la pneumonie pour les maladies à causes multiples (●), Creutzfeldt–Jakob pour les maladies à prions (●), et desmodemus pour les maladies dont l'origine est inconnue (●); voir Rollin, Lages et Shepelyansky, 2019. Pour chacune de ces maladies *leaders* (placées le long du grand cercle gris), nous déterminons les deux maladies pour lesquelles les probabilités de transition à partir de la maladie leader, lues dans $G_{rr} + G_{qrd}$, sont les plus importantes. Si les deux maladies ne sont pas déjà présentes dans le réseau réduit, alors nous les plaçons sur le cercle gris centré sur la maladie leader les ayant générées. Alors, à partir de chacune des maladies nouvellement ajoutées, nous déterminons de même les deux maladies vers lesquelles les probabilités de transitions sont les plus importantes dans $G_{rr} + G_{qrd}$, et ainsi de suite. Après la quatrième itération de ce processus, aucune nouvelle maladie ne peut être ajoutée. Les flèches représentent les liens entre les maladies (— pour la 1ère itération, --- pour la 2ème itération, -.- pour la 3ème itération, et pour la 4ème itération). Les flèches noires (rouges) correspondent à des liens (n') existants (pas) dans la matrice d'adjacence. Nous indiquons les deux pays vers lesquels chaque maladie infectieuse pointe préférentiellement d'après la matrice $G_{rr} + G_{qrd}$. Les pays sont représentés par des anneaux dont la couleur est associée au continent : (●) pour l'Europe, (●) pour le continent américain, (●) pour l'Afrique, (●) pour l'Asie, (●) pour l'Océanie. Adaptée de Rollin, Lages et Shepelyansky, 2019.

sont causées par deux espèces de mycobactéries différentes (voir par exemple Wikipedia, 2018b),

- la relation entre la pneumonie et la tuberculose, deux maladies pulmonaires sévères (voir par exemple WHO, 2018),
- la maladie de Creutzfeldt–Jakob pointant vers la pneumonie puisque les patients infectés par ce prion développent une pneumonie fatale due à des réflexes altérés de la toux (voir par exemple Al Balushi et al., 2016),
- la boucle fermée entre les maladies kuru et Creutzfeldt–Jakob puisque ces deux maladies sont représentatives des encéphalopathies spongiformes transmissibles (voir par exemple Sikorska et Liberski, 2012).

En considérant maintenant aussi les maladies générées à partir de la seconde itération, des sous structures particulières apparaissent comme :

- la grappe des maladies bactériennes tuberculose–lèpre–syphilis, puisqu’il y a eu jusqu’à la fin du XIX^{ème} siècle une confusion de diagnostic entre la lèpre et la syphilis (voir par exemple Inconnu, 1890, 1899), et des faux positifs à la tuberculose peuvent se produire pour des patients atteints de la syphilis (voir par exemple Shane, 2006),
- la grappe des *maladies du moustique* regroupant la malaria, la fièvre jaune, la dengue, et la fièvre du Nil occidental,
- la boucle fermée méningite–sepsis puisque la sepsis est habituellement développée aux tout premiers stades chez les patients atteint de méningite (voir par exemple CDC, 2018).

Les flèches rouges sur la Figure 8.13, indiquent les liens purement indirects : desmodemus et malaria sont des maladies hydriques (voir par exemple Wikipedia, 2018c), les articles desmodemus et HIV/AIDS sont reliés par un article Wikipédia consacré à l’immunocompétence (voir par exemple Wikipedia, 2018a), et le mot *kuru* dans le langage Fore de Papouasie-Nouvelle-Guinée veut dire trembler de froid comme lorsque l’on s’enrhume¹⁹ (voir par exemple Liberski et Ironside, 2015).

De la précédente analyse, nous observons que le *câblage* entre les articles consacrés aux maladies infectieuses dans Wikipédia donne une information censée suggérant que l’information encodée dans la matrice de google réduite G_R , et plus précisément dans $G_{qr} + G_{qrrnd}$, est fiable, et peut être utilisée pour inférer des relations potentielles entre les maladies infectieuses et n’importe quels autres sujets traités dans Wikipédia, tels que les pays, les médicaments, les protéines... À titre d’exemple, sur la Figure 8.13 sont reportés les pays dont les articles sont pointés préférentiellement par les articles consacrés aux maladies infectieuses. L’Égypte et le Swaziland sont pointés par la tuberculose, le Cameroun et la Côte d’Ivoire par le sida, le Pérou et la Thaïlande par la malaria, le Liberia et l’Ouganda par la pneumonie, et le Royaume-Uni et la Papouasie-Nouvelle-Guinée par la maladie de Creutzfeldt–Jakob. Ces liens forts entre les articles des maladies infectieuses et ceux des pays correspondent à des faits connus, comme, par exemple, le fait qu’une proportion non négligeable de la population britannique soit porteuse du prion responsable de la maladie de Creutzfeldt–Jakob (Gill et al., 2013). Nous allons ci-après utiliser la sensibilité du PageRank pour analyser plus spécifiquement l’impact mondial des maladies.

19. voir le lien Kuru → Common cold sur la Figure 8.13.

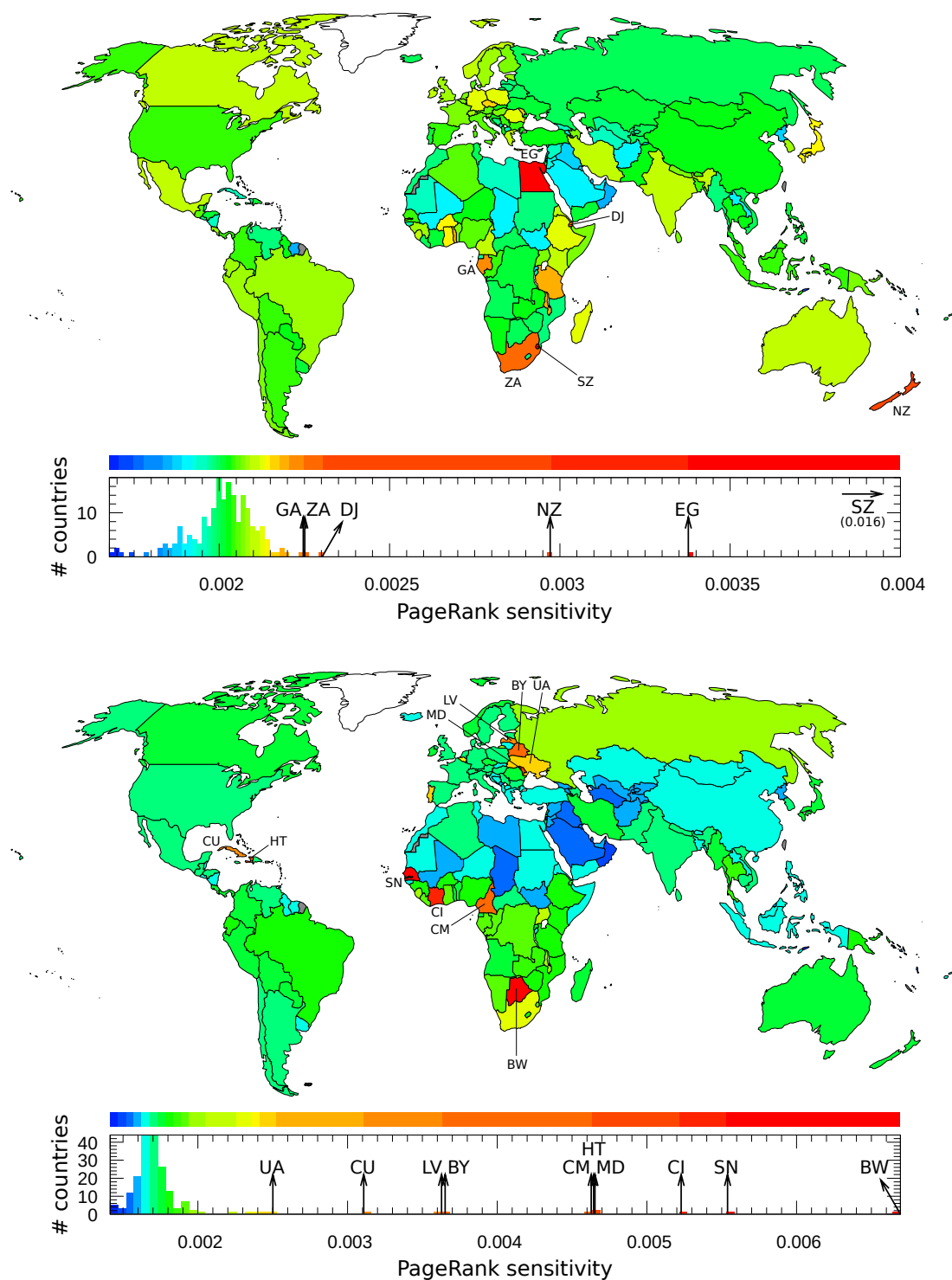


Figure 8.14 – Sensibilité PageRank des articles consacrés aux pays vis-à-vis de l'article consacré à la tuberculose (en haut) et de l'article consacré au sida (en bas). Adaptée de Rollin, Lages et Shepelyansky, 2019.

