

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II



Mémoire de D.E.A.

présenté dans le cadre de la formation doctorale
D.E.A. Concepts et Méthodes de la Physique

SYSTÈMES INTÉGRABLES

par

LAGES JOSÉ

Mémoire soutenu le lundi 29 juin 1998 devant le jury composé de :

Président du jury :	Mr C. Jouanin	G.E.S.
Rapporteurs :	Mr M. Capdequi Peyranère	L.P.M.
	Mr M. Cuer	L.P.M.
Directeur de Mémoire :	Mr A. Neveu	L.P.M.

SYSTÈMES INTÉGRABLES

LAGES JOSÉ

Table des matières

Introduction	iii
I Introduction aux Systèmes Intégrables par l'étude de l'équation de Schrödinger Nonlinéaire	1
1 Définition du modèle N.S.	2
1.1 Crochets de Poisson	2
1.2 Intégrales du mouvement	3
2 Représentation (U, V) du modèle N.S.	6
2.1 Condition de courbure nulle	6
2.2 Condition de courbure nulle pour N.S.	11
3 Propriétés de la matrice de transfert	12
4 Intégrales du mouvement	15
5 Formulation Hamiltonienne du modèle N.S.	22
5.1 Matrice r et crochets de Poisson fondamentaux	22
5.2 Involution des intégrales du mouvement	26
5.3 Equation Hamiltonienne du mouvement	28
6 Linéarisation de l'équation du mouvement	30
6.1 Matrice de transfert réduite	30
6.2 Données spectrales discrètes	33
6.3 Variables angle-action	37
6.4 Intégrales du mouvement	39
A Involution de \mathcal{N}, \mathcal{P} et \mathcal{H}	41
B Condition de compatibilité pour N.S.	44
II Etude d'autres modèles classiques intégrables continus et discrets	46
3 Modèles intégrables continus	48
3.1 Modèle de Heisenberg	48
3.1.1 Equation du mouvement	48
3.1.2 Représentation (U, V) du modèle de Heisenberg	49
3.1.3 Formulation Hamiltonienne du modèle de Heisenberg	50

3.1.4	Equivalence de jauge entre le modèle de Heisenberg et le modèle de Schrödinger Nonlinéaire	51
3.2	Modèle de sine-Gordon	53
3.2.1	Equation du mouvement	53
3.2.2	Représentation (U, V) du modèle de sine-Gordon	54
3.2.3	Formulation Hamiltonienne du modèle S.G.	55
4	Modèles intégrables discrets	57
4.1	Modèle discret de Heisenberg	58
4.2	Modèle de Toda	63
4.3	Modèle de Volterra	63
III	Systèmes Intégrables Quantiques	65
5	Relations fondamentales de commutation et matrice \mathcal{R}	67
5.1	Matrice \mathcal{R}	67
5.2	Limite Classique/Quantique	69
6	Chaîne de spins quantiques	71
6.1	Matrice $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$	71
6.2	Quantités conservées : Hamiltonien	72
	Quelques mots de conclusion ...	75
	Bibliographie	76

Introduction

Ce modeste ouvrage consacré aux systèmes intégrables a pour origine une série de cours donnés par André Neveu [15] au laboratoire de Physique Mathématique de Montpellier.

Un système est dit intégrable [14] si pour celui-ci, on peut trouver autant d'intégrales du mouvement que de degrés de liberté. De plus, il faut que l'une d'entre elles soit la fonctionnelle donnant l'énergie du système, à savoir le Hamiltonien, et qu'elles soient toutes en involution deux à deux vis-à-vis des crochets de Poisson relatifs au système (c'est-à-dire qu'elles aient entre elles un crochet de Poisson nul).

Les intégrales du mouvement jouent toutefois des rôles inégaux entre elles. Il en existe, comme le Hamiltonien, qui traduisent, pour un système donné, des invariances de symétries (par translation temporelle, translation ou rotation spatiale,...) qui impliquent la conservation dans le temps de certaines quantités physiques comme l'énergie (Hamiltonien), la quantité de mouvement totale, le moment angulaire total, le nombre de particules, etc. Il en existe d'autres qui sont quant à elles des constantes sans significations physiques particulières.

Un des intérêts de l'intégrabilité est que l'on a la certitude que l'on peut linéariser l'équation du mouvement du système étudié en trouvant des variables angle-action canoniquement conjuguées

$$(p_j, q_j)_{j=1, \dots, N} \longrightarrow (\rho_j, \theta_j)_{j=1, \dots, N}$$

telles que

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_j}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\{\rho_i\})}{\partial \theta_j} = 0 \\ \Rightarrow \rho_j(t) &= \rho_j(0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_j}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}(\{\rho_i\})}{\partial \rho_j} \\ \Rightarrow \theta_j(t) &= \mathcal{H}_{\rho_j}(\rho)t + \theta_j(0) \end{aligned}$$

ce qui simplifie énormément la dynamique du système.

Dans ce travail, nous avons commencé par présenter un formalisme commode pour étudier l'intégrabilité des systèmes classiques en étudiant assez largement le modèle de Schrödinger Nonlinéaire (partie I). Ce formalisme, emprunté de la théorie de la transformée inverse spectrale, est essentiellement celui utilisé par L.D. Faddeev [1, 2, 3, 4, 5, 6] et il nous permet, à partir d'une paire de Lax (U, V) (chapitre I.2) représentant le système étudié, de trouver des crochets de Poisson fondamentaux (chapitre I.5), traduisant les seize crochets de Poisson

entre les différents éléments de la matrice U , et d'en déduire par la suite une fonctionnelle génératrice de toutes les quantités conservées du système. Ces intégrales du mouvement sont en involution entre elles (paragraphe I.5.2) et assurent donc la complète intégrabilité et la possible linéarisation de l'équation du mouvement du modèle de Schrödinger Nonlinéaire (chapitre I.6).

Nous avons ensuite porté le formalisme et les méthodes utilisées pour le modèle de Schrödinger Nonlinéaire aux cas d'autres systèmes (partie II) tels que le modèle de Heisenberg ou celui de sine-Gordon. On a également constaté brièvement qu'il existe une certaine équivalence de Jauge (paragraphe II.3.1.4) entre différents modèles (N.S. et Heisenberg) traduisant le fait qu'il existe différentes classes d'équivalence de systèmes intégrables (modèles rationnels, trigonométriques ou elliptiques). Puis les méthodes utilisées jusqu'à lors ont été discrétisées (chapitre II.4) pour pouvoir traiter les systèmes intégrables classiques discrets.

Finalement, nous terminons ce travail sur une brève incursion dans le domaine quantique (partie III) où nous montrons comment "quantifier" le formalisme utilisé pour pouvoir traiter les systèmes intégrables quantiques [10, 11].

Première partie

**Introduction aux Systèmes
Intégrables par l'étude de
l'équation de Schrödinger
Nonlinéaire**

Chapitre 1

Définition du modèle de Schrödinger Nonlinéaire

Le modèle classique de Schrödinger Nonlinéaire (N.S.) est la description d'un champ scalaire $\psi(x, t)$ par l'équation nonlinéaire

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2g|\psi|^2\psi \quad (1.1)$$

avec $\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x)$.

$\psi(x, t)$ est un champ classique à valeurs dans \mathbb{C} , la variable d'espace x parcourt la ligne réelle $-\infty \leq x \leq \infty$. Le paramètre g est une constante de couplage.

Pour $g = 0$, l'équation (1.1) devient linéaire et ressemble à l'équation Quantique de Schrödinger pour une particule de masse $m = \frac{1}{2}$. D'où l'appellation abusive dont elle est victime.

Introduisons à présent des crochets de Poisson relatifs aux champs $\psi(x)$ et $\psi^*(x)$.

1.1 Crochets de Poisson

Définissons l'espace des phases Π dont les coordonnées complexes sont données par les paires de fonctions $(\psi(x, t), \psi^*(x, t))$. Soit alors $F(\psi, \psi^*)$ une fonctionnelle complexe de $\psi(x, t)$ et $\psi^*(x, t)$ définie sur Π . Ainsi, suite à une variation

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi(x) + \delta\psi(x) \\ \psi^*(x) &\rightarrow \psi^*(x) + \delta\psi^*(x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

on définit la variation de $F(\psi, \psi^*)$ par :

$$\begin{aligned} \delta F(\psi, \psi^*) &= F(\psi + \delta\psi, \psi^* + \delta\psi^*) - F(\psi, \psi^*) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta F}{\delta\psi(x)} \delta\psi(x) + \frac{\delta F}{\delta\psi^*(x)} \delta\psi^*(x) \right) dx \end{aligned} \quad (1.3)$$

où $\frac{\delta F}{\delta\psi(x)}$ et $\frac{\delta F}{\delta\psi^*(x)}$ sont les dérivées fonctionnelles de F par rapport respectivement à $\psi(x)$ et $\psi^*(x)$.

Ainsi grâce à ces dérivées fonctionnelles, définissons des crochets de Poisson

agissant sur les fonctionnelles $F(\psi, \psi^*)$ de l'espace des phases Π

$$\{F, G\} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\delta G}{\delta \psi^*(x)} - \frac{\delta F}{\delta \psi^*(x)} \frac{\delta G}{\delta \psi(x)} \right) dx \quad (1.4)$$

dont les propriétés inhérentes sont :

- **l'antisymétrie**

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad (1.5)$$

et

- **l'identité de Jacobi**

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \quad (1.6)$$

On peut également considérer $\psi(x)$ et $\psi^*(x)$ comme des fonctionnelles triviales sur Π , ainsi on a :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \psi(x)}{\delta \psi(y)} &= \delta(x-y) & \frac{\delta \psi^*(x)}{\delta \psi^*(y)} &= \delta(x-y) \\ \frac{\delta \psi(x)}{\delta \psi^*(y)} &= \frac{\delta \psi^*(x)}{\delta \psi(y)} & &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

et donc utilisant (1.7) dans (1.4) on obtient les crochets de Poisson entre ψ et ψ^*

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = \{\psi^*(x), \psi^*(y)\} = 0$$

et (1.8)

$$\{\psi(x), \psi^*(y)\} = i\delta(x-y).$$

D'autre part de (1.4) il vient :

$$\frac{\delta F}{\delta \psi(x)} = -i \{F, \psi^*(x)\}$$

et (1.9)

$$\frac{\delta F}{\delta \psi^*(x)} = i \{F, \psi(x)\}.$$

On peut donc remarquer de (1.9) que ces crochets de Poisson induisent sur l'espace des phases Π une structure symplectique.

1.2 Intégrales du mouvement

On peut de plus considérer les observables du système comme des fonctionnelles sur Π à valeur dans l'ensemble des réels \mathbb{R} . Certaines d'entre elles sont des génératrices de groupes de transformations à un paramètre. L'observable principale est le hamiltonien \mathcal{H} défini tel que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \{\mathcal{H}, \psi\} = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi^*} \\ \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= \{\mathcal{H}, \psi^*\} = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi} \end{aligned} \quad (1.10)$$

et qui est le générateur des translations dans le temps. En effet, si on écrit explicitement $\frac{dF}{dt}$ pour une observable quelconque à l'aide de (1.10), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \psi^*(x)} \frac{\partial \psi^*(x)}{\partial t} \right) dx \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta F}{\delta \psi(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\partial \psi^*(x)} - \frac{\delta F}{\delta \psi^*(x)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\partial \psi(x)} \right) dx \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{dF}{dt} = \{\mathcal{H}, F\}. \quad (1.12)$$

Le hamiltonien dont l'équation du mouvement est l'équation de Schrödinger Nonlinéaire s'écrit

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi_x|^2 + g|\psi|^4) dx. \quad (1.13)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \psi_t(y, t) &= \{\mathcal{H}, \psi(y, t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\{\psi_x(x, t) \psi_x^*(x, t), \psi(y, t)\} \\ &\quad + g \{\psi^*(x, t) \psi^*(x, t) \psi(x, t) \psi(x, t), \psi(y, t)\}) \\ &= (-i) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_x(x, t) \delta'(x - y) \\ &\quad - 2ig \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x, t)|^2 \psi(x, t) \delta(x - y) \end{aligned} \quad (1.14)$$

or au sens des distribution* $\langle \delta', \phi \rangle = -\langle \delta, \phi' \rangle$, et donc (1.14) devient

$$\psi_t(y, t) = i \psi_{yy}(y, t) - 2ig |\psi(y, t)|^2 \psi(y, t)$$

équation qui est bien l'équation de Schrödinger Nonlinéaire (1.1).

Comme \mathcal{H} , les observables que sont la quantité de mouvement

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \psi^*(x) - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi(x) \right) \quad (1.15)$$

et le "nombre de particule" ou "charge"

$$\mathcal{N} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx \quad (1.16)$$

*En définissant $\langle a, b \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx a(x)b(x)$ où a est une distribution et b une fonction.

sont aussi génératrices d'un groupe de transformation. \mathcal{P} est le générateur des translations spatiales

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x+a) \quad (1.17)$$

et \mathcal{N} est le générateur d'un changement de phase

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\phi} \psi(x). \quad (1.18)$$

De plus, on peut vérifier (voir annexe A) que ces quantités \mathcal{H} , \mathcal{P} et \mathcal{N} sont en involution par rapport aux crochets de Poisson que l'on a défini en (1.4).

En fait, il existe pour N.S. une infinité de quantités conservées, comme on le verra dans les chapitres ultérieurs, qui confère ainsi à ce modèle une complète intégrabilité.

Chapitre 2

Représentation (U, V) du modèle N.S.

Nous allons définir dans ce chapitre une représentation matricielle de l'équation de Schrödinger Nonlinéaire basée sur la définition d'une paire de Lax (U, V) .

2.1 Condition de courbure nulle

Soit deux matrices 2×2 $U(x, t)$ et $V(x, t)$ définissant une paire de Lax et un vecteur $F(x, t)$ tels que

$$\begin{aligned} \partial_x F(x, t) &= U(x, t) F(x, t) \\ &\text{et} \\ \partial_t F(x, t) &= V(x, t) F(x, t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si l'on définit une dérivée covariante de la manière suivante,

$$D = \begin{pmatrix} I\partial_t - V(x, t) \\ I\partial_x - U(x, t) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

alors de (2.1) on a

$$D^\mu F(x, t) = 0 \quad \mu = 0, 1 \tag{2.3}$$

ce qui implique que $F(x, t)$ est un vecteur constant vis-à-vis de la dérivée covariante D . Le couple (U, V) peut être alors interprété comme une connexion locale de l'espace-temps (x, t) .

En imposant une courbure nulle à l'espace fibré de notre espace-temps, on écrit, quelque soit $F(x, t)$,

$$\begin{aligned} D^0 D^1 F(x, t) &= D^1 D^0 F(x, t) \\ (I\partial_t - V)(I\partial_x - U)F &= (I\partial_x - U)(I\partial_t - V)F \\ (U_t - V_x + [U, V])F &= 0 \quad \forall F \end{aligned}$$

ce qui nous donne la condition de compatibilité

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \tag{2.4}$$

Nous verrons comment un système régi par l'équation de Schrödinger nonlinéaire N.S. ou par d'autres équations intégrables peut être étudié grâce à un

bon choix de matrice $U(x, t, \lambda)$ et à un bon choix de matrice $V(x, t, \lambda)$ compatible avec $U(x, t, \lambda)$ au sens de (2.4). Et ceci quelque soit le paramètre spectral λ additionnel qui nous servira entre autre pour les développements en perturbations. Si on impose une dépendance explicite en λ de U et V , on verra apparaître pour les éléments de matrice du membre de gauche de l'équation (2.4) des polynômes en λ . Chaque coefficient de chaque monôme devra alors s'annuler.

Si à présent on effectue un changement de jauge

$$F(x, t, \lambda) \rightarrow G(x, t, \lambda) F(x, t, \lambda) \quad (2.5)$$

les matrices de connexion (U, V) se transforment de la façon suivante

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \frac{\partial G}{\partial x} G^{-1} + GUG^{-1} \\ V &\rightarrow \frac{\partial G}{\partial x} G^{-1} + GVG^{-1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Bien entendu, sous cette transformation de jauge, la condition de courbure nulle reste inchangée.

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = I\partial_\mu - (\partial_\mu G)G^{-1} - GU_\mu G^{-1} \quad (2.7)$$

$$D'_\mu F' = D'_\mu (GF) = G(\partial_\mu F - U_\mu F) = GD_\mu F = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{ici } U_\mu = \begin{pmatrix} V & \text{si } \mu = 0 \\ U & \text{si } \mu = 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

ainsi la dérivée covariante se transforme comme le champs lui-même

$$D'_\mu F' = GD_\mu F = 0. \quad (2.10)$$

Ainsi cette manière de caractériser un problème du type (2.1) par cette condition de courbure nulle est valide pour toute une classe de connexions (U, V) semblables au sens d'une transformation de jauge. En d'autres termes, il n'existe pas qu'une seule paire (U, V) pour caractériser un problème. Il en existe d'autres qui sont équivalentes.

Définissons maintenant Ω_γ le transport induit par la connexion (U, V) suivant le lacet γ de \mathbb{R}^2 allant du point (x_0, t_0) au point (x, t) :

$$\Omega_\gamma = \widehat{\exp} \left(\int_\gamma U dx + V dt \right) \quad (2.11)$$

où $\widehat{\exp}$ est ce que l'on appelle une exponentielle ordonnée. Si à présent on partitionne le lacet en N morceaux $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, on peut définir la matrice de transport locale

$$L_n = I + \int_{\gamma_n} U dx + V dt \quad (2.12)$$

telle que

$$\Omega_N = \prod_{n=1}^N L_n = L_N \dots L_1 \quad (2.13)$$

où par définition Ω_γ est la limite de Ω_N pour une partition du lacet infiniment dense c'est-à-dire pour $N \rightarrow \infty$.

Ainsi le transport du vecteur F obéissant à (2.1) le long du chemin γ est donné par

$$F_\gamma = \Omega_\gamma F. \quad (2.14)$$

On a de plus, la propriété de superposition

$$\Omega_{\gamma_1 + \gamma_2} = \Omega_{\gamma_2} \Omega_{\gamma_1} \quad (2.15)$$

où $\gamma_1 + \gamma_2$ est le lacet ordonné construit avec la réunion de γ_1 puis de γ_2 , la "fin" de γ_1 étant le "début" du lacet γ_2 .