8.2.3 Sensibilités des pays du globe aux maladies infectieuses

Nous pouvons utiliser la sensibilité du PageRank $D(m \rightarrow p, p)$, définie à la section 7.3, pour mesurer l'influence d'une maladie m sur un pays p . En d'autres termes, $D(m \rightarrow p, p)$ mesure la variation de probabilité PageRank de l'article consacré au pays p , lorsque le lien $m \rightarrow p$ de la MGR varie de façon infinitésimale. Les sensibilités du PageRank $D(\text{tuberculose} \rightarrow p, p)$ et $D(\text{sida} \rightarrow p, p)$ pour tous les pays p du globe sont illustrées à la Figure 8.14. Les pays les plus sensibles à la tuberculose sont dans l'ordre le Swaziland (SZ), l'Égypte (EG), et la Nouvelle-Zélande (NZ). En effet, en 2017, le Swaziland détenait le record du taux d'incidence²⁰ de tuberculose comme cela est mentionné dans l'article consacré à la tuberculose²¹. Ce même article relate la découverte de lésions tuberculeuses sur les colonnes vertébrales de momies de l'ancienne Égypte. La Nouvelle-Zélande est citée dans cet article car ce pays a presque réussi à éradiquer la tuberculose bovine. Ainsi l'article sur la tuberculose contient des liens directs vers les articles de ces trois pays (en accord d'ailleurs avec le réseau réduit Figure 8.13), ce qui les rend très sensibles à cette maladie. Assurément, l'origine de cette sensibilité est différente pour chacun des trois pays, Swaziland, Égypte, et Nouvelle-Zélande. Le réseau des articles Wikipédia intègre tous les événements historiques associés à la tuberculose, qu'ils datent de l'ancienne Égypte ou qu'ils soient récents comme le taux d'incidence élevé au Swaziland.

Les pays, via leurs articles Wikipédia, les plus sensibles au sida sont le Botswana (BW), le Sénégal (SN), et la Côte d'Ivoire (CI) (voir Figure 8.14 en bas). En effet, l'article sur le syndrome d'immunodéficience acquise²² explique que l'espérance de vie estimée au Botswana a chuté de 65 en 1990 à 35 ans en 2005, cette chute étant due en grande partie à l'épidémie de sida. Les articles Sénégal et Côte d'Ivoire sont cités car la souche VIH-2 est endémique de l'Afrique de l'Ouest. Le réseau réduit (Figure 8.13) montre que les pays pointés par HIV/AIDS sont en effet des pays de l'Afrique de l'Ouest, à savoir la Côte d'Ivoire et le Cameroun.

Les articles d'autres pays, comme par exemple Djibouti (DJ), l'Afrique du Sud (ZA), et le Gabon (GA) pour la tuberculose, et la Moldavie (MD), la Biélorussie (BY), la Lettonie (LV), et Cuba (CU) pour le sida sont également significativement sensibles aux articles de ces maladies, bien qu'ils ne soient pas directement cités par ces articles. Il est plus difficile de justifier les sensibilités de ces articles car elles sont dues aux liens indirects. L'étude de ces sensibilités, a priori non évidentes, peut être potentiellement intéressant.

Les sensibilités à ces deux maladies (Figure 8.14) illustrent la capacité de la matrice de Google réduite à quantifier les interactions entre les maladies infectieuses et les pays du globe. Nous pouvons également analyser la sensibilité croisée $D(m \rightarrow p', p)$ d'un pays p à la variation du lien allant de la maladie m au pays p' (voir Rollin, Lages et Shepelyansky, 2019).

20. Incidence d'une maladie : nombre de nouveaux cas sur une période donnée.

21. <https://en.wikipedia.org/wiki/Tuberculosis>

22. <https://en.wikipedia.org/wiki/HIV>

Chapitre 9

Réseaux de protéines en interaction : application à l'oncologie

Nous avons également étudié un réseau de protéines en interaction. La construction de la matrice de Google réduite associée à un ensemble de protéines responsables d'une fonction biologique bien précise permet une visualisation compacte de ces protéines tout en préservant les interactions indirectes entre ces protéines au travers du réseau constitué de la dizaine de milliers de protéines répertoriées. N'ayant pas les compétences pour finement exprimer en français les termes techniques de biologie des systèmes¹, nous donnons ci-dessous un résumé de l'article Lages, Shepelyansky et Zinovyev, 2018 et nous proposons au lecteur intéressé sa lecture.

Les différents chemins de signalisation constituent des parties du réseau biologique moléculaire global. Ces chemins de signalisation sont connectés entre eux au travers d'interactions complexes directes et indirectes dont la structure peut changer lors du développement ou dans le cas de pathologies. Nous avons suggéré une méthodologie nouvelle, appelée *Googlomics*, pour l'analyse structurelle de réseaux biologiques orientés. Cette méthode utilise l'analyse spectrale des matrices de Google associées aux réseaux biologiques en utilisant des parallèles avec la théorie de la diffusion quantique, développée initialement pour la physique nucléaire et mésoscopique et le chaos quantique. Nous avons introduit la méthode analytique de la matrice de Google réduite pour l'analyse de la structure de réseaux biologiques. Cette méthode permet d'inférer des relations causales cachées entre les membres d'un chemin de signalisation ou d'un groupe de gènes fonctionnellement reliés. Nous avons étudié comment la structure des relations causales cachées peut être reprogrammée, signe d'un changement du réseau transcriptionnel lors de la cancérogenèse. L'approche Googlomics permet de caractériser rigoureusement les changements systémiques complexes du câblage de très grands réseaux biologiques causaux, et cela d'une manière efficace en coût computationnel.