Sous une transformation de jauge (2.5) Ω_γ se transforme de la manière suivante

$$\Omega_\gamma \rightarrow G(x, t) \Omega_\gamma G^{-1}(x_0, t_0) \quad (2.16)$$

Le fait que la courbure soit nulle implique qu'il n'est pas nécessaire de savoir par quels points passe le lacet γ dans \mathbb{R}^2 et que l'on a uniquement besoin de connaître ses extrémités (x_0, t_0) et (x, t)

$$F(x, t) = \Omega_\gamma F(x_0, t_0). \quad (2.17)$$

On peut montrer que le transport Ω_γ obéit comme $F(x, t)$ à l'équation (2.1), en effet

$$(\partial_x - U) F(x, t) = (\partial_x - U) \Omega_\gamma F(x_0, t_0) = (\partial_x \Omega_\gamma - U \Omega_\gamma) F(x_0, t_0) = 0$$

par conséquent on a pour l'équation spatiale

$$\partial_x \Omega_\gamma = U \Omega_\gamma \quad (2.18)$$

et de même on trouve pour l'équation temporelle

$$\partial_t \Omega_\gamma = V \Omega_\gamma. \quad (2.19)$$

A noter que, puisque localement la courbure de l'espace est nulle, un chemin fermé γ implique

$$\Omega_\gamma = I. \quad (2.20)$$

A présent, nous allons voir que les équations que l'on peut mettre sous la forme d'une représentation à courbure nulle dépendant d'un paramètre possèdent une infinité d'intégrales du mouvement, c'est-à-dire des quantités qui se conservent au cours du temps.

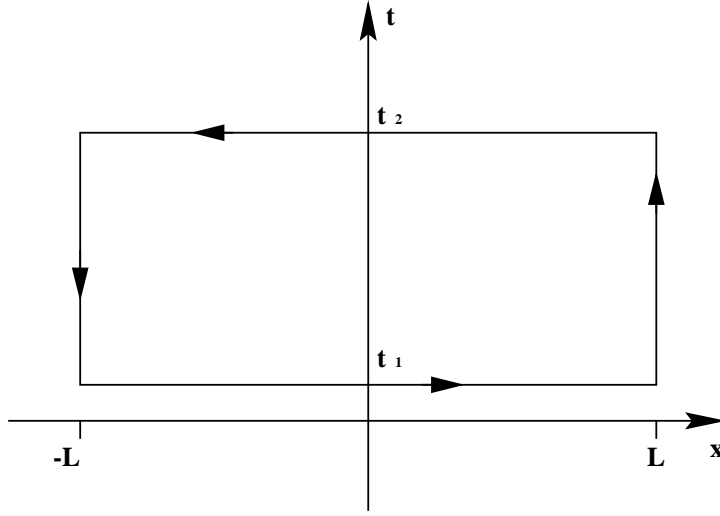
Plaçons nous sur la ligne réelle dans des conditions quasipériodiques, à savoir

$$\begin{aligned} U(x + 2L, t, \lambda) &= Q^{-1}(\theta) U(x, t, \lambda) Q(\theta) \\ V(x + 2L, t, \lambda) &= Q^{-1}(\theta) V(x, t, \lambda) Q(\theta) \end{aligned} \quad (2.21)$$

où $Q(\theta) = \exp(i\frac{\theta}{2}\sigma_3) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$. On peut constater que le cas correspondant à une limite périodique est donné pour $\theta = 4n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Définissons alors la matrice de transfert T_L qui est la matrice de transport le long du contour orienté $\{-L \leq x \leq L, t = t_0\}$

$$T_L(\lambda, t_0) = \widehat{\exp} \left(\int_{-L}^{+L} U(x, t_0, \lambda) dx \right). \quad (2.22)$$

FIG. 2.1 – contour γ

Prenons à présent le contour γ défini comme sur la figure (FIG. 2.1). En vertu de (2.20) et de la propriété de superposition (2.15), nous pouvons écrire pour ce lacet γ

$$I = S_-^{-1}(\lambda, t_1, t_2) T_L^{-1}(\lambda, t_2) S_+(\lambda, t_1, t_2) T_L(\lambda, t_1) \quad (2.23)$$

où

$$S_{\pm}(\lambda, t_1, t_2) = \widehat{\exp} \left(\int_{t_1}^{t_2} V(\pm L, t, \lambda) dt \right). \quad (2.24)$$

Montrons alors que S_+ et S_- sont semblables c'est-à-dire que $S_+ = P^{-1}SP$ où P est une matrice inversible. Pour cela écrivons

$$\begin{aligned} S_+(\lambda, t_1, t_2) &= \widehat{\exp} \left(\int_{t_1}^{t_2} V(-L + 2L, t, \lambda) dt \right) \\ &= \widehat{\exp} \left(Q^{-1}(\theta) \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} V(-L, t, \lambda) dt}_W Q(\theta) \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} S_+(\lambda, t_1, t_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Q^{-1}WQ)^n}{n!} \\ &= Q^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{W^n}{n!} \right) Q \end{aligned} \quad (2.26)$$

ainsi,

$$S_+(\lambda, t_1, t_2) = Q^{-1}(\theta) S_-(\lambda, t_1, t_2) Q(\theta). \quad (2.27)$$

Par conséquent en vertu de (2.23) et (2.27),

$$\begin{aligned} T_L(\lambda, t_2) S_-(\lambda, t_1, t_2) &= S_+(\lambda, t_1, t_2) T_L(\lambda, t_1) \\ T_L(\lambda, t_2) Q(\theta) S_+(\lambda, t_1, t_2) Q^{-1}(\theta) &= S_+(\lambda, t_1, t_2) T_L(\lambda, t_1) \end{aligned}$$

$$T_L(\lambda, t_2) Q(\theta) = S_+(\lambda, t_1, t_2) T_L(\lambda, t_1) Q(\theta) S_+^{-1}(\lambda, t_1, t_2)$$

on constate que $T_L(\lambda, t_2) Q(\theta)$ et $T_L(\lambda, t_1) Q(\theta)$ sont semblables et que de ce fait

$$\text{tr}(T_L(\lambda, t_2) Q(\theta)) = \text{tr}(T_L(\lambda, t_1) Q(\theta)) \quad \forall (t_1, t_2). \quad (2.28)$$

Ainsi, la trace est indépendante du temps et $F_L(\lambda) = \text{tr}(T_L(\lambda, t) Q(\theta))$ est donc une fonctionnelle pouvant générer les intégrales du mouvement. Nous verrons dans les prochains chapitres comment extraire de cette fonctionnelle des quantités conservées comme le nombre de particules, la quantité de mouvement ou le hamiltonien.

Pour finir, nous pouvons également prouver que la fonctionnelle génératrice $F_L(\lambda)$ est indépendante de l'origine du domaine. Soit

$$T_{L, x_0}(\lambda, t) = \widehat{\text{exp}} \left(\int_{x_0-L}^{x_0+L} U(x, t, \lambda) dx \right), \quad (2.29)$$

on a alors

$$\begin{aligned} T_{L, x_0}(\lambda, t) &= \widehat{\text{exp}} \left(\int_L^{x_0+L} U(x, t, \lambda) dx \right) \\ &\quad \times \widehat{\text{exp}} \left(\int_{-L}^{+L} U(x, t, \lambda) dx \right) \\ &\quad \times \widehat{\text{exp}} \left(\int_{x_0-L}^{-L} U(x, t, \lambda) dx \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$T_{L, x_0}(\lambda, t) = P_+(\lambda, x_0, t) T_L(\lambda, t) P_-^{-1}(\lambda, x_0, t) \quad (2.31)$$

où

$$P_{\pm}(\lambda, x_0, t) = \widehat{\text{exp}} \left(\int_{\pm L}^{x_0 \pm L} U(x, t, \lambda) dx \right). \quad (2.32)$$

Aussi, P_+ et P_- sont semblables, puisque

$$P_+(\lambda, x_0, t) = \widehat{\text{exp}} \left(\int_{-L}^{x_0-L} U(y+2L, t, \lambda) dy \right) = Q^{-1}(\theta) P_-(\lambda, x_0, t) Q(\theta). \quad (2.33)$$

Ainsi avec (2.33) et (2.22), on a

$$T_{L, x_0}(\lambda, t) Q(\theta) = P_+(\lambda, x_0, t) T_L(\lambda, t) Q(\theta) P_+^{-1}(\lambda, x_0, t) \quad (2.34)$$

et

$$F_{L,x_0}(\lambda) = \text{tr}(T_{L,x_0}(\lambda, t) Q(\theta)) = \text{tr}(T_L(\lambda, t) Q(\theta)) = F_L(\lambda). \quad (2.35)$$

La fonctionnelle génératrice F_L ne dépend donc que de la longueur de l'intervalle choisi.

2.2 Condition de courbure nulle pour N.S.

A présent, si on veut utiliser la représentation de la courbure nulle vue au paragraphe précédent pour le modèle de Schrödinger Nonlinéaire, il faut définir une connexion (U, V) adéquate [6, 7, 18].

Définissons pour le modèle NS*

$$U(x, \lambda) = i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 + i\sqrt{g}(\psi^*(x)\sigma_+ - \psi(x)\sigma_-) \quad (2.36)$$

Il faut alors une matrice $V(x, \lambda)$ compatible au sens de (2.4). Cette matrice $V(x, \lambda)$ a la forme

$$\begin{aligned} V(x, \lambda) = & i\frac{\lambda^2}{2}\sigma_3 + ig|\psi(x)|^2\sigma_3 + \sqrt{g}(\psi_x^*(x)\sigma_+ + \psi_x(x)\sigma_-) \\ & + i\sqrt{g}\lambda(\psi^*(x)\sigma_+ - \psi(x)\sigma_-) \end{aligned} \quad (2.37)$$

En effet, si avec ces matrices $U(x, \lambda)$ et $V(x, \lambda)$ on égalise les éléments de matrices des deux membres de l'équation de compatibilité,

$$U_t - V_x + [U, V] = 0$$

on retrouve après calculs l'équation de Schrödinger Nonlinéaire (voir annexe B).

Maintenant qu'on a défini les deux matrices de connexion U et V pour N.S., il nous est possible de décrire complètement les propriétés de la matrice de transfert au chapitre 3 et ensuite de trouver au chapitre 4 les intégrales du mouvement du système décrit par l'équation (1.1).

* σ_3 est la troisième matrice de Pauli et $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$

Chapitre 3

Propriétés de la matrice de transfert

Considérons la matrice de transfert générale qui traduit le transport du point y au point x sur la droite réelle

$$T(x, y, \lambda) = \widehat{\exp} \left(\int_y^x U(z, \lambda) dz \right). \quad (3.1)$$

La matrice $T_L(\lambda)$ définie en (2.22) est un cas particulier de (3.1)

$$T_L(\lambda) = T(L, -L, \lambda). \quad (3.2)$$

Proposons nous d'étudier les propriétés générales de la matrice de transfert $T(x, y, \lambda)$:

La première de ces propriétés qui peut aussi être prise comme définition de la matrice de transfert est que cette dernière satisfait au problème (2.18) ,dit **problème auxiliaire**,

$$\partial_x T(x, y, \lambda) = U(x, \lambda) T(x, y, \lambda) \quad (3.3)$$

avec la condition initiale

$$T(x, y, \lambda)|_{x=y} = I. \quad (3.4)$$

En outre $T(x, y, \lambda)$ satisfait :

i) au principe de superposition

$$T(x, z, \lambda) T(z, y, \lambda) = T(x, y, \lambda) \quad (3.5)$$

qui est une conséquence de $\Omega_{\gamma_1+\gamma_2} = \Omega_{\gamma_2} \Omega_{\gamma_1}$.

ii) à

$$T(x, y, \lambda) = T^{-1}(y, x, \lambda) \quad (3.6)$$

qui vient de (3.4) et de la propriété i)

iii) $T(x, y, \lambda)$ obéit également à l'équation différentielle

$$\partial_y T(x, y, \lambda) = -T(x, y, \lambda) U(y, \lambda) \quad (3.7)$$

ceci se déduit rapidement de (3.1).

iv) à

$$\det(T(x, y, \lambda)) = 1 \quad (3.8)$$

car $tr(U(x, \lambda)) = 0$.

v) d'autre part la matrice $U(x, \lambda)$ possède la propriété

$$U^*(x, \lambda) = \sigma U(x, \lambda^*) \sigma \quad (3.9)$$

où $\sigma = \begin{cases} \sigma_1 & \text{si } g > 0 \\ \sigma_2 & \text{si } g < 0 \end{cases}$ et où A^* est la matrice composées de tous les conjugués des éléments de A .

Ainsi avec la propriété v) on a pour $T(x, y, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \partial_x T^*(x, y, \lambda) &= U^*(x, \lambda) T^*(x, y, \lambda) \\ &= \sigma U(x, \lambda^*) \sigma T^*(x, y, \lambda) \\ &\Leftrightarrow \\ \partial_x [\sigma T^*(x, y, \lambda) \sigma] &= U(x, \lambda^*) [\sigma T^*(x, y, \lambda) \sigma] \end{aligned} \quad (3.10)$$

ainsi

$$T^*(x, y, \lambda) = \sigma T(x, y, \lambda^*) \sigma. \quad (3.11)$$

Pour $T_L(\lambda)$, on a

$$T_L^*(\lambda) = \sigma T_L(\lambda^*) \sigma \quad (3.12)$$

ce qui implique *

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_L^*(\lambda) & c_L^*(\lambda) \\ b_L^*(\lambda) & d_L^*(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \xi^* \\ \xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_L(\lambda^*) & c_L(\lambda^*) \\ b_L(\lambda^*) & d_L(\lambda^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \xi^* \\ \xi & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

\Leftrightarrow

$$\begin{pmatrix} a_L^*(\lambda) & c_L^*(\lambda) \\ b_L^*(\lambda) & d_L^*(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_L(\lambda^*) & \pm b_L(\lambda^*) \\ \pm c_L(\lambda^*) & a_L(\lambda^*) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Ainsi on peut écrire $T_L(\lambda)$ sous la forme

$$T_L(\lambda) = \begin{pmatrix} a_L(\lambda) & \varepsilon b_L^*(\lambda^*) \\ b_L(\lambda) & a_L^*(\lambda^*) \end{pmatrix} \quad \text{où } \varepsilon = \text{signe}(g) \quad (3.15)$$

$a_L(\lambda)$ et $b_L(\lambda)$ sont appelés les coefficients de transfert. De (3.8), on a pour λ réel

$$|a_L(\lambda)|^2 - \varepsilon |b_L(\lambda)|^2 = 1. \quad (3.16)$$

*Dans ce qui suit le paramètre $\xi = 1$ si $g > 0$ et $\xi = i$ si $g < 0$

Enfin, en rétablissant une dépendance de la matrice de transfert vis-à-vis du temps, on a en dérivant (3.3) par rapport à t :

$$\begin{aligned}
T_{xt} &= (UT)_t \\
&= UT_t + U_t T \\
&= UT_t + (V_x + VU - UV) T \\
&= UT_t + V_x T + VT_x - UV T \\
&= UT_t + (VT)_x - UV T
\end{aligned} \tag{3.17}$$

ainsi

$$(T_t - VT)_x = U(T_t - VT)$$

d'où

$$T_t - VT = TC \tag{3.18}$$

avec C indépendant de x . Ainsi pour $x = y$,

$$C = -V(y, t, \lambda) \tag{3.19}$$

et donc

$$\partial_t T(x, y, t, \lambda) = V(x, t, \lambda) T(x, y, t, \lambda) - T(x, y, t, \lambda) V(y, t, \lambda). \tag{3.20}$$

Pour des conditions quasipériodiques, il vient pour $T_L(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\partial_t T(t, \lambda) Q(\theta) &= V(L, t, \lambda) T_L(t, \lambda) Q(\theta) - T_L(t, \lambda) V(-L, t, \lambda) Q(\theta) \\
&= V(L, t, \lambda) T_L(t, \lambda) Q(\theta) - T_L(t, \lambda) Q(\theta) V(L, t, \lambda) \\
&= [V(L, t, \lambda), T_L(t, \lambda) Q(\theta)]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Par conséquent,

$$\partial_t F_L(t, \lambda) = \partial_t \operatorname{tr}(T_L(t, \lambda) Q(\theta)) = 0. \tag{3.22}$$

Résultat qui vient confirmer à nouveau, après (2.28), que $F_L(t, \lambda)$ se présente bien comme un bon candidat pour être une fonctionnelle génératrice des quantités conservées du système.

Chapitre 4

Intégrales du mouvement

La fonctionnelle génératrice des quantités conservées du système doit être comme on l'a vu dans les deux chapitres précédents

$$F_L(\lambda) = \text{tr}(T_L(\lambda) Q(\theta)). \quad (4.1)$$

Occupons nous de rechercher les intégrales du mouvement dans le cas d'un système régi par l'équation de Schrödinger Nonlinéaire. Cherchons $T(x, y, \lambda)$ sous la forme

$$T(x, y, \lambda) = G^{-1}(x) \exp(Z(x, y, \lambda)) G(y) \quad (4.2)$$

où

$$\begin{aligned} G(x) &= (I + W(x))^{-1} \\ Z(x, y, \lambda) &\text{ est une matrice diagonale} \\ \text{et } W(x) &\text{ est une matrice hors diagonale.} \end{aligned} \quad (4.3)$$

De (3.3), il vient, avec la connexion (U, V) définie au paragraphe 2.2

$$\begin{aligned} U(x) &= U_0(x) + \lambda U_1 \\ U_0(x) &= i\sqrt{g}(\psi^*(x)\sigma_+ - \psi(x)\sigma_-) \\ U_1 &= \frac{i}{2}\sigma_3, \end{aligned} \quad (4.4)$$

la relation suivante

$$\frac{dW}{dx}(x) + (I + W(x)) \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y, \lambda) = (U_0(x) + \lambda U_1)(I + W(x)). \quad (4.5)$$

De l'équation (4.5) séparons la partie diagonale et hors diagonale :

Partie diagonale :

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x, y, \lambda) = U_0(x) W(x) + \lambda U_1 \quad (4.6)$$

Partie hors diagonale :

$$\frac{dW}{dx}(x) + W(x) \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y, \lambda) = U_0(x) + \lambda U_1 W(x) \quad (4.7)$$

Débarassons nous à présent de $\frac{\partial Z}{\partial x}$ dans (4.7) grâce à (4.6) et avec (4.4) on obtient alors

$$\frac{dW}{dx}(x) - i\lambda\sigma_3 W(x) + W(x) U_0(x) W(x) - U_0(x) = 0 \quad (4.8)$$

que l'on peut réécrire

$$W(x) = -\frac{i}{\lambda} \sigma_3 \left(\frac{dW}{dx}(x) + W(x) U_0(x) W(x) - U_0(x) \right). \quad (4.9)$$

En réinjectant plusieurs fois $W(x)$ dans le membre de droite de (4.9), on s'aperçoit sans mal que $W(x)$ peut être développé en puissance de $\frac{1}{\lambda}$

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\lambda^n}. \quad (4.10)$$

De ce développement (4.10), on peut tirer grâce à (4.9) une relation de récurrence sur les $W_n(x)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\lambda^n} = -\frac{i}{\lambda} \sigma_3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \frac{dW_n}{dx}(x) \right. \\ \left. + \sum_{n,n'=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+n'}} W_n(x) U_0(x) W_{n'}(x) - U_0(x) \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

ainsi en identifiant les coefficients de $\frac{1}{\lambda^n}$ dans les deux membres de l'équation (4.11), il vient

$$W_{n+1}(x) = -i\sigma_3 \left(\frac{dW_n}{dx}(x) + \sum_{m=1}^{n-1} W_m(x) U_0(x) W_{n-m}(x) \right) \quad (4.12)$$

avec

$$W_1(x) = i\sigma_3 U_0(x) = -\sqrt{g} (\psi^*(x) \sigma_+ + \psi(x) \sigma_-). \quad (4.13)$$

La relation de récurrence (4.12) montre clairement que les $W_n(x)$ ne dépendent que de $U_0(x)$ et de ses dérivées, par conséquent $W(x)$ est une fonctionnelle de $\psi^*(x)$ et $\psi(x)$ et de leurs dérivées spatiales; en considérant ici que $\psi^*(x)$ et $\psi(x)$ sont infiniment dérivables.

De (4.13), on constate que $W_1(x)$ est de la forme

$$W_1(x) = -\sqrt{g} (w_1^*(x) \sigma_+ + w_1(x) \sigma_-) \quad (4.14)$$

où

$$w_1(x) = \psi(x). \quad (4.15)$$

Supposons que cette écriture soit possible jusqu'au rang n , montrons alors que l'on peut encore adopter cette écriture à l'ordre $n+1$ et surtout déduisons-en une formule de récurrence sur les $w_n(x)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} W_{n+1}(x) = -i\sigma_3 \left\{ -\sqrt{g} \left(\frac{dw_n^*}{dx} \sigma_+ + \frac{dw_n}{dx} \sigma_- \right) \right. \\ \left. + ig^{3/2} \sum_{m=1}^{\infty} (w_m^* \sigma_+ + w_m \sigma_-) (\psi^* \sigma_+ - \psi \sigma_-) (w_{n-m}^* \sigma_+ + w_{n-m} \sigma_-) \right\} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0$, $\sigma_3 \sigma_{\pm} = \pm \sigma_{\pm}$ et que $\sigma_{\pm} \sigma_{\mp} \sigma_{\pm} = \sigma_{\pm}$, et en regroupant les termes résiduels facteurs de σ_+ et ceux facteurs de σ_- , on obtient la forme souhaitée pour $W_{n+1}(x)$

$$\begin{aligned}
 W_{n+1}(x) = -\sqrt{g} & \left(\underbrace{\left(-i \frac{dw_n^*}{dx} + g\psi \sum_{m=1}^{\infty} w_m^* w_{n-m}^* \right)}_{w_{n+1}^*(x)} \sigma_+ \right. \\
 & \left. + \underbrace{\left(i \frac{dw_n}{dx} + g\psi^* \sum_{m=1}^{\infty} w_m w_{n-m} \right)}_{w_{n+1}(x)} \sigma_- \right). \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

La relation de récurrence cherchée est alors

$$w_{n+1}(x) = i \frac{dw_n}{dx}(x) + g\psi^*(x) \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x) w_{n-m}(x). \tag{4.17}$$

On a donc

$$W(x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\lambda^n} = -\sqrt{g} (w^*(x, \lambda) \sigma_+ + w(x, \lambda) \sigma_-) \tag{4.18}$$

avec

$$w(x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(x)}{\lambda^n} \tag{4.19}$$

ou plus explicitement

$$W(x, \lambda) = -\sqrt{g} \begin{pmatrix} 0 & w^*(x, \lambda) \\ w(x, \lambda) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Comme $w(x)$ est une fonctionnelle de $\psi(x)$ et de $\psi^*(x)$, elle est aussi quasipériodique et il vient

$$W(x + 2L, \lambda) = Q^{-1}(\theta) W(x, \lambda) Q(\theta) \tag{4.21}$$

et

$$w(x + 2L, \lambda) = e^{i\theta} w(x, \lambda). \tag{4.22}$$

Intéressons nous maintenant à la matrice diagonale $Z(x, y, \lambda)$: en intégrant (4.6), il vient

$$Z(x, y, \lambda) = \frac{i\lambda}{2} \sigma_3 (x - y) + \int_y^x U_0(z) W(z, \lambda) dz \tag{4.23}$$

avec comme condition initiale

$$Z(x, y, \lambda)|_{x=y} = 0 \quad \text{puisque} \quad T(x, y, \lambda)|_{x=y} = I. \tag{4.24}$$

On aura donc pour un interval $[L, -L]$,

$$Z_L(\lambda) = Z(L, -L, \lambda) = i\lambda L \sigma_3 + \int_{-L}^L U_0(z) W(z, \lambda) dz. \tag{4.25}$$

Ainsi, la matrice de transfert $T_L(\lambda)$ et la fonctionnelle génératrice associée (4.1), s'écrivent donc en vertu de (4.1), (4.2) et (4.25)

$$T_L(\lambda) = (I + W(L, \lambda)) \exp(Z_L(\lambda)) (I + W(-L, \lambda))^{-1} \quad (4.26)$$

et

$$F_L(\lambda) = \text{tr} \left\{ (I + W(L, \lambda)) \exp(Z_L(\lambda)) (I + W(-L, \lambda))^{-1} Q(\theta) \right\}. \quad (4.27)$$

Or puisque $W(x, \lambda)$ est quasipériodique on peut écrire avec (4.21),

$$(I + W(-L, \lambda))^{-1} Q(\theta) = Q(\theta) (I + W(L, \lambda))^{-1} \quad (4.28)$$

et donc

$$\begin{aligned} F_L(\lambda) &= \text{tr} \left\{ (I + W(L, \lambda)) \exp(Z_L(\lambda)) Q(\theta) (I + W(L, \lambda))^{-1} \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \exp(Z_L(\lambda)) Q(\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ainsi puisque $Z_L(\lambda)$ est diagonale,

$$F_L(\lambda) = \text{tr} \left(\exp \left(Z_L(\lambda) + i \frac{\theta}{2} \sigma_3 \right) \right). \quad (4.30)$$

Or avec (4.23), (4.20) et (4.4),

$$Z_L(\lambda) = i\lambda L \sigma_3 - ig \int_{-L}^L (\psi^* \sigma_+ - \psi \sigma_-) (w^*(\lambda) \sigma_+ + w(\lambda) \sigma_-) dz \quad (4.31)$$

$$Z_L(\lambda) = \begin{pmatrix} i\lambda L - ig \int_{-L}^L \psi^* w(\lambda) dz & 0 \\ 0 & -i\lambda L + ig \int_{-L}^L \psi w^*(\lambda) dz \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

et

$$\begin{aligned} &\exp \left(Z_L(\lambda) + i \frac{\theta}{2} \sigma_3 \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i \left(\frac{\theta}{2} + \lambda L - g \int_{-L}^L \psi^*(z) w(z, \lambda) dz \right)} & 0 \\ 0 & e^{-i \left(\frac{\theta}{2} + \lambda L - g \int_{-L}^L \psi(z) w^*(z, \lambda) dz \right)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ainsi

$$F_L(\lambda) = 2 \cos \left(\frac{\theta}{2} + \lambda L - g \int_{-L}^L \psi^*(z) w(z, \lambda) dz \right). \quad (4.34)$$

Posons à présent

$$f_L(\lambda) = \int_{-L}^L \psi^*(z) w(z, \lambda) dz. \quad (4.35)$$

Nous pouvons remarquer que puisque $\det(T_L(\lambda) Q(\theta)) = 1$, on doit avoir $\text{tr}(Z_L(\lambda)) = 0$ et par conséquent avec (4.32) on constate que

$$f_L(\lambda) = f_L^*(\lambda). \quad (4.36)$$

Travaillons maintenant plutôt avec l'argument du cosinus présent dans l'expression de la fonctionnelle génératrice $F_L(\lambda)$, à savoir

$$k_L(\lambda) = \arccos\left(\frac{1}{2}F_L(\lambda)\right) = \frac{\theta}{2} + \lambda L - g f_L(\lambda) \quad (4.37)$$

avec

$$f_L(\lambda) = \int_{-L}^L \psi^*(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(x)}{\lambda^n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{-L}^L \psi^*(x) w_n(x) dx}{\lambda^n},$$

$$f_L(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n} \quad (4.38)$$

où les $I_n = \int_{-L}^L \psi^*(x) w_n(x) dx$ qui sont les différents coefficients du développement en $\frac{1}{\lambda}$ de $f_L(\lambda)$ seront les intégrales du mouvement attendues. Cherchons ces premières intégrales du mouvement en réécrivant I_n à l'aide de la relation (4.36)

$$I_n = \frac{1}{2} \left(\int_{-L}^L \psi^*(x) w_n(x) + \psi(x) w_n^*(x) dx \right) \quad (4.39)$$

et en utilisant la relation (4.17).

n=1 :

$$w_1(x) = \psi(x)$$

$$I_1 = \int_{-L}^L \psi^*(x) w_1(x) dx = \int_{-L}^L \psi^*(x) \psi(x) dx = \mathcal{N} \quad (4.40)$$

c'est le "nombre de particules" ou la "charge".

n=2 :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \psi^*(x) w_2(x) + \psi(x) w_2^*(x) dx$$

$$w_2(x) = i \frac{dw_1}{dx}(x) = i\psi_x(x)$$

$$I_2 = \frac{i}{2} \int_{-L}^L \left(\psi^*(x) \frac{d\psi}{dx}(x) - \frac{d\psi^*}{dx}(x) \psi(x) \right) dx = \mathcal{P} \quad (4.41)$$

c'est la quantité de mouvement.

n=3 :

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \psi^*(x) w_3(x) + \psi(x) w_3^*(x) dx$$

$$w_3(x) = i \frac{dw_2}{dx}(x) + g\psi^* w_1(x) w_1(x) = -\psi_{xx}(x) + g|\psi(x)|^2 \psi(x)$$

ainsi

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left\{ \psi^*(x) \left(-\psi_{xx}(x) + g |\psi(x)|^2 \psi(x) \right) + \psi(x) \left(-\psi_{xx}^*(x) + g |\psi(x)|^2 \psi^*(x) \right) \right\} dx \quad (4.42)$$

après une intégration par partie élémentaire en utilisant les conditions quasi-périodiques aux limites il vient

$$I_3 = \int_{-L}^L \left(|\psi_x(x)|^2 + g |\psi(x)|^4 \right) dx = \mathcal{H} \quad (4.43)$$

c'est le Hamiltonien lié à l'équation de Schrödinger Nonlinéaire.

n=4 :

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \psi^*(x) w_4(x) + \psi(x) w_4^*(x) dx$$

$$w_4(x) = i \frac{dw_3}{dx}(x) + g \psi^*(w_1(x) w_2(x) + w_2(x) w_1(x))$$

$$= i \left(-\psi_{3x} + g (\psi^2 \psi^*)_x \right) + 2ig \psi^* \psi \psi_x \quad (4.44)$$

$$= -i\psi_{3x} + 4ig |\psi|^2 \psi_x + ig \psi^2 \psi_x^*$$

ainsi

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(\left(-i\psi_{3x} + 4ig |\psi|^2 \psi_x + ig \psi^2 \psi_x^* \right) \psi^* + \left(i\psi_{3x}^* - 4ig |\psi|^2 \psi_x^* - ig \psi^{*2} \psi_x \right) \psi \right) dx$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(i (\psi_{3x}^* \psi - \psi_{3x} \psi^*) + 3ig |\psi|^2 (\psi_x \psi^* - \psi_x^* \psi) \right) dx$$

$$I_4 = \frac{i}{2} \int_{-L}^L \left(\psi_{3x}^* \psi - \psi_{3x} \psi^* + 3g |\psi|^2 (\psi_x \psi^* - \psi_x^* \psi) \right) dx \quad (4.45)$$

C'est la première intégrale du mouvement non triviale, c'est-à-dire la première différente de \mathcal{H}, \mathcal{P} ou \mathcal{N} .

Nous pouvons ainsi générer une infinité de quantités conservées comme le nombre de particules \mathcal{N} , la quantité totale de mouvement \mathcal{P} et le Hamiltonien \mathcal{H} grâce aux calculs des fonctionnelles I_n . Il faut néanmoins supposer les fonctions $\psi(x)$ et $\psi^*(x)$ infiniment dérivables.

Nous verrons plus loin dans le chapitre suivant au paragraphe 5.2 que ces quantités sont en involution vis-à-vis des crochets de Poisson, c'est-à-dire

$$\{I_n, I_m\} = 0.$$

Ce qui est indispensable pour la complète intégrabilité du modèle de Schrödinger Nonlinéaire.

Chapitre 5

Formulation Hamiltonienne du modèle N.S.

Dans ce chapitre, nous allons formuler le modèle de Schrödinger Nonlinéaire sous une forme Hamiltonienne à l'aide de crochets de Poisson fondamentaux. Ces crochets de Poisson vont nous permettre de mettre en évidence la complète intégrabilité du modèle N.S..

5.1 Matrice r et crochets de Poisson fondamentaux

Nous allons à présent nous placer sur un intervalle $-L \leq x \leq L$ où les fonctions $\psi(x)$ et $\psi^*(x)$ sont définies.

Nous avons défini les crochets de Poisson suivant entre deux fonctionnelles A et B :

$$\{A, B\} = i \int_{-L}^{+L} \left(\frac{\delta A}{\delta \psi(x)} \frac{\delta B}{\delta \psi^*(x)} - \frac{\delta A}{\delta \psi^*(x)} \frac{\delta B}{\delta \psi(x)} \right) dx \quad (5.1)$$

Ici l'intégration est limitée à l'intervalle sur lequel les fonctionnelles sont définies.

À présent, si A et B sont deux matrices 2×2 dont les quatre éléments sont des fonctionnelles de $\psi(x)$ et $\psi^*(x)$, on peut créer un outil mathématique pouvant calculer simultanément les 16 crochets de Poisson du type (5.1) entre les éléments de matrice de A et B . Ainsi, si l'on veut un seul être mathématique regroupant les 16 informations finales que sont ces crochets de Poisson, il faut passer de 2 matrices 2×2 à une matrice d'ordre 4 à l'aide du produit tensoriel. Fixons alors les conventions suivantes

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

où \otimes dénote le produit tensoriel, et les notations suivantes

$$(A \otimes B)_{ik|jl} = A_{ij}B_{kl} \quad \text{où } ik, jl = 11, 12, 21, 22 \quad (5.3)$$

$$A \otimes B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 12 & 21 & 22 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} & \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (5.4)$$

Définissons donc les crochets de Poisson tensoriels qui nous permettront de calculer les 16 crochets de Poisson entre les éléments de A et B

$$\{A \otimes B\} = i \int_{-L}^L \left(\frac{\delta A}{\delta \psi(x)} \otimes \frac{\delta B}{\delta \psi^*(x)} - \frac{\delta A}{\delta \psi^*(x)} \otimes \frac{\delta B}{\delta \psi(x)} \right) dx \quad (5.5)$$

$$\{A \otimes B\}_{ik|jl} = \{A_{ij}, B_{kl}\}$$

Intéressons nous alors aux crochets de Poisson tensoriels du type

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\}$$

où nous avons défini auparavant pour N.S. [(2.36) et (2.37)]

$$U(x, \lambda) = U_0(x, \lambda) + \lambda U_1 = i\sqrt{g}(\psi^*(x)\sigma_+ - \psi(x)\sigma_-) + i\frac{\lambda}{2}\sigma_3. \quad (5.6)$$

Ainsi, en utilisant les relations (5.1) et (5.5), on a

$$\begin{aligned} \{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} &= -g \{ \psi^*(x)\sigma_+ - \psi(x)\sigma_- \otimes \psi^*(y)\sigma_+ - \psi(y)\sigma_- \} \\ &= -g (i\delta(x-y)\sigma_+ \otimes \sigma_- - i\delta(x-y)\sigma_- \otimes \sigma_+) \\ \{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} &= ig(\sigma_- \otimes \sigma_+ - \sigma_+ \otimes \sigma_-)\delta(x-y). \end{aligned} \quad (5.7)$$

A présent essayons d'écrire autrement ce crochet de Poisson en utilisant la matrice de permutation

$$P = \frac{1}{2}(I + \sigma_i \otimes \sigma_i) \quad i = 1, 2, 3$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

où I est la matrice unité 4×4 et où les matrices 2×2 σ_i sont les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Les propriétés les plus importantes de la matrice P sont :

- le fait que

$$P^2 = I, \quad (5.10)$$

- P échange les sous-espaces du produit tensoriel

$$P(A \otimes B) = (B \otimes A)P \quad (5.11)$$

– et

$$\{A \otimes BC\} = \{A \otimes B\} (I \otimes C) + (I \otimes B) \{A \otimes C\}. \quad (5.12)$$

D'un point de vue pratique, attaquer à gauche une matrice 4×4 Q par P , c'est identique à permuter les deux lignes centrales de Q et l'attaquer à droite, c'est identique à permuter les deux colonnes centrales.