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Biologie_des_syst%C3%A8mes

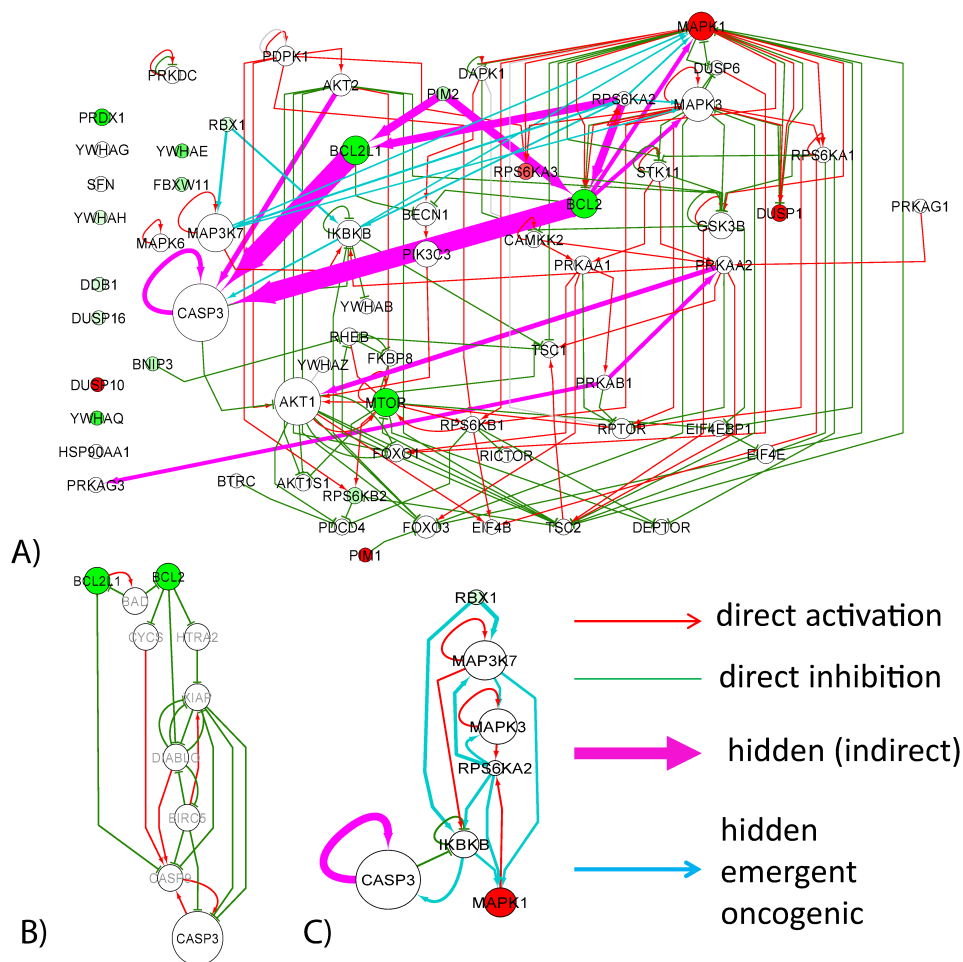


Figure 9.1 – Chemin de signalisation AKT-mTOR reconstruit en utilisant la base de donnée SIGNOR^a et en inférant des connections indirectes grâce à l'approche Googlomics. A) Les connections directes représentant les régulations d'activation et d'inhibition sont illustrées par des flèches rouges et vertes. Les flèches de couleur magenta illustrent les interactions indirectes inférées, communes au réseau issu d'un patient "normal" et au réseau issu d'un patient atteint d'un cancer. Les flèches de couleur cyan représentent les interactions indirectes inférées uniquement dans le réseau issu d'un patient atteint d'un cancer. La largeur des flèches représentant les interactions indirectes, est proportionnelle à leur score G_{qr} . Ici, seules les dix premières connections indirectes, présentes à la fois dans le réseau "normal" et dans le réseau "cancer", et les dix premières connections "émergentes dans le cancer" sont montrées. La couleur des protéines reflète le changement relatif de leur classement PageRank entre le réseau "cancer" et le réseau "normal". La couleur rouge (verte) indique une protéine mieux placée dans le classement PageRank du réseau "cancer" ("normal"). La taille d'un nœud est proportionnelle à la valeur de la probabilité PageRank dans le réseau SIGNOR. B) Cascade cachée de régulations indirectes connectant les protéines BCL2 et BCL2L1 à la protéine CASP3. Les protéines, dont les noms sont en gris, ne font pas partie de la définition du chemin de signalisation AKT-mTOR. C) Cascade d'interactions cachées émergentes dans le réseau "cancer" et non présentes dans le réseau "normal". D'après Lages, Shepelyansky et Zinovyev, 2018.

a. <https://signor.uniroma2.it>

Chapitre 10

Réseau du commerce international

Nous nous intéressons ici aux transactions du commerce international. Actuellement, la base de donnée de l'Organisation des Nations Unies, UN COMTRADE, ¹ recense les échanges commerciaux de plus de 10^4 produits entre les différents pays du globe. La matrice des flux d'importation–exportation atteint ainsi une taille de $\sim 10^6$. Par année, les échanges commerciaux entre les pays peuvent être vus comme un réseau orienté où les nœuds sont les couples (pays, produit) et les liens orientés sont pondérés par les montants échangés exprimés en dollars américains.

De manière générale, les récents développements dans le domaine des réseaux complexes (voir Dorogovtsev, 2010 pour une revue) devraient pouvoir être appliqués au réseau du commerce international (RCI). Ermann et Shepelyansky, 2015 ont proposé d'utiliser la matrice de Google G , et les algorithmes associés, PageRank et CheiRank, pour analyser le RCI. Contrairement à l'approche traditionnelle en économie basée sur les flux bilatéraux d'importation et d'exportation, l'analyse via la matrice de Google permet de considérer chaque pays en fonction de leur capacité à importer et exporter, et permet aussi, au travers des algorithmes PageRank et CheiRank, de prendre en compte les différentes chaînes de transactions entre les différents pays, et par conséquent de mesurer l'importance spécifique de certains pays du réseau. Cette approche est drastiquement différente de la simple étude comptable bilatérale import–export.

Habituellement pour les réseaux orientés, tels que le WWW ou Wikipédia, les composantes du vecteur PageRank sont, en moyenne, proportionnelles au degré entrant des nœuds du réseau. Pour le RCI, les composantes du vecteur PageRank seront ainsi proportionnelles au flux commercial entrant vers les nœuds, et donc le vecteur PageRank caractérisera l'importation. Quant aux composantes du vecteur CheiRank, elles seront proportionnelles au flux commercial sortant des nœuds, et caractériseront donc l'exportation.

Le RCI comportant plus de 10^6 nœuds, il est important de pouvoir connaître les interactions effectives entre un nombre spécifique d'acteurs économiques appartenant par exemple à une zone économique spécifique tout en prenant en compte l'information encodée dans le réseaux global du commerce international. Cela requiert de connaître les transactions économiques bilatérales directes entre les pays et les produits sélectionnés, mais aussi les transactions indirectes via le reste du RCI. Ainsi, en utilisant les données UN COMTRADE, nous allons construire la matrice de Google réduite nous permettant d'analyser l'influence des échanges d'hydrocarbures russes, américains, et saoudiens sur les économies des pays de l'Union euro-

1. <https://comtrade.un.org>

péenne (UE). Avec cette approche nous pouvons mesurer la sensibilité des économies des pays de l'UE à l'augmentation du coût de l'approvisionnement en pétrole et gaz provenant de ces trois pays. Tout cela, en prenant en compte les transactions globales concernant la soixantaine d'autres produits majeurs dans le monde.

Il existe un nombre important d'études (voir par exemple Barigozzi, Fagiolo et Garlaschelli, 2010; Chakraborty et al., 2018; Fagiolo, Reyes et Schiavo, 2009, 2010; He et Deem, 2010; Serrano, Boguñá et Vespignani, 2007) analysant les flux financiers et commerciaux comme des réseaux complexes. Cependant, l'algorithme PageRank a rarement été utilisé pour analyser le RCI (voir l'une des première utilisation dans De Benedictis et Tajoli, 2011). L'étude conjuguée des flux économiques entrants et sortants n'a jamais été considérée, à part par Ermann et Shepelyansky, 2015 en utilisant l'algorithme CheiRank en plus de l'algorithme PageRank. De manière générale, les méthodes matricielles sont rarement utilisées dans l'étude des transactions économiques, même si il a été montré que l'analyse des risques financiers et de crédits peut être effectuée à l'aide de la théorie des matrices aléatoires (Bouchaud et Potters, 2003; Münnix, Schäfer et Guhr, 2014). Les méthodes issues de la mécanique statistique ont également montré leur efficacité pour l'analyse des marchés économiques (Bardoscia, Livan et Marsili, 2017). Cependant, les flux considérés par Bouchaud et Potters, 2003; Münnix, Schäfer et Guhr, 2014 sont non orientés alors que la RCI décrit typiquement des flux de transactions orientés. Pour cette raison, nous considérons que l'analyse du RCI à l'aide de la matrice de Google réduite devrait trouver des applications futures intéressantes dans le domaine des transactions financières et commerciales.

10.1 Matrice de Google pour le réseau du commerce international

À partir de la base de données UN COMTRADE, nous avons collecté les échanges de $N_p = 61$ produits² entre $N_c = 227$ pays³ pour les années 2004, 2008, 2012, et 2016. Cette répartition en $N_p = 61$ type de produits regroupe en fait un ensemble de $\sim 10^4$ produits différents. Afin de procéder à une comparaison entre les différentes années du RCI, nous considérons les $N_c = 227$ pays présents dans la base de donnée UN COMTRADE pour 2008. Pour une année donnée, nous construisons ainsi les matrices de transfert d'argent dont les éléments sont $M_{cc'}^p$ caractérisant le transfert d'une quantité de produit p , comptée en USD, du pays c' vers le pays c . Nous définissons aussi le volume d'importation du produit p par le pays c , $V_c^p = \sum_{c'=1}^{N_c} M_{cc'}^p$, et le volume d'exportation du produit p par le pays c , $V_c^{*p} = \sum_{c'=1}^{N_c} M_{c'c}^p$. Les volumes totaux d'importations et d'exportations d'un pays c sont alors $V_c = \sum_{p=1}^{N_p} V_c^p$ et $V_c^* = \sum_{p=1}^{N_p} V_c^{*p}$. Le volume total échangé dans tout le RCI est alors $V = \sum_{c=1}^{N_c} V_c = \sum_{c=1}^{N_c} V_c^*$. Il est possible de définir des vecteurs de probabilités ImportRank $\hat{\mathbf{P}}$ et ExportRank $\hat{\mathbf{P}}^*$ dont les composantes sont $\hat{P}_{cp} = V_c^p/V$ et $\hat{P}_{cp}^* = V_c^{*p}/V$. Les éléments des matrices stochastiques

2. Ces produits, listés sur la page <https://comtrade.un.org/db/mr/rfCommoditiesList.aspx>, sont identifiés par un code de la *Standard International Trade Classification* (Rev. 1) à 2 chiffres de 01 à 61.