Retournons à la reformulation de (5.7) et aidons-nous des résultats simples suivants :

$$\begin{aligned} \sigma_3 \otimes I &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ [\sigma_3 \otimes I, A] &= 2(\sigma_3 \otimes I) A^{\text{''bloc hors-diagonale''}} \quad \text{où } A \text{ est une matrice } 4 \times 4 \\ \text{et } A^{\text{''bloc hors-diagonale''}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & 0 & 0 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [P, \sigma_3 \otimes I] &= -(\sigma_3 \otimes I) P^{\text{''bloc hors-diagonale''}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_- \otimes \sigma_+ - \sigma_+ \otimes \sigma_- \end{aligned} \quad (5.14)$$

et utilisant (5.11)

$$\frac{1}{2} [P, \sigma_3 \otimes I] = \frac{1}{2} [I \otimes \sigma_3, P] = \sigma_- \otimes \sigma_+ - \sigma_+ \otimes \sigma_- \quad (5.15)$$

avec (5.7), on peut écrire $\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} &= \frac{g}{\lambda - \mu} \left[P, \frac{i\lambda}{2} \sigma_3 \otimes I + \frac{i\mu}{2} I \otimes \sigma_3 \right] \delta(x - y) \\ \{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} &= \frac{g}{\lambda - \mu} [P, \lambda U_1 \otimes I + \mu I \otimes U_1] \delta(x - y) \end{aligned}$$

or $[P, \sigma_{\pm} \otimes I] = [P, I \otimes \sigma_{\pm}] = 0$ ce qui implique

$$[P, U_0(x) \otimes I + I \otimes U_0(y)] = 0 \quad (5.16)$$

et par conséquent

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = \frac{g}{\lambda - \mu} [P, U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(y, \mu)] \delta(x - y). \quad (5.17)$$

En définissant une matrice r de la forme

$$r(\nu) = \frac{g}{\nu} P \quad (5.18)$$

on peut réécrire (5.17) de la manière suivante

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = [r(\lambda - \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(y, \mu)] \delta(x - y)$$

Relation du crochet de Poisson fondamentale.

(5.19)

Discutons à présent cette relation (5.19). Il faut y voir plus qu'une reformulation qui pourrait apparaître "compliquée" des relations

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \psi(y)\} &= \{\psi^*(x), \psi^*(y)\} = 0 \\ &\text{et} \\ \{\psi(x), \psi^*(y)\} &= i\delta(x - y). \end{aligned} \quad (5.20)$$

En effet, nous allons voir plus avant que cette relation (5.19) est, pour les matrices $U(x, \lambda)$, une relation universelle impliquée dans la représentation de courbure nulle pour tous les systèmes intégrables et pas uniquement pour le problème de N.S. (voir partie II).

De plus, la relation (5.19) laisse apparaître que nous avons réécrit le crochet de Poisson $\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\}$ comme une combinaison linéaire des matrices $U(x, \lambda)$ et $U(x, \mu)$ nous rappelant un peu les relations de structures des algèbres de Lie.

Nous pouvons maintenant chercher grâce à (5.19) le crochet de Poisson tensoriel de $\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\}$. Plaçons nous toujours sur l'intervalle $-L \leq y < x \leq L$ pour définir les crochets de Poisson et découpons l'intervalle $[y, x]$ en N segments Δ_n où $n = 1, \dots, N$ avec $\lim_{N \rightarrow +\infty} \Delta_n = 0$, ainsi on a :

$$T(x, y, \lambda) = \lim_{N \rightarrow +\infty} T_N(\lambda) \quad (5.21)$$

avec

$$T_N(\lambda) = \prod_{n=1}^{\overset{\curvearrowright}{N}} L_n(\lambda) \quad (5.22)$$

où

$$L_n(\lambda) = I + \int_{\Delta_n} U(z, \lambda) dz. \quad (5.23)$$

Avec (5.19),

$$\begin{aligned} &\{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} \\ &= \int_{\Delta_n} \int_{\Delta_m} dz dz' \{U(z, \lambda) \otimes U(z', \mu)\} \\ &= \int_{\Delta_n} \int_{\Delta_m} dz dz' [r(\lambda - \mu), U(z, \lambda) \otimes I + I \otimes U(z', \mu)] \delta(z - z') \\ &= \int_{\Delta_n} dz [r(\lambda - \mu), U(z, \lambda) \otimes I + I \otimes U(z, \mu)] \delta_{nm} \\ &= \left[r(\lambda - \mu), \left(\int_{\Delta_n} dz U(z, \lambda) \right) \otimes I + I \otimes \left(\int_{\Delta_n} dz U(z, \mu) \right) \right] \delta_{nm} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), L_n(\lambda) \otimes I + I \otimes L_m(\mu)] \delta_{nm} + o(\Delta^2). \quad (5.25)$$

Ainsi utilisant (5.25) et la propriété

$$\{A \otimes BC\} = \{A \otimes B\} (I \otimes C) + (I \otimes B) \{A \otimes C\} \quad (5.26)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \{T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)\} &= \left\{ \prod_{i=1}^{\widehat{N}} L_i(\lambda) \otimes \prod_{k=1}^{\widehat{N}} L_k(\mu) \right\} \\ &= \sum_{pq} \prod_{i=p+1}^{\widehat{N}} L_i(\lambda) \otimes \prod_{k=q+1}^{\widehat{N}} L_k(\mu) \\ &\quad \times \{L_p(\lambda) \otimes L_q(\mu)\} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{\widehat{p-1}} L_i(\lambda) \otimes \prod_{k=1}^{\widehat{q-1}} L_k(\mu) \quad (5.27) \\ &= \sum_p \prod_{i=p+1}^{\widehat{N}} L_i(\lambda) \otimes \prod_{k=p+1}^{\widehat{N}} L_k(\mu) \\ &\quad \times [r(\lambda - \mu), L_p(\lambda) \otimes L_p(\mu)] \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{\widehat{p-1}} L_i(\lambda) \otimes \prod_{k=1}^{\widehat{p-1}} L_k(\mu) \end{aligned}$$

$$\{T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)] + o(N\Delta^2). \quad (5.28)$$

Ainsi après passage à limite $\Delta \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient la formule importante pour la suite

$$\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} = [r(\lambda - \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)]. \quad (5.29)$$

5.2 Involution des intégrales du mouvement

Nous allons montrer ici que les quantités conservées trouvées en nombre infini au chapitre 4 sont toutes en involution vis-à-vis des crochets de Poisson, c'est-à-dire que quelque soient les quantités conservées I_n et I_m on a

$$\{I_n, I_m\} = 0. \quad (5.30)$$

En effet, nous avons vu au chapitre 4 que $F_L(\lambda) = tr(T_L(\lambda)Q(\theta))$ est la fonctionnelle génératrice des intégrales du mouvement. Nous allons donc commencer par démontrer que

$$\{F_L(\lambda), F_L(\mu)\} = 0. \quad (5.31)$$

Rappelons pour cela que

$$tr(A \otimes B) = tr A \cdot tr B \quad (5.32)$$

et ainsi grâce à la définition (5.5) et à la relation (5.32) on a sachant que la trace d'un commutateur de c -nombres est nulle

$$\begin{aligned} \text{tr} \{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} &= \{\text{tr} T(x, y, \lambda), \text{tr} T(x, y, \mu)\} \\ &= \text{tr} ([r(\lambda - \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)]) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

ce qui implique

$$\{\text{tr} T(x, y, \lambda), \text{tr} T(x, y, \mu)\} = 0. \quad (5.34)$$

L'équation (5.34) est donc la preuve de (5.31) pour le cas périodique où $Q(\theta) = I$, or nous pouvons sans mal généraliser au cas quasipériodique. En effet, en vertu de la relation (5.11)

$$[r(\nu), Q(\theta) \otimes Q(\theta)] = 0 \quad (5.35)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} Q(\theta) \otimes Q(\theta) \\ = [r(\lambda - \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu) Q(\theta) \otimes Q(\theta)]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Or puisque

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \quad (5.37)$$

on a

$$\begin{aligned} \{T(x, y, \lambda) Q(\theta) \otimes T(x, y, \mu) Q(\theta)\} \\ = [r(\lambda - \mu), (T(x, y, \lambda) Q(\theta)) \otimes (T(x, y, \mu) Q(\theta))]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ainsi, avec (5.32)

$$\{\text{tr}(T(x, y, \lambda) Q(\theta)), \text{tr}(T(x, y, \mu) Q(\theta))\} = 0 \quad \forall (\lambda, \mu) \quad (5.39)$$

et en passant à la limite ($x \rightarrow +L, y \rightarrow -L$) on obtient (5.31)

$$\{F_L(\lambda), F_L(\mu)\} = 0 \quad \forall (\lambda, \mu). \quad (5.40)$$

Pour montrer l'involution des quantités conservées, dont F_L est la fonctionnelle génératrice, il faut noter que $F_L(\lambda) = 2 \cos(k_L(\lambda))$ peut être décomposée en une série infinie en puissance de $k_L(\lambda)$ et que ce dernier est lui-même une série infinie de puissance inverse de λ puisque

$$k_L(\lambda) = \frac{\theta}{2} + \lambda L - g \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{\lambda^n}. \quad (5.41)$$

Par conséquent le crochet $\{F_L(\lambda), F_L(\mu)\}$ est lui une série dont les termes sont de la forme

$$\frac{1}{\lambda^n \mu^m} \{I_n, I_m\}. \quad (5.42)$$

Comme la relation (5.40) est vraie quelque soient λ et μ , on a, en identifiant tous les termes du type (5.42) à 0, la relation (5.30) que l'on voulait démontrer

$$\{I_n, I_m\} = 0 \quad \forall (n, m). \quad (5.43)$$

5.3 Equation Hamiltonienne du mouvement

A chaque quantité conservée I_n correspond une équation Hamiltonienne du mouvement

$$\begin{aligned}\psi_t &= \{I_n, \psi\} \\ \psi_t^* &= \{I_n, \psi^*\}\end{aligned}\quad (5.44)$$

De ce fait, on a le choix de prendre n'importe qu'elle intégrale du mouvement I_n comme Hamiltonien \mathbf{H} de notre système et il lui correspondra l'équation du mouvement (5.44).

1. Ainsi, si l'on prend $\mathbf{H} = I_1 = \mathcal{N}$, on obtient assez facilement l'équation du mouvement

$$\psi_t = -i\psi \quad (5.45)$$

ce qui correspond pour le champ $\psi(x, t)$ à une évolution du type

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-it}.$$

Son évolution temporelle n'est qu'un changement de phase, on retrouve ici le fait que \mathcal{N} est un générateur de changement de phase.

2. Pour $\mathbf{H} = I_2 = \mathcal{P}$, on obtient l'équation du mouvement

$$\psi_t = -\psi_x \quad (5.46)$$

qui a pour solution

$$\psi(x, t) = \psi(x - t). \quad (5.47)$$

$\psi(x - t)$ est donc la fonction d'onde d'une particule se déplaçant à célérité constante $c = 1$; résultat compatible avec le fait que \mathcal{P} est le générateur des translations.

3. Pour $\mathbf{H} = I_3 = \mathcal{H}$, on obtient bien entendu l'équation de Schrödinger Nonlinéaire comme équation du mouvement (voir §1.2)

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2g|\psi|^2\psi. \quad (5.48)$$

4. Pour $\mathbf{H} = I_4$, on a

$$\begin{aligned}\psi_t &= \{I_4, \psi(x)\} \\ &= \frac{i}{2} \int_{-L}^{+L} \left\{ \psi_{3y}^* \psi - \psi_{3y} \psi^* + 3g|\psi|^2 (\psi_y \psi^* - \psi_y^* \psi), \psi(x) \right\} dy \\ &= \frac{i}{2} \int_{-L}^{+L} \left(-i\delta'''(x-y)\psi(y) + i\delta(x-y)\psi_{3y} \right. \\ &\quad \left. - i3g|\psi|^2 (\psi_y \delta(x-y) - \psi(y)\delta'(x-y)) \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(-\psi_{3x} + 3g|\psi|^2 \psi_x + (-1)^3 \psi_{3x} - 3g(|\psi|^2 \psi)_x \right)\end{aligned}$$

Ainsi l'équation du mouvement pour $\mathbf{H} = I_4$ est

$$\psi_t = -\psi_{3x} - \frac{3}{2}g\psi \left(|\psi|^2 \right)_x. \quad (5.49)$$

Les équations du mouvement générées par les I_n où $n > 3$ sont appelées *équations de Schrödinger Nonlinéaire d'ordres supérieures*, ainsi (5.49) est la première de ces équations.

Chapitre 6

Linéarisation de l'équation du mouvement

On dit qu'un système est intégrable si on peut trouver pour lui autant d'intégrales du mouvement qu'il existe de degrés de liberté du champs ψ . Ainsi pour le système continu de Schrödinger Nonlinéaire, il faut trouver une infinité de quantités conservées I_n ($n = 1, \dots, +\infty$) toutes en involution les unes avec les autres

$$\{I_n, I_m\} = 0. \quad (6.1)$$

Cette relation d'involution a été démontrée au paragraphe 5.2.

Il faut de plus qu'une des intégrales du mouvement puisse être choisi comme hamiltonien afin de générer l'équation du mouvement décrivant le système. Pour N.S., comme on l'a vu (5.48), l'intégrale appelée I_3 génère bien l'équation voulue (1.1)

$$\psi_t = \{I_3, \psi\} \iff i\psi_t = -\psi_{xx} + 2g|\psi|^2\psi. \quad (6.2)$$

Nous avons donc montré jusqu'ici que le modèle de Schrödinger Nonlinéaire était complètement intégrables; cependant une des caractéristiques des plus intéressantes d'un système intégrable est de pouvoir être caractérisé par des variables de type angle-action linéarisant totalement l'équation du mouvement. Nous allons donc montrer succinctement comment introduire ces variables et comment linéariser l'équation du mouvement dans le cas de l'équation de Schrödinger Nonlinéaire.

6.1 Matrice de transfert réduite

Choisissons les conditions aux bords $L \rightarrow +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0$. Définissons la matrice de transfert réduite

$$\widetilde{T}(\lambda) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} E(-x, \lambda) T(x, y, \lambda) E(y, \lambda) \quad (6.3)$$

où

$$E(x, \lambda) = \exp\left(i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 x\right) \quad (6.4)$$

est la solution du problème auxiliaire (3.3)-(3.4) pour $x \rightarrow +\infty$. Définissons aussi les solutions de Jost [6] du problème auxiliaire (3.3)-(3.4)

$$T_{\pm}(x, \lambda) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} T(x, y, \lambda) E(y, \lambda). \quad (6.5)$$

On a alors grâce à (6.3) et (6.5) les relations suivantes :

$$T(x, y, \lambda) = T_+(x, \lambda) T_+^{-1}(y, \lambda) = T_-(x, \lambda) T_-^{-1}(y, \lambda) \quad (6.6)$$

et

$$\widetilde{T}(\lambda) = T_+^{-1}(x, \lambda) T_-(x, \lambda). \quad (6.7)$$

$\widetilde{T}(\lambda)$ possède la même propriété (3.15) que $T_L(\lambda)$, ainsi pour λ réel

$$\widetilde{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \varepsilon b^*(\lambda) \\ b(\lambda) & a^*(\lambda) \end{pmatrix} \text{ où } \varepsilon = \text{signe}(g) \quad (6.8)$$

avec

$$|a(\lambda)|^2 - \varepsilon |b(\lambda)|^2 = 1. \quad (6.9)$$

En regardant (6.3), on peut écrire

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(\lambda) &= \lim_{L \rightarrow +\infty} E(-L, \lambda) T(L, -L, \lambda) E(-L, \lambda) \\ &= \lim_{L \rightarrow +\infty} E(-L, \lambda) T_L(\lambda) E(-L, \lambda) \end{aligned} \quad (6.10)$$

ainsi,

$$a(\lambda) = \lim_{L \rightarrow +\infty} e^{-i\lambda L} a_L(\lambda) \quad (6.11)$$

et

$$b(\lambda) = \lim_{L \rightarrow +\infty} b_L(\lambda). \quad (6.12)$$

Cherchons les crochets de Poisson entre $a(\lambda)$, $a^*(\lambda)$, $b(\lambda)$ et $b^*(\lambda)$. Pour cela, multiplions à droite

$$\{T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)\} = [r(\lambda - \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)] \quad y < x \quad (6.13)$$

par $E(y, \lambda) \otimes E(y, \mu)$ et prenons la limite $y \rightarrow -\infty$,

$$\begin{aligned} &\{T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu)\} \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} [r(\lambda - \mu), T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)] E(y, \lambda) \otimes E(y, \mu) \\ &= r(\lambda - \mu) T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu) \\ &\quad - \lim_{y \rightarrow -\infty} (T(x, y, \lambda) \otimes T(x, y, \mu)) r(\lambda - \mu) (E(y, \lambda) \otimes E(y, \mu)) \\ &= r(\lambda - \mu) T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu) \\ &\quad - \underbrace{(T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu)) \lim_{y \rightarrow -\infty} (E(y, \mu - \lambda) \otimes E(y, \lambda - \mu)) r(\lambda - \mu)}_{r_-(\lambda - \mu)} \end{aligned} \quad (6.14)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \{T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu)\} &= r(\lambda - \mu) T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu) \\ &\quad - T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu) r_-(\lambda - \mu) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Multiplions à gauche cette dernière équation par $E(-x, \lambda) \otimes E(-x, \mu)$ et prenons la limite $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \widetilde{T}(\lambda) \otimes \widetilde{T}(\mu) \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((E(-x, \lambda) \otimes E(-x, \mu)) r(\lambda - \mu) T_-(x, \lambda) \otimes T_-(x, \mu) \right. \\
 & \quad \left. - \widetilde{T}(\lambda) \otimes \widetilde{T}(\mu) r_-(\lambda - \mu) \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(E(x, \mu - \lambda) \otimes E(x, \lambda - \mu)) r(\lambda - \mu)}_{r_+(\lambda - \mu)} \left(\widetilde{T}(\lambda) \otimes \widetilde{T}(\mu) \right) \\
 & \quad - \widetilde{T}(\lambda) \otimes \widetilde{T}(\mu) r_-(\lambda - \mu).
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Nous obtenons

$$\left\{ \widetilde{T}(\lambda) \otimes \widetilde{T}(\mu) \right\} = r_+(\lambda - \mu) \widetilde{T}(\lambda) \otimes \widetilde{T}(\mu) - \widetilde{T}(\lambda) \otimes \widetilde{T}(\mu) r_-(\lambda - \mu). \tag{6.17}$$

De cette relation, on va tirer les différents crochets de Poisson entre $a(\lambda)$, $a^*(\lambda)$, $b(\lambda)$ et $b^*(\lambda)$.