3. L'indice c rappelle le terme anglais *country*.

S et S^* sont alors

$$S_{cp,c'p'} = \begin{cases} M_{cc'}^p/V_{c'}^{*p} & \text{si } p = p' \text{ et } V_{c'}^{*p} \neq 0 \\ 0 & \text{si } p \neq p' \text{ et } V_{c'}^{*p} \neq 0 \\ 1/N & \text{si } V_{c'}^{*p} = 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

et

$$S_{cp,c'p'}^* = \begin{cases} M_{c'c}^p/V_c^p & \text{si } p = p' \text{ et } V_c^p \neq 0 \\ 0 & \text{si } p \neq p' \text{ et } V_c^p \neq 0 \\ 1/N & \text{si } V_c^p = 0. \end{cases} \quad (10.2)$$

Nous définissons aussi (Coquidé et al., 2019; Ermann et Shepelyansky, 2015) deux vecteurs préférentiels (7.4), $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}^*$, dont les composantes sont

$$\left\{ v_{cp} = \frac{V_c^p}{N_c V_c} \right\}_{p=1, c=1}^{N_p, N_c} \quad \text{et} \quad \left\{ v_{cp}^* = \frac{V_c^{*p}}{N_c V_c^*} \right\}_{p=1, c=1}^{N_p, N_c}. \quad (10.3)$$

À partir de ces matrices stochastiques et vecteurs préférentiels, nous construisons les matrices de Google G et G^* dont les éléments sont

$$G_{cp,c'p'} = \alpha S_{cp,c'p'} + (1 - \alpha) v_{cp} \quad \text{et} \quad G_{cp,c'p'}^* = \alpha S_{cp,c'p'}^* + (1 - \alpha) v_{cp}^*, \quad (10.4)$$

avec $\alpha = 0.5$. Les vecteurs probabilité PageRank et CheiRank, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}^*$, associés à ces deux matrices de Google, nous permettent de définir deux nouveaux vecteurs préférentiels, $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v}^{*'}$, dont les composantes sont

$$\left\{ v'_{cp} = \frac{\sum_{c'=1}^{N_c} P_{c'p}}{N_c} \right\}_{p=1, c=1}^{N_p, N_c} \quad \text{et} \quad \left\{ v^{*'}_{cp} = \frac{\sum_{c'=1}^{N_c} P_{c'p}^*}{N_c} \right\}_{p=1, c=1}^{N_p, N_c}. \quad (10.5)$$

Ces deux vecteurs préférentiels, $\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}$ et $\mathbf{v}^{*'} \rightarrow \mathbf{v}^*$, permettent de redéfinir deux nouvelles matrices de Google G et G^* (10.4).

10.2 Réseau réduit des échanges d'hydrocarbures dans l'UE

La matrice de Google G du RCI est de taille $N = N_c \times N_p = 227 \times 61 = 13847$, alors que la matrice de Google réduite G_R , qui nous intéresse ici, est de taille $n_r = 27 + 1$. Cette MGR nous renseigne sur les échanges directs et indirects de pétrole entre les 27 pays de l'UE⁴ et par exemple l'un des plus grands fournisseurs d'hydrocarbures de l'Europe, la Russie, l'Arabie Saoudite, ou les USA.

À partir des matrices G_R et G_R^* ,^{5,6} nous pouvons extraire la structure du réseau du commerce du pétrole entre les pays de l'UE et la Russie. La Figure 10.1 (en haut à gauche) montre

4. Nous nous référons aux 27 états membres de l'UE en 2008.

5. La matrice G_R^* est la MGR obtenue à partir de la matrice G^* construite en inversant l'orientation des échanges du RCI.

6. Ces matrices sont illustrées dans Coquidé et al., 2019 Figure 1.

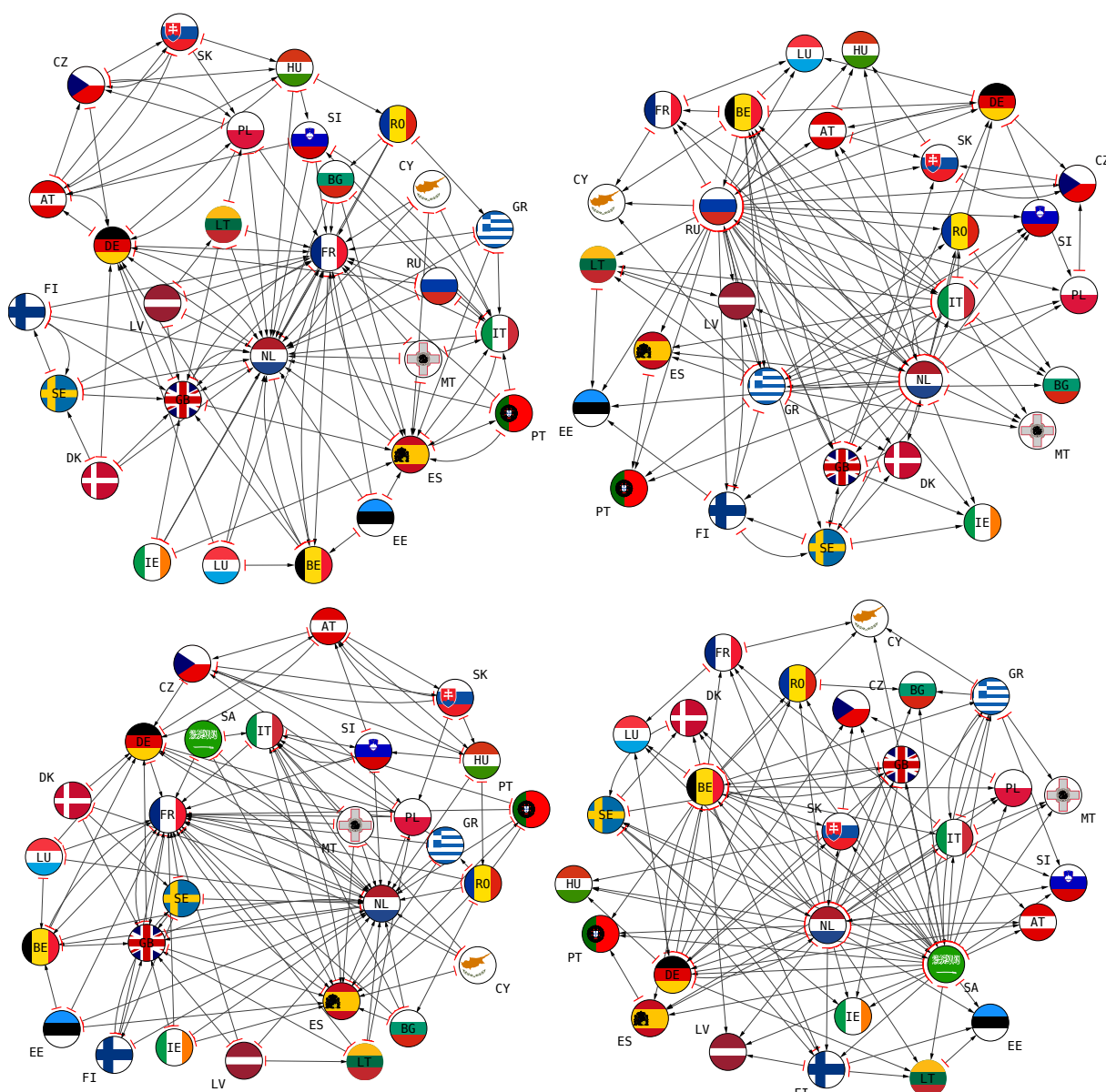


Figure 10.1 – Réseau réduit des importations (à gauche) et des exportations (à droite) de pétrole entre les pays de l'UE et la Russie (en haut) et l'Arabie Saoudite (en bas) en 2016. Les réseaux réduits sont construits à partir de G_R pour l'importation de pétrole (à gauche) et à partir de G_R^* pour l'exportation de pétrole (à droite). L'algorithme de construction d'un réseau réduit est le suivant : pour chaque pays c , nous déterminons les 4 meilleurs importateurs (exportateurs) de pétrole provenant du (vers le) pays c selon G_R (G_R^*). L'orientation des liens donne le sens de l'échange de pétrole. Adapté de Coquidé et al., 2019.

le réseau d'importation de pétrole entre l'EU et la Russie. Les 6 premières économies de l'UE en terme de produit intérieur brut (i.e. l'Allemagne, la Grande Bretagne, la France, l'Italie, l'Espagne, les Pays-Bas en 2016)⁷ sont les principaux importateurs de pétrole, les Pays-Bas et la France étant les plus centraux. Les performances de ces économies sont par conséquent

7. [https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_sovereign_states_in_Europe_by_GDP_\(nominal\)](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_sovereign_states_in_Europe_by_GDP_(nominal))

corrélées à leur capacité à importer de manière efficace du pétrole. Les quatre portes d'entrée européennes, directes ou indirectes, pour le pétrole russe sont l'Allemagne, la France, les Pays-Bas, et l'Italie. Nous remarquons des boucles fermées d'échange de pétrole entre presque tous les couples d'états voisins, e.g. DE-AT, CZ-SK, DE-PL, AT-HU, AT-SK, PT-ES, ES-IT, SE-FI.⁸ La Figure 10.1 (en haut à droite) montre le réseau d'exportation de pétrole entre l'UE et la Russie. Nous retrouvons le fait que la Russie est le premier fournisseur de pétrole de l'UE et que les Pays-Bas sont les premiers exportateurs européens de pétrole (voir Tab. 1 dans Coquidé et al., 2019). À partir des deux réseaux présentés en haut de la Figure 10.1, nous observons que les Pays-Bas sont le principal hub européen d'échange de pétrole. Les exportateurs secondaires de pétrole sont la Grèce, l'Italie, la Belgique, la Grande-Bretagne, la Suède, et l'Allemagne.

Nous construisons aussi les MGRs G_R et G_R^* associées à l'importation et l'exportation de pétrole entre les pays de l'UE et l'Arabie Saoudite (SA). Le réseau d'importation EU+SA est montré à la Figure 10.1 (en bas à gauche), on observe que celui-ci est très similaire au réseau d'importation de pétrole EU+RU (Figure 10.1 en haut à gauche). Ceci illustre la robustesse du marché intérieur de l'UE vis-à-vis de l'importation de pétrole extra-UE. Les portes d'entrée du pétrole saoudien sont principalement la France, l'Italie, l'Espagne, et, les Pays-Bas. La Figure 10.1 (en bas à droite) montre qu'à part l'Arabie Saoudite les principaux exportateurs de pétrole à l'intérieur de l'UE sont les Pays-Bas, la Belgique, l'Allemagne, et la Grèce.

10.3 Sensibilité de la balance commerciale

Le vecteur PageRank caractérisant l'importation, le vecteur CheiRank caractérisant l'exportation, il est naturel de définir la balance commerciale d'un pays c comme

$$B_c = \frac{P_c^* - P_c}{P_c^* + P_c} \quad \text{où} \quad P_c = \sum_{p=1}^{N_p} P_{cp} \text{ et } P_c^* = \sum_{p=1}^{N_p} P_{cp}^*. \quad (10.6)$$

Par ailleurs, on peut définir, pour un pays c , une balance plus traditionnelle à partir des vecteurs ImportRank, $\hat{P}$, et ExportRank, $\hat{P}^*$,

$$\hat{B}_c = \frac{\hat{P}_c^* - \hat{P}_c}{\hat{P}_c^* + \hat{P}_c} \quad \text{où} \quad \hat{P}_c = \sum_{p=1}^{N_p} \hat{P}_{cp} \text{ et } \hat{P}_c^* = \sum_{p=1}^{N_p} \hat{P}_{cp}^*. \quad (10.7)$$

Cette dernière équation est la définition usuelle de la balance commerciale d'un pays consistant à soustraire le volume total importé du volume total exporté.

Les réseaux réduits précédents (Figure 10.1) permettent d'analyser les importations et exportations de pétrole parmi les 27 pays de l'UE et d'analyser quelle est l'influence des principaux exportateurs russes et saoudiens. La MGR à analyser est alors de taille $n_r = 27 + 1$. Afin, de pouvoir étudier l'influence du pétrole, par exemple russe ou saoudien, sur les économies de chacun des pays de l'UE, nous considérons des MGRs G_R et G_R^* de taille $n_r = 61 \times 27 + 1 = 1648$ associées aux échanges des 61 catégories de produits UN COMTRADE entre les 27 pays de l'UE et à l'exportation du pétrole russe, saoudien, ou américain. Cette approche permet de capturer l'influence du commerce du pétrole sur la balance commerciale globale d'un pays de

8. Les codes des pays sont ceux de la norme ISO 3166-1 alpha-2.

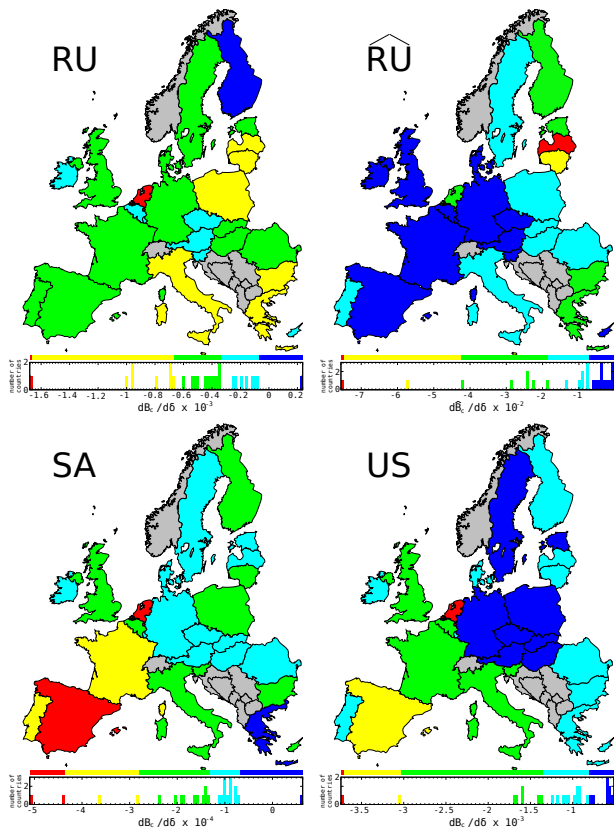


Figure 10.2 – Sensibilité, au sens du PageRank et CheiRank, de la balance commerciale des pays de l'UE à l'augmentation du prix du pétrole russe (en haut à gauche), saoudien (en bas à gauche), et américain (en bas à droite). La sensibilité de la balance commerciale calculée à partir de l'ImportRank et de l'ExportRank est montrée en haut à droite. Les données utilisées sont celles du RCI de 2016. Adaptée de Coquidé et al., 2019.

l'UE. Nous définissons ainsi, $dB_c/d\varepsilon_{c'p}$, la sensibilité de la balance commerciale d'un pays c à l'augmentation infinitésimale du volume ou du prix du produit p provenant du pays c' . Pour calculer cette sensibilité, nous calculons les MGRs $G_R(\varepsilon_{cp,c'p})$ et $G_R^*(\varepsilon_{c'p,cp})$ sur le modèle (7.18). Nous calculons alors $P_c(\varepsilon_{cp,c'p})$ et $P_c^*(\varepsilon_{c'p,cp})$, nous permettant de calculer la différence finie $dB_c/d\varepsilon_{c'p} \simeq (B_c(\varepsilon_{c'p}) - B_c(0))/\varepsilon_{c'p}$. Nous réitérons le calcul pour des valeurs de $\varepsilon_{c'p}$ ⁹ de plus en plus petites jusqu'à obtenir convergence. De même, nous pouvons définir une sensibilité de la balance commerciale, $d\hat{B}_c/d\varepsilon_{c'p}$, au sens de l'ImportRank et de l'ExportRank.

Nous présentons à la Figure 10.2 la sensibilité de la balance commerciale des pays de l'UE à l'importation de pétrole russe, américain, et saoudien en 2016. Le pays le plus sensible au pétrole russe (Figure 10.2 en haut à gauche) est les Pays-Bas qui sont également le premier pays européen dans les classements PageRank, CheiRank, ImportRank, et ExportRank relatifs au pétrole et produits pétroliers (voir Table 1 dans Coquidé et al., 2019). La capacité portuaire des Pays-Bas, ainsi que leur place privilégiée en mer du Nord, font de ce pays le principal hub pétrolier de l'UE, recevant le pétrole de l'extérieur de l'UE et le redistribuant aux états membres. Dans l'ordre, les autres pays les plus sensibles au pétrole russe sont l'Italie, la Grèce, la Bulgarie, la Pologne, la Lituanie, et la Lettonie. Notons que les sensibilités calculées ici, à partir des probabilités PageRank et CheiRank, prennent en compte les chaînes de liens multiples entre les différents pays de l'UE. Les résultats sont complètement différents (Figure 10.2 en haut à droite) si la sensibilité est définie pour la balance calculée à partir des probabilités ImportRank et de ExportRank qui sont usuellement utilisée en économie pour l'analyse du commerce international. Cette description crue, en terme d'Import-Export, indique

9. Tout au long du processus numérique $\varepsilon_{c'p} = \varepsilon_{cp,c'p} = \varepsilon_{c'p,cp}$.

que la Lettonie suivie de la Lituanie, deux républiques de l'ex-URSS ayant gardé des relations économiques étroites avec la Russie, sont les plus sensibles au pétrole russe. De plus, l'analyse en terme d'Import–Export donne un bloc de pays de l'UE de l'ouest presque insensibles au pétrole russe. Les différences drastiques entre l'analyse via la matrice de Google réduite et l'analyse standard Import–Export sont que la première considère les cascades multilatérales des échanges économiques directs et indirects entre deux pays et que la seconde ne considère que l'échange bilatéral direct entre deux pays. L'avantage de l'analyse utilisant la matrice de Google réduite et les algorithmes PageRank et CheiRank est qu'elle permet de capturer les liens économiques complexes et indirects existant forcément entre les acteurs économiques.