Calculons de façon explicite tout d'abord la matrice $r_-(\lambda - \mu)$,

$$\begin{aligned}
 r_-(\lambda - \mu) &= \lim_{y \rightarrow -\infty} (E(y, \mu - \lambda) \otimes E(y, \lambda - \mu)) r(\lambda - \mu) \\
 &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\mu - \lambda)y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\lambda - \mu)y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \quad \cdot \begin{pmatrix} \text{v.p.} \left(\frac{1}{\lambda - \mu} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{v.p.} \left(\frac{1}{\lambda - \mu} \right) & 0 \\ 0 & \text{v.p.} \left(\frac{1}{\lambda - \mu} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{v.p.} \left(\frac{1}{\lambda - \mu} \right) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Nous avons pour plus de rigueur remplacé dans $r(\lambda - \mu)$, $\frac{1}{\lambda - \mu}$ par sa valeur principale v.p. $\left(\frac{1}{\lambda - \mu} \right)$. Ainsi en utilisant la formule

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \text{v.p.} \frac{e^{\pm iy\lambda}}{\lambda} = \mp i\pi\delta(\lambda) \tag{6.19}$$

valable au sens des distributions, (6.18) devient

$$r_-(\lambda - \mu) = \begin{pmatrix} \text{v.p.} \frac{1}{\lambda - \mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\pi\delta(\lambda - \mu) & 0 \\ 0 & -i\pi\delta(\lambda - \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{v.p.} \frac{1}{\lambda - \mu} \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

et aussi on a

$$r_+(\lambda - \mu) = \begin{pmatrix} \text{v.p.} \frac{1}{\lambda - \mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\pi\delta(\lambda - \mu) & 0 \\ 0 & i\pi\delta(\lambda - \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{v.p.} \frac{1}{\lambda - \mu} \end{pmatrix}. \tag{6.21}$$

Ainsi, en extrayant les éléments de matrices de l'équation (6.17), en utilisant (6.20)-(6.21), on obtient 16 crochets de Poisson qui peuvent être regroupé en 6 crochets de Poisson principaux suivants :

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = \{b(\lambda), b(\mu)\} = 0 \quad (6.22)$$

$$\{a(\lambda), a^*(\mu)\} = 0, \quad (6.23)$$

$$\{b(\lambda), b^*(\mu)\} = 2i\pi g \cdot |a(\lambda)|^2 \delta(\lambda - \mu), \quad (6.24)$$

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = -\frac{g}{\lambda - \mu - i0} a(\lambda) b(\mu), \quad (6.25)$$

$$\{a(\lambda), b^*(\mu)\} = \frac{g}{\lambda - \mu - i0} a(\lambda) b^*(\mu). \quad (6.26)$$

6.2 Données spectrales discrètes

Par soucis d'exactitude, il nous faut introduire la partie discrète des données spectrales du problème. En effet, la donnée $(b(\lambda), b^*(\lambda))$ constitue la partie continue des données spectrales. Nous allons voir qu'il existe d'autres données spectrales qui sont discrètes et qui sont importantes pour caractériser le modèle N.S..

Ces données spectrales discrètes surviennent lorsqu'on considère $g < 0$ dans l'équation de Schrödinger Nonlinéaire (1.1), à ce moment là, on peut montrer par le biais de l'analyse complexe [6] que $a(\lambda)$ possède un nombre fini n de zéros complexes $\{\lambda_j\}_{j=1, \dots, n}$ proches de l'axe réel tout en restant dans le demi-plan supérieur où

$$Im(\lambda_j) > 0 \quad \forall \lambda_j \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.27)$$

En reprenant la formule (6.7), on vérifie facilement que

$$a(\lambda) = \det \left(T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda) \right) \quad (6.28)$$

où $T_-^{(1)}(x, \lambda)$ est la première colonne de $T_-(x, \lambda)$ et $T_+^{(2)}(x, \lambda)$ la seconde colonne de $T_+(x, \lambda)$. Ainsi, si $\{\lambda_j\}_{j=1, \dots, n}$ est l'ensemble des zéros de $a(\lambda)$,

$$a(\lambda_j) = \det \left(T_-^{(1)}(x, \lambda_j), T_+^{(2)}(x, \lambda_j) \right) = 0 \quad \forall \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \quad (6.29)$$

ce qui implique que les colonnes $T_-^{(1)}(x, \lambda_j)$ et $T_+^{(2)}(x, \lambda_j)$ sont linéairement dépendantes et donc

$$T_-^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma_j T_+^{(2)}(x, \lambda_j) \quad \forall \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \quad (6.30)$$

avec $\gamma_j \neq 0$. On obtient alors un ensemble de données spectrales discrètes

$$(\gamma_j, \lambda_j)_{j=1, \dots, n}.$$

Cherchons à présent une relation de dispersion pour $a(\lambda)$. Prenons le cas $g < 0$ et considérons la fonction spectrale

$$\hat{a}(\lambda) = a(\lambda) \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j^*}{\lambda - \lambda_j} \quad (6.31)$$

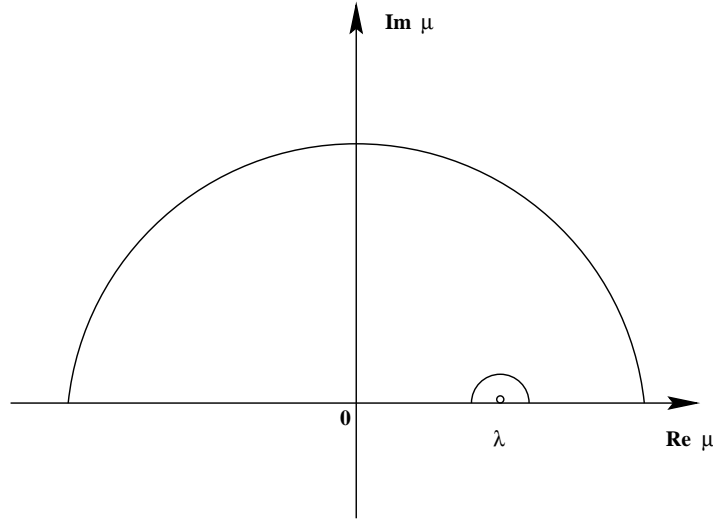


FIG. 6.1 – contour d'intégration

contrairement à $a(\lambda)$, $\hat{a}(\lambda)$ ne possède pas de zéro pour $Im(\lambda) > 0$. On a toutefois

$$|\hat{a}(\lambda)|^2 = |a(\lambda)|^2 = 1 - |b(\lambda)|^2. \quad (6.32)$$

Ainsi, en considérant l'intégration sur le contour (FIG. 6.1) du plan complexe, on aura pour λ réel

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\lambda-\xi} \frac{\ln \hat{a}(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu + \int_{\lambda+\xi}^{+\infty} \frac{\ln \hat{a}(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \right) = i\pi \ln \hat{a}(\lambda) \quad (6.33)$$

ce qui équivaut à

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \hat{a}(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu = i\pi \ln \hat{a}(\lambda). \quad (6.34)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de chaque membres de l'équation (6.34), on obtient

$$\text{Re} \ln \hat{a}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im} \ln \hat{a}(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \quad (6.35)$$

et

$$\text{Im} \ln \hat{a}(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re} \ln \hat{a}(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu. \quad (6.36)$$

L'équation (6.36) nous donne

$$\begin{aligned} \text{Im} \ln \hat{a}(\lambda) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu - \lambda - i0} - i\pi\delta(\lambda - \mu) \right) \text{Re} \ln \hat{a}(\mu) d\mu \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re} \ln \hat{a}(\mu)}{\mu - \lambda - i0} d\mu + i \text{Re} \ln \hat{a}(\lambda) \end{aligned}$$

ainsi

$$\ln \widehat{a}(\lambda) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \ln \widehat{a}(\mu)}{\mu - \lambda - i0} d\mu. \quad (6.37)$$

Maintenant puisque

$$\operatorname{Re} \ln \widehat{a}(\lambda) = \ln |\widehat{a}(\lambda)| = \frac{1}{2} \ln (1 - |b(\lambda)|^2), \quad (6.38)$$

l'équation (6.37) s'écrit

$$\ln \widehat{a}(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln (1 - |b(\mu)|^2)}{\mu - \lambda} d\mu. \quad (6.39)$$

Ainsi, on a la relation de dispersion de $a(\lambda)$ pour $g < 0$,

$$a(\lambda) = \exp \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln (1 - |b(\mu)|^2)}{\mu - \lambda} d\mu \right) \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \lambda_j^*}. \quad (6.40)$$

Pour $g > 0$, il faut à l'équation (6.40) enlever le facteur de Blaschke $\prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \lambda_j^*}$.

Calculons à présent $\{\ln a(\lambda), b(\mu)\}$ dans le cas $g < 0$ en utilisant les crochets de Poisson (6.22)-(6.26),

$$\begin{aligned} \{\ln a(\lambda), b(\mu)\} &= \{\ln \widehat{a}(\lambda), b(\mu)\} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\{\lambda_j^*, b(\mu)\}}{\lambda - \lambda_j^*} - \frac{\{\lambda_j, b(\mu)\}}{\lambda - \lambda_j} \right) \\ &= -\frac{g}{\lambda - \mu} b(\mu). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Identifions le résidu du deuxième membre et du troisième membre de l'équation (6.41) pour $\lambda = \mu = \lambda_j$, on a alors

$$\{b(\lambda_j), \lambda_k\} = -g b(\lambda_j) \delta_{jk}. \quad (6.42)$$

Montrons à présent que $b(\lambda_j)$ n'est rien d'autre que la donnée spectrale γ_j ; pour cela écrivons $T_-^{(1)}(x, \lambda)$ et $T_+^{(2)}(x, \lambda)$ sous la forme

$$T_-^{(1)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} f_-(x, \lambda) \\ g_-(x, \lambda) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_+^{(2)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} f_+(x, \lambda) \\ g_+(x, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

Grâce à (6.28), on peut écrire

$$a(\lambda) = f_-(x, \lambda) g_+(x, \lambda) - f_+(x, \lambda) g_-(x, \lambda). \quad (6.44)$$

De plus, avec (6.30), on a

$$\gamma_j = \frac{f_-(x, \lambda_j)}{f_+(x, \lambda_j)} = \frac{g_-(x, \lambda_j)}{g_+(x, \lambda_j)}. \quad (6.45)$$

A présent, grâce à l'équation fondamentale (6.13) et à la relation (6.15), nous pouvons trouver les différents crochets de Poisson entre les quantités $f_-(x, \lambda)$,

$g_+(x, \mu)$, $f_+(x, \nu)$ et $g_-(x, \zeta)$ comme nous l'avons déjà fait page 33 pour trouver les crochets de Poisson entre $a(\lambda), b(\mu), a^*(\nu)$ et $b^*(\zeta)$. Il vient

$$\{f_{\mp}(x, \lambda), f_{\pm}(x, \mu)\} = \{g_{\mp}(x, \lambda), g_{\pm}(x, \mu)\} = 0, \quad (6.46)$$

$$\{f_{\pm}(x, \lambda), f_{\pm}(x, \mu)\} = \{g_{\pm}(x, \lambda), g_{\pm}(x, \mu)\} = 0, \quad (6.47)$$

$$\{f_{\mp}(x, \lambda), g_{\pm}(x, \mu)\} = 0, \quad (6.48)$$

$$\{g_{\pm}(x, \lambda), f_{\pm}(x, \mu)\} = \pm \frac{g}{\lambda - \mu} (g_{\pm}(x, \lambda) f_{\pm}(x, \mu) - f_{\pm}(x, \lambda) g_{\pm}(x, \mu)). \quad (6.49)$$

Ces crochets de Poisson vont nous aider dans l'identification de $b(\lambda_j)$ avec γ_j , en effet, utilisons les pour le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & \{a(\lambda), \gamma_j\} \\ &= \left\{ f_-(x, \lambda) g_+(x, \lambda) - f_+(x, \lambda) g_-(x, \lambda), \frac{f_-(x, \lambda_j)}{f_+(x, \lambda_j)} \right\} \\ &= - \frac{f_-(x, \lambda) f_-(x, \lambda_j)}{f_+^2(x, \lambda_j)} \{g_+(x, \lambda), f_+(x, \lambda_j)\} \\ &\quad - \frac{f_+(x, \lambda)}{f_+(x, \lambda_j)} \{g_-(x, \lambda), f_-(x, \lambda_j)\} \\ &= - \frac{g}{\lambda - \lambda_j} \left[\frac{f_-(x, \lambda) f_-(x, \lambda_j)}{f_+^2(x, \lambda_j)} (g_+(x, \lambda) f_+(x, \lambda_j) - f_+(x, \lambda) g_+(x, \lambda_j)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{f_+(x, \lambda)}{f_+(x, \lambda_j)} (g_-(x, \lambda) f_-(x, \lambda_j) - f_-(x, \lambda) g_-(x, \lambda_j)) \right] \\ &= - \frac{g}{\lambda - \lambda_j} a(\lambda) \gamma_j \\ &\quad + \frac{g}{\lambda - \lambda_j} f_+(x, \lambda) f_-(x, \lambda) \underbrace{\left(\frac{f_-(x, \lambda_j) g_+(x, \lambda_j)}{f_+^2(x, \lambda_j)} - \frac{g_-(x, \lambda_j)}{f_+(x, \lambda_j)} \right)}_{0 \text{ grâce à (6.45)}} \end{aligned} \quad (6.50)$$

ainsi,

$$\{a(\lambda), \gamma_j\} = \frac{g}{\lambda - \lambda_j} a(\lambda) \gamma_j. \quad (6.51)$$

En identifiant (6.51) à (6.25), on remarque que

$$\gamma_j = b(\lambda_j). \quad (6.52)$$

Dans ce paragraphe et le précédent, nous sommes passé des données de $(\psi(x), \psi^*(x))$ caractérisant la matrice de transfert $T(x, y, \lambda)$ aux données * dites spectrales $(b(\lambda), b^*(\lambda), \lambda_j, \gamma_j)$ qui vont nous servir à définir les variables angle-action qui nous permettrons de linéariser l'équation du mouvement.

Dans la littérature, une telle transformation $(\psi(x), \psi^(x)) \rightarrow (b(\lambda), b^*(\lambda), \lambda_j, \gamma_j)$ est appelée transformation spectrale inverse.

6.3 Variables angle-action

Définissons la fonction

$$\varphi(\lambda) = \arg b(\lambda) \quad (6.53)$$

avec $|b(\lambda)| \neq 0$. On a naturellement $0 \leq \varphi(\lambda) < 2\pi$. Regardons si $\varphi(\lambda)$ ne peut être une variable de type angle et cherchons lui alors une variable canoniquement conjuguée du type action. Quelque soit la fonction $f(|b(\lambda)|^2)$, on a :

$$\begin{aligned} & \left\{ f(|b(\lambda)|^2), \varphi(\mu) \right\} \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta f(|b(\lambda)|^2)}{\delta \psi(x)} \frac{\delta \varphi(\mu)}{\delta \psi^*(x)} - \frac{\delta f(|b(\lambda)|^2)}{\delta \psi^*(x)} \frac{\delta \varphi(\mu)}{\delta \psi(x)} \right) dx \\ &= i \frac{\partial f(y)}{\partial y} \Big|_{y=|b(\lambda)|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta |b(\lambda)|^2}{\delta \psi(x)} \frac{\delta \varphi(\mu)}{\delta \psi^*(x)} - \frac{\delta |b(\lambda)|^2}{\delta \psi^*(x)} \frac{\delta \varphi(\mu)}{\delta \psi(x)} \right) dx \\ &= \frac{\partial f(y)}{\partial y} \Big|_{y=|b(\lambda)|^2} \left\{ |b(\lambda)|^2, \varphi(\mu) \right\} \\ &= f'(|b(\lambda)|^2) \left\{ |b(\lambda)|^2, \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{b(\mu)}{b^*(\mu)} \right) \right\} \\ &= \frac{f'(|b(\lambda)|^2)}{2i} \frac{b^*(\mu)}{b(\mu)} \left\{ |b(\lambda)|^2, \frac{b(\mu)}{b^*(\mu)} \right\} \\ &= \frac{f'(|b(\lambda)|^2)}{2i} \left(\frac{1}{b(\mu)} \left\{ |b(\lambda)|^2, b(\mu) \right\} - \frac{1}{b^*(\mu)} \left\{ |b(\lambda)|^2, b^*(\mu) \right\} \right) \\ &= \frac{f'(|b(\lambda)|^2)}{2i} \left(\frac{b(\lambda)}{b(\mu)} + \frac{b^*(\lambda)}{b^*(\mu)} \right) \{b^*(\lambda), b(\mu)\} \\ &= -2i\pi g f'(|b(\lambda)|^2) (1 + \varepsilon |b(\lambda)|^2) \delta(\lambda - \mu). \end{aligned}$$

Ainsi, si on choisit une fonction f de la forme $f(x) = -\frac{1}{2\pi g} \ln(1 + \varepsilon x)$, on aura

$$\left\{ f(|b(\lambda)|^2), \varphi(\mu) \right\} = \delta(\lambda - \mu) \quad (6.54)$$

où finalement, $f(|b(\lambda)|^2)$ n'est rien d'autre que la quantité canoniquement conjuguée $\varphi(\lambda)$ que l'on appellera

$$\rho(\lambda) = f(|b(\lambda)|^2) \quad (6.55)$$

$$\{\rho(\lambda), \varphi(\mu)\} = \delta(\lambda - \mu). \quad (6.56)$$

Introduisons à présent les données spectrales discrètes. En effet, en réécrivant la relation (6.42), sachant (6.52), on a

$$\{\gamma_j, \lambda_k\} = -g\gamma_j \delta_{jk} \quad (6.57)$$

et par conséquent

$$\left\{ -\frac{1}{g} \ln \gamma_j, \lambda_k \right\} = \delta_{jk}. \quad (6.58)$$

Il semble apparaître que les quantités $-\frac{1}{g} \ln \gamma_j$ et λ_k soient conjuguées, mais il est plus intéressant de définir d'autres quantités qui s'avèreront plus explicite par la suite. Utilisons pour cela la relation complémentaire

$$\{\gamma_j, \lambda_k^*\} = 0 \quad (6.59)$$

qui induit que

$$\left\{ -\frac{1}{g} \ln \gamma_j, \lambda_k^* \right\} = 0. \quad (6.60)$$

Décomposons à présent les relations (6.58) et (6.60) en leurs parties réelles et imaginaires ; on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g} \{ \ln |\gamma_j| + i \arg \gamma_j, Re \lambda_k + i Im \lambda_k \} &= \delta_{jk}, \\ \text{et} \\ -\frac{1}{g} \{ \ln |\gamma_j| + i \arg \gamma_j, Re \lambda_k - i Im \lambda_k \} &= 0. \end{aligned} \quad (6.61)$$