La sensibilité des économies des pays de l'UE vis-à-vis du prix du pétrole saoudien et américain est également montrée à la Figure 10.2. Pour le pétrole saoudien et le pétrole américain, les pays dont les économies sont les plus sensibles sont l'Espagne et les Pays-Bas. Cependant, la sensibilité des pays de l'UE au pétrole saoudien est près de 7 fois plus faible que la sensibilité au pétrole américain, et près de 4 fois plus faible que la sensibilité au pétrole russe. Ainsi, par exemple, l'économie allemande est 5 fois plus sensible au pétrole russe qu'au pétrole saoudien. Par contraste, la sensibilité maximale (en valeur absolue) au pétrole américain est près de 2 fois plus forte que la sensibilité maximale au pétrole russe. Les sensibilités de l'économie allemande au pétrole russe et au pétrole américain sont comparables. Notons que la Grèce n'est pas affectée par, et même bénéficie de, l'augmentation du prix du pétrole saoudien. Le même phénomène se produit pour la Finlande bénéficiant de l'augmentation du prix du pétrole russe. Nous observons également un bloc rigide de pays à l'est de l'UE, de la Suède à la Grèce, et des pays baltiques à l'Allemagne, qui sont presque insensibles au pétrole US.

Conclusion

Les méthodes basées sur la matrice de Google constituent des moyens d'analyse génériques des réseaux complexes orientés. Le succès du moteur de recherche Google est en bonne partie dû à la redoutable praticité de l'algorithme PageRank pour classer les pages du WWW. Nous avons utilisé cet algorithme pour classer les articles contenus dans différentes éditions de Wikipédia. Ceci nous a permis d'élaborer le classement mondial des universités selon Wikipédia (WRWU) à partir de 24 éditions linguistiques différentes (~ 17 million d'articles) permettant ainsi de prendre en compte des points de vue culturels variés. Le classement WRWU est similaire à 62% avec le classement ARWU, dit de Shanghai, montrant ainsi sa capacité à comparer l'excellence académique relative des universités. Cependant, le classement WRWU accorde un peu plus d'importance aux universités européennes que le classement ARWU, atténuant, par conséquent, légèrement l'hégémonie des universités anglo-saxonnes qui usuellement transparaît dans les classements académiques mondiaux. L'analyse en fonction de l'année de fondation de chaque université montre que WRWU prend en compte l'importance historique des différentes universités, alors que ARWU semble mesurer les performances académiques immédiates de celles-ci. Il nous a semblé judicieux d'agréger nos résultats sur plusieurs éditions linguistiques afin d'atténuer les spécificités régionales. Par exemple, certaines éditions, comme l'édition en langue hindou ou dans une moindre mesure l'édition en langue allemande, ne citent préférentiellement que les articles des universités enseignant dans la langue de l'édition. Par contraste, l'édition en langue française est l'une des moins *chauvines*. Il n'est pas aisé de trouver une autre base de données ouverte que Wikipédia permettant de faire cette analyse de réseau afin d'en extraire un classement académique. Une possible extension pourrait être de considérer le réseau Wikipédia global en considérant les liens existants entre éditions.

Nous pensons que le classement Wikipédia des universités fournit une évaluation mathématique de l'importance globale des universités, et que celui-ci peut être considéré comme un classement académique complémentaire à ceux déjà existants.

Nous notons que les articles de Wikipédia consacrés aux universités apparaissent usuellement dans les premières lignes de résultats du moteur de recherche Google. Ainsi, la visibilité d'une université peut être publiquement et gratuitement véhiculée. Nous estimons que l'amélioration des articles Wikipédia consacrés à certaines universités peut permettre d'améliorer leur visibilité globale. En particulier, nous avons noté que la visibilité au travers de Wikipédia des universités françaises est particulièrement faible.

Nous avons également mis en lumière les interactions entre les universités vues au travers des éditions Wikipédia en langues anglaises, française, allemande et russe. Les réseaux réduits d'universités permettent de résumer les principales interactions directes et indirectes entre les universités, et entre les universités et les pays du globe.

Les mêmes méthodes ont été mises en œuvre pour étudier l'influence globale des mala-

dies infectieuses. D'après la Global Burden of Disease organisation, [2012](#), les données brutes extraites tout autour du monde à partir des registres civils, des recensements, des registres d'hôpitaux, de police, etc, sont généralement incomplètes, et seules des estimations et tendances, concernant par exemple le nombre de malade ou de morts dus à une maladie, peuvent être obtenues en employant des modèles statistiques. Wikipédia, quant à elle, constitue une base de données cohérente de connaissances à partir de laquelle il est possible d'inférer l'influence globale d'une maladie infectieuse. La méthode basée sur la matrice de Google réduite pourrait être utilisée pour prendre périodiquement des clichés instantanés des réseaux Wikipédia afin de déterminer sur des fenêtre temporelle l'évolution des sensibilités globales des pays aux différentes maladies infectieuses. Bien que probablement intéressants, il n'est pas clair que les résultats d'une telle étude temporelle puisse permettre d'estimer la prévalence en temps réel d'une maladie comme c'est le cas de méthode basées sur l'usage de Wikipédia (McIver et Brownstein, [2014](#)). En effet, la latence dans l'édition d'article peut être beaucoup trop lente pour considérer l'activité des éditeurs comme moyen de mesure d'un pic infectieux.

En biologie moléculaire, les résultats issus des technologies modernes de criblage à haut débit sont de plus en plus présentés sous la forme de réseaux complexes, représentant les relations causales mesurées entre les molécules biologiques. Nous avons montré que les approches globales issues de la matrice de Google, et de la matrice de Google réduite, constituent des outils utiles à l'analyse des réseaux biologiques orientés. Nous montrons que le calcul des probabilités PageRank et CheiRank, et leurs variations dans le cas du cancer, permet d'obtenir des informations sur l'évolution du câblage du réseau biologique soumis à différent contexte biologique. Les algorithmes PageRank et CheiRank permettent de mesurer la centralité d'un élément biologique en prenant en compte les caractéristiques complexes non locales en comparaison avec les indices locaux topologiques tels que le degré de connectivité des nœuds ou le coefficient d'agglomération. Une probabilité PageRank élevée peut correspondre au rôle particulier d'une protéine dans le réseau. L'approche basée sur la matrice de Google réduite n'avait jamais été utilisée pour l'analyse des réseaux biologiques. Nous l'avons appliqué à l'analyse du réseau global orienté des interactions protéine-protéine, en nous concentrant particulièrement sur quelques groupes de protéines correspondant à des fonctions biologiques bien définies (survie cellulaire, prolifération cellulaire). Nous montrons que l'application de l'approche basée sur la matrice de Google réduite permet d'inférer un ensemble d'interactions indirectes permettant de déceler des programmes biologiques spécifiques non reflétés dans la structure des relations directes entre les protéines. Nous montrons aussi que la structure de ces relations cachées peut être modifiée d'un état de santé à l'autre, suggérant l'existence de changements globaux dans le câblage du réseau de protéine durant, par exemple, la cancérogenèse.

Nous avons également analysé le réseau multi-produit du commerce international en mettant particulièrement l'accent sur l'étude de la sensibilité des balances économiques des pays de l'UE vis-à-vis des importations extra-européennes de pétrole et de gaz. Contrairement à l'usuelle analyse bilatérale en terme de balance import-export, l'approche utilisée prend en compte toutes les relations économiques indirectes et non triviales entre les différents pays. En mesurant la balance commerciale PageRank-CheiRank, nous montrons qu'il est possible de mesurer la sensibilité de l'économie d'un pays à l'augmentation, par exemple, du prix du pétrole ou du gaz provenant d'un pays comme, par exemple, la Russie, les USA, ou l'Arabie Saoudite. Nous étudions actuellement comment la description de la balance économique d'un pays en terme de probabilités PageRank-CheiRank permet d'appréhender le phénomène de contagion

lors d'une crise économique. Récemment, une première étude concernant la contagion de crise dans le réseau financier des transactions bitcoin a été menée (Coquidé, Lages et Shepelyansky, [2019a](#)).