La première relation de (6.61), nous donne les relations

$$-\frac{1}{g} (\{ \ln |\gamma_j|, Re \lambda_k \} - \{ \arg \gamma_j, Im \lambda_k \}) = \delta_{jk} \quad (6.62)$$

et

$$-\frac{1}{g} (\{ \ln |\gamma_j|, Im \lambda_k \} + \{ \arg \gamma_j, Re \lambda_k \}) = 0 \quad (6.63)$$

et la seconde relation de (6.61) nous donne

$$-\frac{1}{g} (\{ \ln |\gamma_j|, Re \lambda_k \} + \{ \arg \gamma_j, Im \lambda_k \}) = 0 \quad (6.64)$$

et

$$-\frac{1}{g} (-\{ \ln |\gamma_j|, Im \lambda_k \} + \{ \arg \gamma_j, Re \lambda_k \}) = 0. \quad (6.65)$$

Maintenant en couplant (6.62) et (6.64), on obtient

$$-\frac{2}{g} \{ \ln |\gamma_j|, Re \lambda_k \} = \delta_{jk} \quad \text{et} \quad \frac{2}{g} \{ \arg \gamma_j, Im \lambda_k \} = \delta_{jk} \quad (6.66)$$

et en couplant (6.63) et (6.65), on a

$$\{ \ln |\gamma_j|, Im \lambda_k \} = \{ \arg \gamma_j, Re \lambda_k \} = 0. \quad (6.67)$$

Ainsi, de (6.66) et (6.67), on peut définir deux paires de variables canoniquement conjuguées

$$\begin{aligned} p_j &= -\frac{2}{g} Re \lambda_j & q_j &= \ln |\gamma_j| \\ \rho_j &= -\frac{2}{g} Im \lambda_j & \varphi_j &= -\arg \gamma_j \end{aligned} \quad j = 1, \dots, n \quad (6.68)$$

qui satisferont

$$\{q_j, p_k\} = \delta_{jk}, \quad (6.69)$$

$$\{\varphi_j, \rho_k\} = \delta_{jk} \quad (6.70)$$

et

$$\{q_j, \rho_k\} = \{\varphi_j, p_k\} = 0. \quad (6.71)$$

6.4 Intégrales du mouvement

Le générateur des intégrales du mouvement est la fonctionnelle[†]

$$F_L(\lambda) = \text{tr} T_L(\lambda) = a_L(\lambda) + a_L^*(\lambda). \quad (6.72)$$

A présent puisque

$$a(\lambda) = \lim_{L \rightarrow +\infty} e^{-i\lambda L} a_L(\lambda) \quad (6.73)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} F_L(\lambda) &= e^{i\lambda L} a(\lambda) + e^{-i\lambda L} a^*(\lambda) \\ &= 2|a(\lambda)| \cos(\lambda L + \arg a(\lambda)) \quad L \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Prenons ici $a(\lambda)$ au plus bas ordre, à savoir

$$a(\lambda) = 1 + o(1), \quad (6.75)$$

on a alors

$$F_L(\lambda) \simeq 2 \cos(\lambda L + \arg a(\lambda)) \quad L \rightarrow \infty. \quad (6.76)$$

Comparons alors (6.76) à (4.37) en posant $\theta = 0$, on obtient alors

$$\arg a(\lambda) = -g f_L(\lambda). \quad (6.77)$$

Or

$$\arg a(\lambda) = -i \ln a(\lambda) \quad (6.78)$$

puisque (6.75). Ainsi,

$$\ln a(\lambda) = -ig f_L(\lambda) = -ig \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k}{\lambda^k}. \quad (6.79)$$

Développons alors $\ln a(\lambda)$ en puissance inverse de λ grâce à la formule de dispersion (6.40) pour pouvoir identifier les quantités conservées I_n :

$$\ln a(\lambda) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 - |b(\mu)|^2) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu^{k-1}}{\lambda^k} d\mu + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_j^{*k} - \lambda_j^k}{k\lambda^k}. \quad (6.80)$$

Il vient donc que

$$I_k = -\frac{1}{2\pi g} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 - |b(\mu)|^2) \mu^{k-1} d\mu + \frac{i}{kg} \sum_{j=1}^n (\lambda_j^{*k} - \lambda_j^k) \quad (6.81)$$

et utilisant (6.55) et (6.68) I_k s'écrit

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mu) \mu^{k-1} d\mu + \frac{i}{kg} \left(\frac{-g}{2}\right)^k \sum_{j=1}^n \left((p_j + i\rho_j)^k - (p_j - i\rho_j)^k \right). \quad (6.82)$$

On s'aperçoit alors que toutes les intégrales du mouvement I_k ne s'expriment qu'avec l'aide des quantités $\rho(\mu), p_j$ et ρ_j que l'on pourra donc appeler variables

[†]Nous prenons ici $Q(\theta) = I$, puisque le domaine de définition de $\psi(x)$ et $\psi^*(x)$ est l'intervalle $[-L, +L]$ où $L \rightarrow +\infty$.

du type action. Leurs quantités conjuguées respectives $\varphi(\mu), q_j$ et φ_j sont alors appelées variables du type angle.

Ainsi, on a pour les quantités conservées principales

$$\mathcal{N} = I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mu) d\mu + \sum_{j=1}^n \rho_j \quad (6.83)$$

$$\mathcal{P} = I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mu) \mu d\mu - \frac{g}{2} \sum_{j=1}^n p_j \rho_j \quad (6.84)$$

et

$$\mathcal{H} = I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mu) \mu^2 d\mu + \frac{g^2}{4} \sum_{j=1}^n \left(p_j^2 \rho_j - \frac{\rho_j^3}{3} \right). \quad (6.85)$$

En fait, le passage des variables

$$(\psi(x), \psi^*(x))$$

aux variables

$$(\rho(\lambda), \varphi(\lambda), \rho_j, \varphi_j, p_j, q_j, j = 1, \dots, n)$$

trivialise complètement la dynamique du modèle de N.S., en effet en regardant le hamiltonien \mathcal{H} on s'aperçoit qu'il ne dépend que de $\rho(\lambda, t)$, ρ_j et p_j et donc

$$\frac{\partial \rho(\lambda, t)}{\partial t} = \{\mathcal{H}, \rho(\lambda, t)\} = 0, \quad (6.86)$$

$$\frac{d\rho_j}{dt} = \{\mathcal{H}, \rho_j\} = 0, \quad (6.87)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = \{\mathcal{H}, p_j\} = 0 \quad (6.88)$$

et

$$\frac{\partial \varphi(\lambda, t)}{\partial t} = \{\mathcal{H}, \varphi(\lambda, t)\} = \lambda^2, \quad (6.89)$$

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \{\mathcal{H}, \varphi_j\} = \frac{g^2}{4} (p_j^2 - \rho_j^2), \quad (6.90)$$

$$\frac{dq_j}{dt} = \{\mathcal{H}, q_j\} = \frac{g^2}{2} p_j \rho_j. \quad (6.91)$$

Les équations (6.86) à (6.91) montrent bien que $\rho(\lambda)$, ρ_j et p_j sont des variables de types action ; elles sont constantes dans le temps, et que $\varphi(\lambda)$, φ_j et q_j sont des variables de types angle ; elles sont linéaires vis-à-vis du temps.

Annexe A

Involution de \mathcal{N}, \mathcal{P} et \mathcal{H}

Cette annexe complète le chapitre 1 présentant le modèle de Schrödinger Nonlinéaire, nous montrons ici l'involution des quantités conservées \mathcal{N}, \mathcal{P} et \mathcal{H} vis-à-vis des crochets de Poisson.

$$\begin{aligned}
 & \{\mathcal{N}, \mathcal{P}\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{1}{2i} \left\{ \psi(x) \psi^*(x), \frac{\partial \psi}{\partial y} \psi^*(y) - \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \psi(y) \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{1}{2i} \left(\left\{ \psi(x) \psi^*(x), \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} \psi^*(y) + \left\{ \psi(x) \psi^*(x), \psi^*(y) \right\} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \psi(x) \psi^*(x), \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right\} \psi(y) - \left\{ \psi(x) \psi^*(x), \psi(y) \right\} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

en intégrant par partie le premier et le troisième terme de l'intégrant, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \{\mathcal{N}, \mathcal{P}\} \\
 &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \left(\left\{ \psi(x) \psi^*(x), \psi^*(x) \right\} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \left\{ \psi(x) \psi^*(x), \psi(y) \right\} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \delta(x-y) \left(\psi(x) \frac{\partial \psi^*}{\partial y} + \psi^*(x) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \psi(x) \psi^*(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\{\mathcal{N}, \mathcal{P}\} = 0 \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
& \{\mathcal{N}, \mathcal{H}\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \left\{ \psi(x) \psi^*(x), |\psi_y(y)|^2 + g |\psi(y)|^4 \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \left(\left\{ \psi(x) \psi^*(x), \psi_y(y) \psi_y^*(y) \right\} + g \underbrace{\left\{ |\psi(x)|^2, |\psi(y)|^4 \right\}}_0 \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \left(- \left\{ \psi(x) \psi^*(x), \psi(y) \right\} \psi_{yy}^*(y) \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \psi(x) \psi^*(x), \psi^*(y) \right\} \psi_{yy}(y) \right)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \ i \delta(x-y) \left(\psi(x) \psi_{yy}^*(y) - \psi^*(x) \psi_{yy}(y) \right) \\
&= i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\psi \psi_{xx}^* - \psi^* \psi_{xx} \right) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\psi_x \psi_x^* - \psi_x^* \psi_x \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\{\mathcal{N}, \mathcal{H}\} = 0 \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{P}, \mathcal{H}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{2i} \left\{ \mathcal{H}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \psi^*(y) - \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \psi(y) \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{i} \left(- \left\{ \mathcal{H}, \psi(y) \right\} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} + \left\{ \mathcal{H}, \psi^*(y) \right\} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

pour nous aider dans le calcul, calculons $\{\mathcal{H}, \psi(y)\}$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}, \psi(y)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\left\{ \psi_x(x) \psi_x^*(x), \psi(y) \right\} + g \left\{ \psi^2(x) \psi^{*2}(x), \psi(y) \right\} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(- \psi_{xx}(x) \underbrace{\left\{ \psi_x^*(x), \psi(y) \right\}}_{-i\delta(x-y)} + 2g \psi^2(x) \psi^*(x) \underbrace{\left\{ \psi^*(x), \psi(y) \right\}}_{-i\delta(x-y)} \right) \\
&= i \psi_{yy}(y) - 2ig |\psi(y)|^2 \psi(y)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
& \{\mathcal{P}, \mathcal{H}\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{i} \left(- \left(i\psi_{yy}(y) - 2ig |\psi(y)|^2 \psi(y) \right) \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right. \\
&\quad \left. + \left(-i\psi_{yy}^*(y) + 2ig |\psi(y)|^2 \psi^*(y) \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \underbrace{\left(-\psi_{yy}(y) \psi_y^*(y) - \psi_{yy}^*(y) \psi_y(y) \right)}_{-(\psi_y(y) \psi_y^*(y))_y} \\
&\quad + 2g |\psi(y)|^2 \left(\psi^*(y) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi(y) \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right) \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{-\psi_y(y) \psi_y^*(y)}_0 \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2g \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(|\psi(y)|^2 \left(\psi^*(y) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi(y) \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right) \right) \\
&= 2g \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\psi^2(y) \psi^*(y) \psi_y^*(y) + \psi^{*2}(y) \psi(y) \psi_y(y) \right) \\
&= 2g \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\frac{\psi^2(y)}{2} [\psi^{*2}(y)]_y + \frac{\psi^{*2}(y)}{2} [\psi^2(y)]_y \right) \\
&= g \psi^2(y) \psi^{*2}(y) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\{\mathcal{P}, \mathcal{H}\} = 0 \tag{A.7}$$

Annexe B

Condition de compatibilité pour N.S.

Pour compléter le paragraphe 2.2, on montre dans cet appendice que la condition de compatibilité

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad (\text{B.1})$$

avec

$$U(x, \lambda) = i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 + i\sqrt{g} \left(\underbrace{\psi^*(x)\sigma_+ - \psi(x)\sigma_-}_Q \right) \quad (\text{B.2})$$

$$V(x, \lambda) = i\frac{\lambda^2}{2}\sigma_3 + ig|\psi(x)|^2\sigma_3 + \sqrt{g}(\psi_x^*(x)\sigma_+ + \psi_x(x)\sigma_-) + i\sqrt{g}\lambda(\psi^*(x)\sigma_+ - \psi(x)\sigma_-)$$

est équivalente à la donnée de l'équation de Schrödinger Nonlinéaire

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2g|\psi|^2\psi. \quad (\text{B.3})$$

Calculons d'abord les termes simples, c'est-à-dire d'ordre 0 en ψ et ψ^* :

$$\begin{aligned} & (U_t - V_x)_{\text{termes simples}} \\ &= i\sqrt{g}Q_t - \sqrt{g}(\psi_{xx}^*\sigma_+ + \psi_{xx}\sigma_-) - i\sqrt{g}\lambda(\psi_x^*\sigma_+ - \sigma_-\psi_x) \\ & [U, V]_{\text{termes simples}} \\ &= \left[i\frac{\lambda}{2}\sigma_3, \sqrt{g}(\psi_x^*\sigma_+ + \psi_x\sigma_-) + i\sqrt{g}\lambda(\psi^*\sigma_+ - \psi\sigma_-) \right] + \left[i\sqrt{g}Q, i\frac{\lambda^2}{2}\sigma_3 \right] \\ &= i\frac{\lambda}{2}\sqrt{g}(2\sigma_+\psi_x^* - 2\sigma_-\psi_x) - \frac{\lambda^2}{2}\sqrt{g}(2\sigma_+\psi^* + 2\sigma_-\psi) \\ &\quad - \sqrt{g}\frac{\lambda^2}{2}(-2\sigma_+\psi^* - 2\sigma_-\psi) \\ &= i\lambda\sqrt{g}(\psi_x^*\sigma_+ - \psi_x\sigma_-) \end{aligned}$$

ainsi

$$(U_t - V_x + [U, V])_{\text{termes simples}} = \sqrt{g}(\sigma_+(i\psi_t^* - \psi_{xx}^*) + \sigma_-(-i\psi_t - \psi_{xx})). \quad (\text{B.4})$$

Calculons à présent les termes quadratiques :

$$\begin{aligned} & (U_t - V_x)_{\text{termes quadratiques}} \\ &= -ig \left(|\psi|^2 \right)_x \sigma_3 \\ & [U, V]_{\text{termes quadratiques}} = [i\sqrt{g}Q, \sqrt{g}(\psi_x^* \sigma_+ + \psi_x \sigma_-)] \\ &= ig(\psi_x^* \psi + \psi^* \psi_x) \sigma_3 = ig \left(|\psi|^2 \right)_x \sigma_3 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

\implies

$$(U_t - V_x + [U, V])_{\text{termes quadratiques}} = 0$$

Il ne nous reste plus que les termes cubiques :

$$\begin{aligned} & (U_t - V_x)_{\text{termes cubiques}} = 0 \\ & [U, V]_{\text{termes cubiques}} \\ &= \left[i\sqrt{g}Q, ig |\psi|^2 \sigma_3 \right] \\ &= 2g^{\frac{3}{2}} |\psi|^2 (\sigma_+ \psi^* + \sigma_- \psi) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

En rassemblant les termes aux différents ordres on obtient

$$\begin{aligned} U_t - V_x + [U, V] &= \sqrt{g} \left(\sigma_+ \left(i\psi_t^* - \psi_{xx}^* + 2g |\psi|^2 \psi^* \right) \right. \\ & \quad \left. + \sigma_- \left(-i\psi_t - \psi_{xx} + 2g |\psi|^2 \psi \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Ainsi puisque la condition de compatibilité est

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad (\text{B.8})$$

on a grâce à (B.7)

$$\sqrt{g} \begin{pmatrix} 0 & i\psi_t^* - \psi_{xx}^* + 2g |\psi|^2 \psi^* \\ -i\psi_t - \psi_{xx} + 2g |\psi|^2 \psi & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.9})$$

ce qui est bien équivalent à l'équation de Schrödinger Nonlinéaire

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2g |\psi|^2 \psi \quad (\text{B.10})$$

Deuxième partie

Etude d'autres modèles classiques intégrables continus et discrets

Au cours de la première partie, nous avons largement étudié l'intégrabilité du modèle de Schrödinger Nonlinéaire ; nous avons été jusqu'à trouver des variables angle-action permettant de linéariser l'équation du mouvement de celui-ci.

A présent, nous allons voir que le schéma utilisé pour N.S.- à savoir la définition du problème auxiliaire, la représentation (U, V) , puis la formulation Hamiltonienne - peuvent parfaitement s'appliquer à d'autres modèles continus. Pour ces derniers, nous n'iront pas jusqu'à linéariser leurs équations du mouvement, acte qui peut se faire en suivant le même cheminement qu'au cours du paragraphe I.6 pour le modèle N.S.. Pour certains modèles, il apparaît de nettes similitudes dans la forme de la matrice r , comme par exemple pour le modèle N.S. et le modèle de Heisenberg, ce qui est la manifestation sous-jacente de l'existence de classe d'équivalence de "jauge" parmi les systèmes intégrables.

Nous verrons aussi au cours de cette partie, qu'il est possible de discrétiser les méthodes utilisées pour les modèles continus afin d'étudier l'intégrabilité de modèles discrets, modèles qui sont tout aussi intéressants en Physique que les modèles continus.

Chapitre 3

Modèles intégrables continus

3.1 Modèle de Heisenberg

3.1.1 Equation du mouvement

Plaçons nous sur la ligne réelle \mathbb{R} et définissons en chaque point x de celle-ci un espace vectoriel où sera défini un vecteur spin

$$\vec{S}(x, t) = (S_1(x, t), S_2(x, t), S_3(x, t))$$

tel que

$$S^2(x, t) = 1 \quad (3.1)$$

et

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \vec{S}(x, t) = \vec{S}_0 \quad (3.2)$$

où \vec{S}_0 est un vecteur constant que l'on peut prendre égal à $(0, 0, 1)$ sans perte de généralité. Les différentes composantes du spin $\vec{S}(x, t)$ satisfont aux crochets de Poisson suivants*

$$\{S_a(x, t), S_b(x, t)\} = -\varepsilon_{abc} S_c(x, t) \delta(x - y). \quad (3.3)$$

L'équation du mouvement associée au modèle de Heisenberg est l'équation

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \vec{S} \wedge \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

celle-ci peut-être déduite de l'Hamiltonien

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.5)$$

*A présent la répétition d'un indice parmi les indices a, b ou c indiquera qu'il existe une sommation sur lui.

en effet

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_c}{\partial t} &= \{\mathcal{H}, S_c\} \\ &= \varepsilon_{abc} S_a \frac{\partial S_b}{\partial x} \\ &= \left(\vec{S} \wedge \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial x^2} \right)_c.\end{aligned}\quad (3.6)$$

3.1.2 Représentation (U, V) du modèle de Heisenberg

L'équation du mouvement (3.4) est représentable sous forme de représentation de courbure nulle pour une connexion $(U(x, \lambda), V(x, \lambda))$ de la forme

$$U(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}, \quad (3.7)$$

$$V(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2} \mathbf{S} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} \mathbf{S} \quad (3.8)$$

où

$$\mathbf{S} = \vec{S} \cdot \vec{\sigma} = S_a \sigma_a \quad (3.9)$$

et

$$\mathbf{S}^2 = I. \quad (3.10)$$

En utilisant la relation de compatibilité

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0 \quad (3.11)$$

on retrouve l'équation du mouvement (3.4). En effet, (3.11) s'écrit explicitement

$$\frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_t - \frac{i\lambda^2}{2} \mathbf{S}_x - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{S}_x \mathbf{S})_x + \frac{\lambda}{2i} \left[\mathbf{S}, \frac{i\lambda^2}{2} \mathbf{S} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{S}_x \mathbf{S} \right] = 0 \quad (3.12)$$

Le terme en λ^3 est trivialement nul, les termes en λ^2 de (3.12) donnent aussi zéro en se rappelant (3.10)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_x + \frac{1}{2} [\mathbf{S}, \mathbf{S}_x \mathbf{S}] &= \mathbf{S}_x + \frac{1}{2} (\mathbf{S} \mathbf{S}_x \mathbf{S} - \mathbf{S}_x) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{S} (\mathbf{S})_x^2 \\ &= 0\end{aligned}\quad (3.13)$$

et les termes en λ donnent en utilisant (3.10)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_t &= i (\mathbf{S}_x \mathbf{S})_x \\ &= \frac{i}{2} (\mathbf{S}_x \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{S}_x)_x \\ &= \frac{1}{2i} [\mathbf{S}, \mathbf{S}_{xx}] \\ &= \varepsilon_{abc} S_a (S_b)_{xx} \sigma_c\end{aligned}\quad (3.14)$$

qui est équivalent à

$$(S_c)_t = \varepsilon_{abc} S_a (S_b)_{xx} \quad (3.15)$$

qui est bien l'équation du mouvement (3.4).

3.1.3 Formulation Hamiltonienne du modèle de Heisenberg

Le problème auxiliaire pour ce modèle est le suivant

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}(x) F. \quad (3.16)$$

La matrice de transfert est solution du problème auxiliaire (3.16) pour la condition initiale

$$T(x, y, \lambda)|_{x=y} = I \quad (3.17)$$

et cette matrice s'exprime de la manière suivante

$$T(x, y, \lambda) = \widehat{\exp} \left(\frac{\lambda}{2i} \int_y^x S(z) dz \right) \quad y < x \quad (3.18)$$

avec $T(x, y, \lambda)|_{\lambda=0} = I$. De plus, la matrice $T(x, y, \lambda)$ possède les propriétés évoquées au chapitre I.3.

Montrons à présent qu'on peut définir pour le modèle de Heisenberg une matrice $r(\lambda, \mu)$ qui nous permettra de prouver l'existence d'une infinité de quantités conservées en involution vis à vis des crochets de Poisson signe de la complète intégrabilité du modèle. Considérons donc les crochets de Poisson usuels pour le modèle de Heisenberg

$$\{S_a(x, t), S_b(x, t)\} = -\varepsilon_{abc} S_c(x, t) \delta(x - y) \quad (3.19)$$

et regroupons-les grâce au crochet de Poisson tensoriel et à la matrice $\mathbf{S}(x)$ sous une même expression

$$\{\mathbf{S}(x) \otimes \mathbf{S}(y)\} = -\varepsilon_{abc} \sigma_a \otimes \sigma_b S_c(x, t) \delta(x - y). \quad (3.20)$$

Puisque $P = \frac{1}{2}(I + \sigma_i \otimes \sigma_i)$, on a

$$P(\sigma_c \otimes I - I \otimes \sigma_c) = i\varepsilon_{abc} \sigma_a \otimes \sigma_b, \quad (3.21)$$

ainsi (3.20) devient

$$\begin{aligned} \{\mathbf{S}(x) \otimes \mathbf{S}(y)\} &= iP(\mathbf{S}(x) \otimes I - I \otimes \mathbf{S}(x)) \delta(x - y) \\ &= i[P, \mathbf{S}(x) \otimes I] \delta(x - y). \end{aligned} \quad (3.22)$$

La matrice $U(x, \lambda)$ pour le modèle de Heisenberg s'écrit

$$U(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}, \quad (3.23)$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} &= \frac{\lambda\mu}{4i} [P, \mathbf{S}(x) \otimes I] \delta(x - y) \\ &= \frac{\lambda\mu}{2(\lambda - \mu)} [P, U(x, \lambda) \otimes I - U(x, \mu) \otimes I] \delta(x - y). \end{aligned}$$

Le crochet de Poisson fondamental s'écrit donc pour le modèle de Heisenberg

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = [r(\lambda, \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)] \delta(x - y) \quad (3.24)$$

qui possède la même forme que celle du crochet de Poisson fondamental pour N.S. (I.5.19) à cela près que

$$r_H(\lambda, \mu) = \frac{\lambda\mu}{2(\lambda - \mu)} P = \frac{\lambda\mu}{2} r_{N.S.}. \quad (3.25)$$

Ce genre de matrice r , (3.25) et (I.5.18), sont dites matrices r rationnelles pour les distinguer d'autres matrices r dites elles matrices r trigonométriques dont on va voir un exemple au paragraphe 3.2.

A présent, en suivant le même raisonnement que celui adopté de l'équation (I.5.21) à l'équation (I.5.29) et au cours du paragraphe I.5.2, on aboutit à

$$\{F(\lambda), F(\mu)\} = 0 \quad \forall (\lambda, \mu) \quad (3.26)$$

où

$$F(\lambda) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} tr(T(x, y, \lambda)). \quad (3.27)$$

Ensuite de $F(\lambda)$, on peut tirer les intégrales du mouvement I_n qui sont en involution entre elles

$$\{I_n, I_m\} = 0 \quad \forall (n, m). \quad (3.28)$$

3.1.4 Equivalence de jauge entre le modèle de Heisenberg et le modèle de Schrödinger Nonlinéaire

Nous avons pour le modèle de Schrödinger Nonlinéaire et pour $g = 1$

$$U_{N.S.}(\lambda) = i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 + U_0, \quad (3.29)$$

$$V_{N.S.}(\lambda) = i\frac{\lambda^2}{2}\sigma_3 + V_0 + i\lambda(\psi^*\sigma_+ - \psi\sigma_-) \quad (3.30)$$

et

$$U_H(\lambda) = \frac{\lambda}{2i}\mathbf{S}, \quad (3.31)$$

$$V_H(\lambda) = i\frac{\lambda^2}{2}\mathbf{S} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial x}\mathbf{S} \quad (3.32)$$

où

$$U_0 = i(\psi^*\sigma_+ - \psi\sigma_-) \quad \text{et} \quad V_0 = i|\psi|^2\sigma_3 + (\psi_x^*\sigma_+ + \psi_x\sigma_-). \quad (3.33)$$

Contrairement au modèle de Heisenberg, la connexion $(U_{N.S.}, V_{N.S.})$ du modèle de Schrödinger Nonlinéaire comporte des termes constant, essayons de les éliminer grâce à un changement de Jauge.

Soit $\psi(x, t)$ une solution de l'équation Nonlinéaire de Schrödinger. On sait que ce sont les termes en λ^0 , à savoir U_0 et V_0 , qui donnent l'équation du mouvement du modèle de Schrödinger Nonlinéaire dans l'équation de compatibilité (I.2.4), ainsi définissons $\Omega(x, t)$ une matrice unitaire telle qu'elle satisfasse le problème auxiliaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial x} &= U_0\Omega, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial t} &= V_0\Omega. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Considérons la transformation de jauge induite par $\Omega^{-1}(x, t)$ [on peut se référer à l'équation (I.2.6)]

$$\begin{aligned} U_{N.S.}^{\Omega^{-1}}(\lambda) &= -\Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \Omega^{-1} U_{N.S.}(\lambda) \Omega, \\ V_{N.S.}^{\Omega^{-1}}(\lambda) &= -\Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega^{-1} V_{N.S.}(\lambda) \Omega. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} U_{N.S.}^{\Omega^{-1}}(\lambda) &= -\Omega^{-1} U_0 \Omega + \Omega^{-1} \left(i \frac{\lambda}{2} \sigma_3 + U_0 \right) \Omega \\ &= i \frac{\lambda}{2} \Omega^{-1} \sigma_3 \Omega \\ U_{N.S.}^{\Omega^{-1}}(\lambda) &= \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S} = U_H(\lambda) \end{aligned} \quad (3.36)$$

où

$$\mathbf{S} = -\Omega^{-1}(x, t) \sigma_3 \Omega(x, t). \quad (3.37)$$

De la même manière, on trouve

$$\begin{aligned} V_{N.S.}^{\Omega^{-1}} &= i \frac{\lambda^2}{2} \Omega^{-1} \sigma_3 \Omega + \lambda \Omega^{-1} U_0 \Omega \\ V_{N.S.}^{\Omega^{-1}} &= \frac{\lambda^2}{2i} \mathbf{S} + \lambda \Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} \mathbf{S} &= \Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \Omega^{-1} \sigma_3 \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Omega^{-1} \sigma_3 \Omega \\ &= \Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \Omega^{-1} \sigma_3 U_0 \sigma_3 \Omega \\ &= \Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \Omega^{-1} U_0 \Omega \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\Omega^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} \mathbf{S}. \quad (3.38)$$

Par conséquent,

$$V_{N.S.}^{\Omega^{-1}} = \frac{\lambda^2}{2i} \mathbf{S} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} \mathbf{S} = V_H(\lambda). \quad (3.39)$$

Au vue des relations ici démontrées, (3.36) et (3.39), nous pouvons dire que la matrice \mathbf{S} définie par (3.37) est solution du modèle de Heisenberg. Les modèle de Heisenberg et de Schrödinger Nonlinéaire sont comme on vient de le voir équivalent de jauge; c'est pour cela, qu'entre autre, ils possèdent chacun une matrice r rationnelle qui sont liées simplement par la relation

$$r_H(\lambda, \mu) = \frac{\lambda \mu}{2} r_{N.S.}(\lambda, \mu). \quad (3.40)$$

3.2 Modèle de sine-Gordon

3.2.1 Equation du mouvement

Le champs scalaire massif $\varphi(x, t)$ est solution du modèle de sine-Gordon (S.G.) si il satisfait l'équation nonlinéaire

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{m^2}{\beta} \sin(\beta\varphi) = 0 \quad (3.41)$$

où β et m sont des paramètres réels positifs. En théorie des champs, m est la masse associée au champs φ et β est une constante de couplage. Prenons des conditions initiales et aux limites telles que

$$\varphi(x, 0) = \varphi(x),$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0 \quad \left[\frac{2\pi}{\beta} \right] \quad (3.42)$$

et

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.43)$$

La densité lagrangienne associée à l'équation du mouvement (3.41) est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta\varphi)), \quad (3.44)$$

ainsi la quantité conjugués à $\varphi(x, t)$ est

$$\pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.45)$$

D'après (3.43),

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \pi(x, t) = 0. \quad (3.46)$$

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\pi(x)$ sont canoniquement conjuguées par conséquent

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \{\pi(x), \pi(y)\} = 0 \quad (3.47)$$

et

$$\{\pi(x), \varphi(y)\} = \delta(x - y). \quad (3.48)$$

L'équation du mouvement (3.41) peut, grâce aux crochets de Poisson (3.47) et (3.48), être mise sous la forme canonique

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \{\mathcal{H}, \varphi\} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = \{\mathcal{H}, \pi\} \quad (3.50)$$

grâce à l'Hamiltonien

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta\varphi)) \right) dx. \quad (3.51)$$

Les quantités conservées principales sont le Hamiltonien \mathcal{H} , la charge topologique

$$\mathcal{Q} = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx \quad (3.52)$$

et la quantité du mouvement

$$\mathcal{P} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx. \quad (3.53)$$

Il existe bien sûr une infinité de ces quantités conservées comme dans le cas du modèle de Schrödinger Nonlinéaire.

3.2.2 Représentation (U, V) du modèle de sine-Gordon

L'équation (3.41) admet une représentation de courbure nulle avec la connexion $(U(x, t), V(x, t))$ de la forme

$$U(\lambda) = \frac{\beta}{4i} \pi \sigma_3 + \frac{k_0}{i} \sin\left(\frac{\beta\varphi}{2}\right) \sigma_1 + \frac{k_1}{i} \cos\left(\frac{\beta\varphi}{2}\right) \sigma_2 \quad (3.54)$$

$$V(\lambda) = \frac{\beta}{4i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \sigma_3 + \frac{k_1}{i} \sin\left(\frac{\beta\varphi}{2}\right) \sigma_1 + \frac{k_0}{i} \cos\left(\frac{\beta\varphi}{2}\right) \sigma_2 \quad (3.55)$$

où les matrices σ_i sont les matrices de Pauli et

$$k_0 = \frac{m}{4} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \quad k_1 = \frac{m}{4} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right). \quad (3.56)$$

En effet,

$$\begin{aligned} U_t - V_x &= \frac{i\beta}{2} \sigma_1 \cos\left(\frac{\beta\varphi}{2}\right) (k_1 \varphi_x - k_0 \varphi_t) \\ &\quad + \frac{i\beta}{2} \sigma_2 \sin\left(\frac{\beta\varphi}{2}\right) (k_1 \varphi_t - k_0 \varphi_x) \\ &\quad + \frac{i\beta}{4} \sigma_3 (\varphi_{xx} - \varphi_{tt}), \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} [U, V] &= \frac{i\beta}{2} \sigma_1 \cos\left(\frac{\beta\varphi}{2}\right) (-k_1 \varphi_x + k_0 \varphi_t) \\ &\quad + \frac{i\beta}{2} \sigma_2 \sin\left(\frac{\beta\varphi}{2}\right) (-k_1 \varphi_x + k_0 \varphi_t) \\ &\quad + i\sigma_3 \sin(\beta\varphi) (k_1^2 - k_0^2) \end{aligned} \quad (3.58)$$

et donc

$$\begin{aligned} U_t - V_x + [U, V] &= 0 \\ &\iff \\ \beta (\varphi_{xx} - \varphi_{tt}) - m^2 \sin(\beta\varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

(3.59) est bien l'équation de sine-Gordon (3.41).

3.2.3 Formulation Hamiltonienne du modèle S.G.

Connaissant les crochets de Poisson (3.47)-(3.48) caractérisant le modèle de sine-Gordon, essayons de calculer de manière brute le crochet de Poisson fondamental $\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\}$, ainsi on trouve facilement

$$\begin{aligned} \{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} &= \frac{\beta^2 m}{32} \left(- \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \cos \left(\frac{\beta \varphi}{2} \right) \sigma_3 \otimes \sigma_1 \right. \\ &\quad + \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) \sin \left(\frac{\beta \varphi}{2} \right) \sigma_3 \otimes \sigma_2 \\ &\quad + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \cos \left(\frac{\beta \varphi}{2} \right) \sigma_1 \otimes \sigma_3 \\ &\quad \left. - \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \sin \left(\frac{\beta \varphi}{2} \right) \sigma_2 \otimes \sigma_3 \right) \delta(x - y). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pour pouvoir appliquer les mêmes raisonnements qu'au chapitre I.5, il faut pouvoir mettre le membre de droite de (3.60) sous la forme

$$[r(\lambda, \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)] \delta(x - y). \quad (3.61)$$

Pour cela, on peut constater que $\pi(x)$ et $\pi(y)$ n'apparaissent pas dans le second membre de (3.60). Par conséquent, la matrice $r(\lambda, \mu)$ à découvrir doit être telle que

$$[r(\lambda, \mu), \sigma_3 \otimes I + I \otimes \sigma_3] = 0. \quad (3.62)$$

Dans l'expression (3.54) de $U(x, t)$, le coefficient associé à σ_3 ne contient que $\pi(x)$ alors que les coefficients associés à σ_1 et σ_2 ont d'une part tout deux la même structure et ne sont fonction que de $\varphi(x)$. Ainsi, particularisons σ_3 par rapport à σ_1 et σ_2 dans l'expression de $r(\lambda, \mu)$ en prenant par exemple $r(\lambda, \mu)$ sous la forme

$$r(\lambda, \mu) = f(\lambda, \mu) (I \otimes I - \sigma_3 \otimes \sigma_3) + g(\lambda, \mu) (\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2). \quad (3.63)$$

Maintenant, injectons l'expression de cette matrice (3.63) dans (3.61) et identifions le résultat au membre de droite de l'équation (3.60), afin d'en tirer des relations entre $f(\lambda, \mu)$ et $g(\lambda, \mu)$.

$$\begin{aligned} [r(\lambda, \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(x, \mu)] &= 2i (\sigma_1 \otimes \sigma_3 (g(\lambda, \mu) b(\mu) + f(\lambda, \mu) b(\lambda)) \\ &\quad + \sigma_3 \otimes \sigma_3 (g(\lambda, \mu) b(\lambda) + f(\lambda, \mu) b(\mu)) \\ &\quad - \sigma_3 \otimes \sigma_3 (g(\lambda, \mu) a(\mu) + f(\lambda, \mu) a(\lambda)) \\ &\quad - \sigma_3 \otimes \sigma_3 (g(\lambda, \mu) a(\lambda) + f(\lambda, \mu) a(\mu)) \end{aligned}$$

Ici $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ sont respectivement les coefficient devant σ_1 et σ_2 provenant de l'expression de $U(x, \lambda)$ (3.54). A présent, en identifiant (3.64) avec le membre de droite de (3.60), on obtient le système

$$\begin{aligned} g(\lambda, \mu) \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) + f(\lambda, \mu) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) &= \frac{\beta^2}{16} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \\ g(\lambda, \mu) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) + f(\lambda, \mu) \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) &= -\frac{\beta^2}{16} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \\ g(\lambda, \mu) \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) + f(\lambda, \mu) \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) &= \frac{\beta^2}{16} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \\ g(\lambda, \mu) \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) + f(\lambda, \mu) \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) &= -\frac{\beta^2}{16} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) \end{aligned}$$

qui a comme solution unique

$$\begin{aligned} g(\lambda, \mu) &= -\frac{\gamma\lambda\mu}{\lambda^2 - \mu^2} \\ f(\lambda, \mu) &= \frac{g\lambda^2 + \mu^2}{2\lambda^2 - \mu^2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

avec

$$\gamma = \frac{\beta^2}{8}. \quad (3.65)$$

En considérant, non plus λ et μ , mais leurs logarithmes respectifs

$$\alpha = \ln \lambda \quad \text{et} \quad \beta = \ln \mu, \quad (3.66)$$

les équations (3.64) deviennent

$$\begin{aligned} g &= -\frac{\gamma}{2 \sinh(\alpha - \beta)} \\ f &= \frac{\gamma \cosh(\alpha - \beta)}{2 \sinh(\alpha - \beta)} \end{aligned} \quad (3.67)$$

et donc

$$r(\lambda, \mu) = r(\alpha - \beta) \quad (3.68)$$

avec

$$r(\alpha) = \frac{\gamma}{\sinh \alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \alpha & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \cosh \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Nous qualifierons de trigonométrique ce genre de matrice r pour la distinguer de celles utilisées pour le modèle de Schrödinger Nonlinéaire ou pour le modèle de Heisenberg qui sont elles qualifiées de rationnelles.