Bibliographie

- Al Balushi, A. et al. (2016). « Creutzfeldt–Jakob Disease : Analysis of Four Cases ». *Frontiers in Neurology* 7, p. 138. ISSN : 1664-2295. DOI : [10.3389/fneur.2016.00138](https://doi.org/10.3389/fneur.2016.00138).
- Altbach, P., Reisberg, L. et Rumbley, L. E. (2009). *Trends in Global Higher Education : Tracking an Academic Revolution*. Rapp. tech. A Report Prepared for the UNESCO 2009 World Conference on Higher Education. URL : unesdoc.unesco.org/images/0018/001831/183168e.pdf.
- Armstrong-James, D., Meintjes, G. et Brown, G. D. (2014). « A neglected epidemic : fungal infections in HIV/AIDS ». *Trends in Microbiology* 22.3, p. 120 -127. ISSN : 0966-842X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.tim.2014.01.001>.
- Auma, M. A. et al. (2013). « Malaria is an uncommon cause of adult sepsis in south-western Uganda ». *Malaria Journal* 12.1, p. 146. ISSN : 1475-2875. DOI : [10.1186/1475-2875-12-146](https://doi.org/10.1186/1475-2875-12-146).
- Bardoscia, M., Livan, G. et Marsili, M. (2017). « Statistical mechanics of complex economies ». *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2017.4, p. 043401. DOI : [10.1088/1742-5468/aa6688](https://doi.org/10.1088/1742-5468/aa6688).
- Barigozzi, M., Fagiolo, G. et Garlaschelli, D. (2010). « Multinetwork of international trade : A commodity-specific analysis ». *Phys. Rev. E* 81 (4), p. 046104. DOI : [10.1103/PhysRevE.81.046104](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.046104).
- Beenakker, C. W. J. (1997). « Random-matrix theory of quantum transport ». *Rev. Mod. Phys.* 69 (3), p. 731-808. DOI : [10.1103/RevModPhys.69.731](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.731).
- Bornmann, L., Mutz, R. et Daniel, H.-D. (2013). « Multilevel-statistical reformulation of citation-based university rankings : The Leiden ranking 2011/2012 ». *Journal of the American Society for Information Science and Technology* 64.8, p. 1649-1658. ISSN : 1532-2890. DOI : [10.1002/asi.22857](https://doi.org/10.1002/asi.22857).
- Bouchaud, J.-P. et Potters, M. (2003). *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*. Cambridge University Press. ISBN : 0691152667.
- Brin, S. et Page, L. (1998). « The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine ». *Computer Networks and ISDN Systems* 30.1. Proceedings of the Seventh International World Wide Web Conference, p. 107 -117. ISSN : 0169-7552. DOI : [10.1016/S0169-7552\(98\)00110-X](https://doi.org/10.1016/S0169-7552(98)00110-X).
- Butler, D. (2008). « Publish in Wikipedia or perish ». *Nature*. DOI : [10.1038/news.2008.1312](https://doi.org/10.1038/news.2008.1312).
- Callaway, E. (2010). « No rest for the bio-wikis ». *Nature* 468.7322, p. 359-360. DOI : [10.1038/468359a](https://doi.org/10.1038/468359a).
- CDC (2018). *Bacterial Meningitis*. Accessed Sep. 2018. Centers for Disease Control et Prevention. URL : <https://www.cdc.gov/meningitis/bacterial.html>.

- Chakraborty, A. et al. (août 2018). « Hierarchical communities in the walnut structure of the Japanese production network ». *PLOS ONE* 13.8, p. 1-25. DOI : [10.1371/journal.pone.0202739](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0202739).
- Chepelianskii, A. D. (2010). « Towards physical laws for software architecture ». *arXiv e-prints*, arXiv :1003.5455. URL : <https://arxiv.org/abs/1003.5455>.
- Coquidé, C., Lages, J. et Shepelyansky, D. L. (déc. 2019a). « Contagion in Bitcoin networks ». In : *Proc. 2nd Workshop on Blockchain and Smart Contract Technologies (BSCT, Séville, Espagne, Juin 2009)*. Lecture Notes in Business Information Processing. Berlin, Germany : Springer. URL : <https://arxiv.org/abs/1906.01293>.
- (2019b). « World influence and interactions of universities from Wikipedia networks ». *The European Physical Journal B* 92.1, p. 3. ISSN : 1434-6036. DOI : [10.1140/epjb/e2018-90532-7](https://doi.org/10.1140/epjb/e2018-90532-7).
- Coquidé, C. et al. (2019). « Influence of petroleum and gas trade on EU economies from the reduced Google matrix analysis of UN COMTRADE data ». *Eur. Phys. J. B* 92.8, p. 171. DOI : [10.1140/epjb/e2019-100132-6](https://doi.org/10.1140/epjb/e2019-100132-6).
- De Benedictis, L. et Tajoli, L. (2011). « The World Trade Network ». *The World Economy* 34.8, p. 1417-1454. DOI : [10.1111/j.1467-9701.2011.01360.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-9701.2011.01360.x).
- Diderot, D. et d'Alembert, J. I. R., éd. (1751-1766). *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*.
- Docampo, D. (2011). « On using the Shanghai ranking to assess the research performance of university systems ». *Scientometrics* 86.1, p. 77-92. ISSN : 1588-2861. DOI : [10.1007/s11192-010-0280-y](https://doi.org/10.1007/s11192-010-0280-y).
- Docampo, D. et Cram, L. (2014). « On the internal dynamics of the Shanghai ranking ». *Scientometrics* 98.2, p. 1347-1366. ISSN : 1588-2861. DOI : [10.1007/s11192-013-1143-0](https://doi.org/10.1007/s11192-013-1143-0).
- Dorogovtsev, S. (2010). *Lectures on Complex Networks*. New York, NY, USA : Oxford University Press, Inc. ISBN : 0199548935, 9780199548934. DOI : [10.1093/acprof:oso/9780199548927.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199548927.001.0001).
- Eom, Y.-H. et al. (mar. 2015). « Interactions of Cultures and Top People of Wikipedia from Ranking of 24 Language Editions ». *PLOS ONE* 10.3, p. 1-27. DOI : [10.1371/journal.pone.0114825](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0114825).
- Ermann, L., Frahm, K. M. et Shepelyansky, D. L. (2015). « Google matrix analysis of directed networks ». *Rev. Mod. Phys.* 87 (4), p. 1261-1310. DOI : [10.1103/RevModPhys.87.1261](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.1261).
- (2016). « Google matrix ». *Scholarpedia* 11.11. revision #187113, p. 30944. DOI : [10.4249/scholarpedia.30944](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.30944).
- Ermann, L. et Shepelyansky, D. L. (2015). « Google matrix analysis of the multiproduct world trade network ». *Eur. Phys. J. B* 88.4, p. 84. DOI : [10.1140/epjb/e2015-60047-0](https://doi.org/10.1140/epjb/e2015-60047-0).
- Fagiolo, G., Reyes, J. et Schiavo, S. (2009). « World-trade web : Topological properties, dynamics, and evolution ». *Phys. Rev. E* 79 (3), p. 036115. DOI : [10.1103/PhysRevE.79.036115](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.036115).
- (2010). « The evolution of the world trade web : a weighted-network analysis ». *Journal of Evolutionary Economics* 20.4, p. 479-514. URL : <https://EconPapers.repec.org/RePEc:spr:joevec:v:20:y:2010:i:4:p:479-514>.
- Frahm, K. M. et Shepelyansky, D. L. (2016). « Reduced Google matrix ». *arXiv e-prints*.

- Frahm, K. M., Jaffrès-Runser, K. et Shepelyansky, D. L. (2016). « Wikipedia mining of hidden links between political leaders ». *The European Physical Journal B* 89.12, p. 269. ISSN : 1434-6036. DOI : [10.1140/epjb/e2016-70526-3](https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-70526-3).
- Frahm, K. M. et al. (2017). « Multi-cultural Wikipedia mining of geopolitics interactions leveraging reduced Google matrix analysis ». *Physics Letters A* 381.33, p. 2677 -2685. ISSN : 0375-9601. DOI : [10.1016/j.physleta.2017.06.021](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.06.021).
- Giles, J. (déc. 2005). « Internet encyclopaedias go head to head ». *Nature* 438, p. 900-901. DOI : [10.1038/438900a](https://doi.org/10.1038/438900a).
- Gill, O. N. et al. (2013). « Prevalent abnormal prion protein in human appendixes after bovine spongiform encephalopathy epizootic : large scale survey ». *BMJ* 347. DOI : [10.1136/bmj.f5675](https://doi.org/10.1136/bmj.f5675).
- Global Burden of Disease organisation (2012). « Global and regional mortality from 235 causes of death for 20 age groups in 1990 and 2010 : a systematic analysis for the Global Burden of Disease Study 2010 ». *The Lancet* 380.9859, p. 2095 -2128. URL : [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(12\)61728-0](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(12)61728-0).
- Guhr, T., Müller-Groeling, A. et Weidenmüller, H. A. (1998). « Random-matrix theories in quantum physics : common concepts ». *Physics Reports* 299.4, p. 189 -425. ISSN : 0370-1573. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(97\)00088-4](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(97)00088-4).
- Hazelkorn, E. (2015). *Rankings and the Reshaping of Higher Education*. Palgrave Macmillan UK. DOI : [10.1057/9781137446671](https://doi.org/10.1057/9781137446671).
- He, J. et Deem, M. W. (2010). « Structure and Response in the World Trade Network ». *Phys. Rev. Lett.* 105 (19), p. 198701. DOI : [10.1103/PhysRevLett.105.198701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.198701).
- Inconnu (1890). « LEPROSY AND SYPHILIS ». *The Lancet* 135.3487. Originally published as Volume 1, Issue 3487, p. 1436. ISSN : 0140-6736. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(02\)19200-2](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(02)19200-2).
- (1899). « Syphilis and leprosy ». *Journal of the American Medical Association* XXXIII.17, p. 1048-1049. DOI : [10.1001/jama.1899.02450690052009](https://doi.org/10.1001/jama.1899.02450690052009).
- Jöns, H. et Hoyler, M. (2013). « Global geographies of higher education : The perspective of world university rankings ». *Geoforum* 46, p. 45. URL : <https://doi.org/10.1016/j.geoforum.2012.12.014>.
- Karp, G. et al. (2009). « Syphilis and HIV co-infection ». *European Journal of Internal Medicine* 20.1, p. 9 -13. ISSN : 0953-6205. DOI : [10.1016/j.ejim.2008.04.002](https://doi.org/10.1016/j.ejim.2008.04.002).
- Kwan, C. K. et Ernst, J. D. (2011). « HIV and Tuberculosis : a Deadly Human Syndemic ». *Clinical Microbiology Reviews* 24.2, p. 351-376. ISSN : 0893-8512. DOI : [10.1128/CMR.00042-10](https://doi.org/10.1128/CMR.00042-10).
- Lages, J., Patt, A. et Shepelyansky, D. L. (2016). « Wikipedia ranking of world universities ». *The European Physical Journal B* 89.3, p. 69. ISSN : 1434-6036. DOI : [10.1140/epjb/e2016-60922-0](https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-60922-0).
- Lages, J., Shepelyansky, D. L. et Zinovyev, A. (jan. 2018). « Inferring hidden causal relations between pathway members using reduced Google matrix of directed biological networks ». *PLOS ONE* 13.1, p. 1-28. DOI : [10.1371/journal.pone.0190812](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0190812).
- Langville, A. N. et Meyer, C. D. (2012). *Google's PageRank and Beyond : The Science of Search Engine Rankings*. Princeton University Press. ISBN : 0691152667.
- Liberski, P. P. et Ironside, J. W. (2015). « Chapter 23 - Prion Diseases ». In : *Neurobiology of Brain Disorders*. Sous la dir. de M. J. Zigmond, L. P. Rowland et J. T. Coyle. San Diego :

- Academic Press, p. 356 -374. ISBN : 978-0-12-398270-4. DOI : <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-398270-4.00023-9>.
- Mahaux, C. et Weidenmüller, H. A. (1968). « Comparison between the *R*-Matrix and Eigenchannel Methods ». *Phys. Rev.* 170 (4), p. 847-856. DOI : [10.1103/PhysRev.170.847](https://doi.org/10.1103/PhysRev.170.847).
- Markov, A. A. (1906). « Rasprostranenie zakona bol'shih chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga ». *Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete (in Russian)* 15 (2-ya seriya), p. 135.
- (2007). « Extension of the limit theorems of probability theory to a sum of variables connected in a chain ». In : article de 1906 reproduit et traduit dans l'appendice B de *Dynamic Probabilistic Systems : Markov models*, R. A. Howard. Dover Publisher.
- McIver, D. J. et Brownstein, J. S. (avr. 2014). « Wikipedia Usage Estimates Prevalence of Influenza-Like Illness in the United States in Near Real-Time ». *PLOS Computational Biology* 10.4, p. 1-8. DOI : [10.1371/journal.pcbi.1003581](https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1003581).
- Münnix, M. C., Schäfer, R. et Guhr, T. (mai 2014). « A Random Matrix Approach to Credit Risk ». *PLOS ONE* 9.5, p. 1-9. DOI : [10.1371/journal.pone.0098030](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0098030).
- Nielsen, F. Å. (2012). « Wikipedia Research and Tools : Review and Comments ». *SSRN Electronic Journal*. DOI : [10.2139/ssrn.2129874](https://doi.org/10.2139/ssrn.2129874).
- Pappas, P. G. et al. (2018). « Invasive candidiasis ». *Nature Reviews Disease Primers* 4. Primer, 18026 EP -. URL : <http://dx.doi.org/10.1038/nrdp.2018.26>.
- Pawlowski, A. et al. (fév. 2012). « Tuberculosis and HIV Co-Infection ». *PLOS Pathogens* 8.2, p. 1-7. DOI : [10.1371/journal.ppat.1002464](https://doi.org/10.1371/journal.ppat.1002464).
- Rauhvargers, A. (2013). *Global University Rankings and Their Impact : Report II*. European University Association. ISBN : 9789078997412. URL : <http://www.eua.be>.
- Rollin, G., Lages, J. et Shepelyansky, D. L. (2019). « World Influence of Infectious Diseases From Wikipedia Network Analysis ». *IEEE Access* 7, p. 26073-26087. ISSN : 2169-3536. DOI : [10.1109/ACCESS.2019.2899339](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2899339).
- Rollin, G., Lages, J. et Shepelyansky, D. (2018). *Wiki4InfectiousDiseases : Wikipedia network of infectious diseases*. Accessed Aug. 2019. URL : <http://doi.org/10.25666/DATAOSU-2019-01-10-02>.
- Serrano, M. Á., Boguñá, M. et Vespignani, A. (2007). « Patterns of dominant flows in the world trade web ». *Journal of Economic Interaction and Coordination* 2.2, p. 111-124. ISSN : 1860-7128. DOI : [10.1007/s11403-007-0026-y](https://doi.org/10.1007/s11403-007-0026-y).
- Shane, A. L. (2006). *Red Book : 2006 Report of the Committee on Infectious Diseases, 27th Edition*. T. 12. 12. CDC, p. 2003. DOI : [10.3201/eid1212.061045](https://doi.org/10.3201/eid1212.061045).
- Sikorska, B. et Liberski, P. P. (2012). « Human Prion Diseases : From Kuru to Variant Creutzfeldt-Jakob Disease ». In : *Protein Aggregation and Fibrillogenesis in Cerebral and Systemic Amyloid Disease*. Sous la dir. de J. R. Harris. Dordrecht : Springer Netherlands, p. 457-496. ISBN : 978-94-007-5416-4. DOI : [10.1007/978-94-007-5416-4_17](https://doi.org/10.1007/978-94-007-5416-4_17).
- Sokolov, V. et Zelevinsky, V. (1989). « Dynamics and statistics of unstable quantum states ». *Nuclear Physics A* 504.3, p. 562 -588. ISSN : 0375-9474. DOI : [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(89\)90558-7](https://doi.org/10.1016/0375-9474(89)90558-7).
- WHO (2018). *Global Health Observatory data repository*. Accessed Aug. 2018. World Health Organization. URL : <http://apps.who.int/gho/data/node.home>.
- Wikipedia (2018a). *Immunocompetence*. Accessed Sep. 2018. URL : <https://en.wikipedia.org/wiki/Immunocompetence>.

- (2018b). *Mycobacterium*. Accessed Sep. 2018. URL : <https://en.wikipedia.org/wiki/Mycobacterium>.
 - (2018c). *Waterborne diseases*. Accessed Sep. 2018. URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Waterborne_diseases.
- Zhirov, A. O., Zhirov, O. V. et Shepelyansky, D. L. (2010). « Two-dimensional ranking of Wikipedia articles ». *The European Physical Journal B* 77.4, p. 523-531. ISSN : 1434-6036. DOI : [10.1140/epjb/e2010-10500-7](https://doi.org/10.1140/epjb/e2010-10500-7).