Chapitre 4

Modèles intégrables discrets

Précédemment, nous avons traité des systèmes régis par une équation d'évolution différentielle où la variable spatiale x variait continûment sur tout le domaine de définition de celle-ci.

Cependant, en Physique, un rôle important est également joué par les modèles sur réseaux où la variable spatiale prend des valeurs discrètes. Généralement, ces modèles sont soit pris pour étudier une approximation de modèles continus, soit pris parce qu'ils cadrent avec une certaine réalité physique comme par exemple les oscillations des différents sites d'un cristal en Physique de la matière. Pour un système discret, de N sites par exemple, celui-ci possède un nombre fini N de degrés de liberté contrairement aux systèmes continus qui en possèdent forcément une infinité. Par conséquent, ces systèmes auront un nombre fini N d'intégrales du mouvement.

Pour étudier ces modèles discrets, nous considérerons que la variable discrète spatiale n , remplaçant dans le cas continu la variable x , prendra des valeurs sur un cercle (FIG. 2.1) tel que

$$n = 1, \dots, N \quad N + 1 \equiv 1 \quad n \in \mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

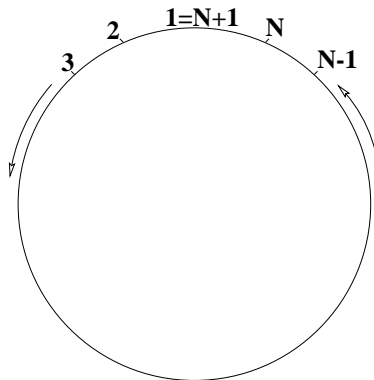


FIG. 4.1 – Cercle représentant $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

La variable temps restant bien entendu encore une variable continue.

Il faut noter que la base de l'espace fibré est maintenant l'espace-temps discrets $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{R}$; et que la fibre est l'espace auxiliaire \mathbb{C}^M où M est la dimension de celui-ci. Le problème auxiliaire dans le cas continu était

$$\frac{\partial F}{\partial x} = UF. \quad (4.2)$$

En discrétisant (4.2), on a au site n

$$\begin{aligned} F_{n+1} - F_n &= U_n F_n \Delta + o(\Delta^2) \\ F_{n+1} &= (1 + U_n \Delta) F_n + o(\Delta^2) \end{aligned}$$

ce qui nous permet de définir la matrice de transfert L_n du site n au site $n + 1$ par

$$F_{n+1} = L_n F_n \quad (4.3)$$

où

$$L_n = 1 + U_n \Delta. \quad (4.4)$$

(4.3) devient le problème auxiliaire pour les modèle discrets. Le transport temporel est quant à lui toujours définit par l'équation différentielle

$$\frac{dF_n}{dt} = V_n(t, \lambda) F_n. \quad (4.5)$$

En combinant à présent (4.3) et (4.5),

$$\begin{aligned} \frac{dF_{n+1}}{dt} &= \frac{dL_n}{dt} F_n + L_n \frac{dF_n}{dt} \\ &= V_{n+1} F_{n+1} \\ &\iff \\ \frac{dL_n}{dt} F_n + L_n V_n F_n &= V_{n+1} L_n F_n \end{aligned}$$

on obtient la relation de compatibilité pour les modèles discrets

$$\frac{dL_n}{dt} = V_{n+1} L_n - L_n V_n. \quad (4.6)$$

(4.6) est aussi appelée la condition de courbure nulle du système discret, et l'ensemble des deux équations (4.3) et (4.5), à savoir

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= L_n F_n \\ \frac{dF_n}{dt} &= V_n(t, \lambda) F_n, \end{aligned} \quad (4.7)$$

constitue la représentation de courbure nulle du système discret considéré. A présent considérons quelques exemples concrets.

4.1 Modèle discret de Heisenberg

Nous disposons d'une chaîne de spin $\vec{S}_n = (S_n^1, S_n^2, S_n^3)$ telle que

$$\left(\vec{S}_n\right)^2 = S^2 \quad (4.8)$$

où S est une constante et

$$\vec{S}_{n+N} = \vec{S}_n. \quad (4.9)$$

Les crochets de Poisson entre les différentes composantes de \vec{S}_n sont

$$\{S_n^a, S_m^b\} = -\varepsilon^{abc} \delta_{nm} S_n^c \quad (4.10)$$

où $a, b, c = 1, 2, 3$.

Pour le modèle continu nous avons

$$T(x + \Delta, x, \lambda) = \overleftarrow{\exp} \left(\frac{\lambda}{2i} \int_x^{x+\Delta} \mathbf{S}(z) dz \right) \quad (4.11)$$

ainsi prenons naïvement pour le modèle discret l'approximation à l'ordre Δ^1 de (4.11) en prenant la limite $\Delta \mathbf{S}(z) \simeq \mathbf{S}_n$:

$$T_{n+1} = \left(1 + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_n \right) T_n. \quad (4.12)$$

De (4.12), on obtient la matrice de transfert locale

$$L_n = 1 + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_n, \quad (4.13)$$

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\lambda}{2i} S_n^3 & \frac{\lambda}{2i} S_n^- \\ \frac{\lambda}{2i} S_n^+ & 1 - \frac{\lambda}{2i} S_n^3 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

où $\mathbf{S}_n = \vec{S}_n \cdot \vec{\sigma}$.

Essayons à présent à partir de L_n de construire le modèle intégrable discret de Heisenberg. Commençons par écrire les crochets de Poisson entre les matrices L_n aux différents sites :

$$\begin{aligned} \{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} &= -\frac{\lambda\mu}{4} \{S_n^a, S_m^b\} \sigma_a \otimes \sigma_b \\ &= \frac{\lambda\mu}{4} \varepsilon^{abc} \delta_{nm} S_n^c \sigma_a \otimes \sigma_b. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Calculons le commutateur suivant pour essayer de trouver une expression analogue au membre de gauche de (4.15) :

$$\begin{aligned} &[P, L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)] \delta_{nm} \\ &= \left[P, 1 \otimes 1 + \frac{\mu}{2i} 1 \otimes S_n + \frac{\lambda}{2i} S_n \otimes 1 - \frac{\lambda\mu}{4} S_n \otimes S_n \right] \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dans (4.16), grâce à la propriété de P , (I.5.11 page 23),

$$\left[P, 1 \otimes 1 - \frac{\lambda\mu}{4} S_n \otimes S_n \right] = 0.$$

Ainsi, (4.16) devient

$$\begin{aligned} [P, L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)] \delta_{nm} &= \left[P, \frac{\mu}{2i} 1 \otimes S_n + \frac{\lambda}{2i} S_n \otimes 1 \right] \delta_{nm} \\ &= (\mu \varepsilon^{acb} S_n^c \sigma_a \otimes \sigma_b + \lambda \varepsilon^{abc} S_n^a \sigma_a \otimes \sigma_b) \delta_{nm} \\ &= (\lambda - \mu) \varepsilon^{abc} S_n^a \sigma_a \otimes \sigma_b \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

De (4.17), on constate en regardant (4.15) que

$$\{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} = [r(\lambda, \mu), L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)] \delta_{nm} \quad (4.18)$$

avec

$$r(\lambda, \mu) = \frac{\lambda\mu}{4(\lambda - \mu)} P. \quad (4.19)$$

A présent, calculons le déterminant de L_n ,

$$\det L_n = 1 + \frac{\lambda^2}{4} S^2. \quad (4.20)$$

Ainsi, pour $\lambda = \pm \frac{2i}{S}$ on a $\det L_n = 0$, ce qui implique que $L_n \left(\pm \frac{2i}{S} \right)$ est telle que

$$L_n \left(\pm \frac{2i}{S} \right) = \varsigma \otimes \xi, \quad (4.21)$$

où ς et ξ sont 2 vecteurs. En effet, $L_n \left(\pm \frac{2i}{S} \right)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} L_n \left(\pm \frac{2i}{S} \right) &= S^{-1} \begin{pmatrix} S \pm S_n^3 & \pm S_n^- \\ \pm S_n^+ & S \mp S_n^3 \end{pmatrix} \\ &= S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{S \mp S_n^3}{\pm S_n^-} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \pm S_n^3 & \pm S_n^- \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ainsi le produit matriciel $L_{n+1}L_n$ nous donnera pour $\lambda = \pm \frac{2i}{S}$

$$\begin{aligned} L_{n+1}L_n|_{\lambda=\pm\frac{2i}{S}} &= \\ S^{-2} \begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{S \mp S_{n+1}^3}{\pm S_{n+1}^-} & \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} S \pm S_{n+1}^3 & \pm S_{n+1}^- \\ \pm S_{n+1}^+ & S \mp S_{n+1}^3 \end{pmatrix}}_{S \pm S_{n+1}^3 + \frac{S_{n+1}^- (S \mp S_n^3)}{S_n^-}} \begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{S \mp S_n^3}{\pm S_n^-} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \pm S_n^3 & \pm S_n^- \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Maintenant puisque $T_N \left(\pm \frac{2i}{S} \right) = \prod_{n=1}^N L_n \left(\pm \frac{2i}{S} \right)$, on a

$$\text{tr} \left(T_N \left(\pm \frac{2i}{S} \right) \right) = \prod_{n=1}^N S^{-1} \left(S \pm S_{n+1}^3 + \frac{S_{n+1}^- (S \mp S_n^3)}{S_n^-} \right). \quad (4.24)$$

En effet, la trace referme les produits scalaires en bout de chaîne. Considérons à présent le produit

$$\begin{aligned} &\text{tr} \left(T_N \left(\frac{2i}{S} \right) \right) \text{tr} \left(T_N \left(-\frac{2i}{S} \right) \right) \\ &= \prod_{n=1}^N S^{-2} \left(S + S_{n+1}^3 + \frac{S_{n+1}^- (S + S_n^3)}{S_n^-} \right) \left(S - S_{n+1}^3 + \frac{S_{n+1}^- (S - S_n^3)}{S_n^-} \right), \end{aligned}$$

ce produit après un long calcul se met sous la forme très commode

$$\text{tr} \left(T_N \left(\frac{2i}{S} \right) \right) \text{tr} \left(T_N \left(-\frac{2i}{S} \right) \right) = \prod_{n=1}^N \left(\frac{S^2 + \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}}{S^2} \right). \quad (4.25)$$

Maintenant prenons comme Hamiltonien

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \ln \left(\text{tr} \left(T_N \left(\frac{2i}{S} \right) \right) \text{tr} \left(T_N \left(-\frac{2i}{S} \right) \right) \right) \\ &= -2 \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{S^2 + \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}}{S^2} \right).\end{aligned}\quad (4.26)$$

Ceci est un bon choix de Hamiltonien car en prenant la limite continue

$$\begin{aligned}\vec{S}_n &= \vec{S}(x), \\ \vec{S}_{n+1} &= \vec{S}(x) + \Delta \frac{\partial \vec{S}(x)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{S}(x)}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (4.27)$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{S^2 + \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}}{S^2} &= 1 + \frac{\Delta^2}{4S^2} \vec{S}(x) \cdot \frac{\partial^2 \vec{S}(x)}{\partial x^2} + \dots \\ &= 1 - \frac{\Delta^2}{4S^2} \left(\frac{\partial \vec{S}(x)}{\partial x} \right)^2 + \dots\end{aligned}\quad (4.28)$$

où on a utilisé le fait que $(\vec{S}(x))^2 = S^2$ impliquant que

$$\vec{S}(x) \cdot \frac{\partial \vec{S}(x)}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{S}(x) \cdot \frac{\partial^2 \vec{S}(x)}{\partial x^2} = - \left(\frac{\partial \vec{S}(x)}{\partial x} \right)^2 \quad (4.29)$$

et en utilisant (4.28) dans le Hamiltonien (4.26), on obtient

$$\mathcal{H} = \Delta \int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 dx + o(\Delta^2) \quad (4.30)$$

qui est bien le Hamiltonien du modèle de Heisenberg continu. Le Hamiltonien \mathcal{H} (4.26) peut donc être pris raisonnablement comme le Hamiltonien du modèle discret de Heisenberg.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un lien entre le modèle discret de Heisenberg et le modèle continu de Schrödinger Nonlinéaire. Pour cela, utilisons la représentation de Holstein-Primakoff

$$\begin{aligned}S_n^+ &= \frac{2i}{\sqrt{g}} \frac{\psi_n^*}{\Delta} \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2}, \\ S_n^- &= \frac{2i}{\sqrt{g}} \frac{\psi_n}{\Delta} \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2}, \\ S_n^3 &= \frac{2}{g\Delta} \left(1 + \frac{g}{2} |\psi_n|^2 \right)\end{aligned}\quad (4.31)$$

où ψ_n est un champs scalaire tel que

$$\{\psi_n, \psi_m^*\} = i\Delta \delta_{nm} \quad (4.32)$$

Regardons donc si S_n^+ , S_n^- et S_n^3 ainsi définis peuvent prétendre être de bonnes variables pour le modèle de Heisenberg. Avec la définition (4.31), on a

$$S^2 = (S_n^3)^2 + S_n^- S_n^+ = \frac{4}{g^2 \Delta^2} = \text{C}^{\text{te}} \quad (4.33)$$

et grâce à (4.32), il vient

$$\begin{aligned} \{S_n^+, S_m^-\} &= -\frac{4}{g\Delta^2} \left\{ \psi_n^* \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2}, \psi_m \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_m|^2} \right\} \\ &= \frac{i\delta_{nm}}{g\Delta} (4 + 2g |\psi_n|^2) \\ &= 2iS_n^3 \delta_{nm} \\ \{S_n^+, S_m^-\} &= 2iS_n^3 \delta_{nm} \end{aligned} \quad (4.34)$$

et

$$\begin{aligned} \{S_n^\mp, S_m^3\} &= \frac{4i}{g^{\frac{3}{2}} \Delta^2} \left\{ \psi_n^\circ \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2}, \left(1 + \frac{g}{2} |\psi_n|^2\right) \right\} \\ &= \mp \frac{2}{g^{\frac{1}{2}} \Delta} \psi_n^\circ \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2} \delta_{nm} \\ \{S_n^\mp, S_m^3\} &= \mp iS_n^\mp \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\{S_n^\mp, S_m^3\} = \mp iS_n^\mp \delta_{nm}. \quad (4.36)$$

Les équations (4.33), (4.34) et (4.36) sont bien des équations caractéristiques de variables de spin, par conséquent les variables S_n^+ , S_n^- et S_n^3 peuvent décrire le modèle de Heisenberg. Ecrivons alors la matrice de transfert L_n d'un site au site le plus proche,

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\lambda}{ig\Delta} \left(1 + \frac{g}{2} |\psi_n|^2\right) & \frac{\lambda}{\sqrt{g}} \frac{\psi_n}{\Delta} \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{g}} \frac{\psi_n^*}{\Delta} \sqrt{1 + \frac{g}{4} |\psi_n|^2} & 1 - \frac{\lambda}{ig\Delta} \left(1 + \frac{g}{2} |\psi_n|^2\right) \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

En prenant la limite du continu,

$$\psi_n \longrightarrow \Delta \psi(x), \quad (4.38)$$

avec $\Delta \rightarrow 0$, on a

$$\{\psi_n, \psi_m\} = i\delta_{nm} \longrightarrow \{\psi(x), \psi^*(y)\} = i\delta(x-y) \approx \frac{i}{\Delta^2} \delta_{nm}. \quad (4.39)$$

Ainsi pour L_n , il vient

$$L_n(\lambda) \longrightarrow L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\lambda}{ig\Delta} & \frac{\lambda}{\sqrt{g}} \psi(x) \\ \frac{\lambda}{\sqrt{g}} \psi^*(x) & 1 - \frac{\lambda}{ig\Delta} \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

A présent en multipliant (4.40) par $\frac{ig\Delta}{\lambda}$, en redéfinissant ensuite le paramètre spectral λ de la façon suivante $\frac{g}{\lambda} \rightarrow \frac{\lambda}{2}$, et enfin en multipliant par σ_3 on obtient

$$\tilde{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{i\lambda}{2} \Delta & i\sqrt{g}\Delta\psi(x) \\ -i\sqrt{g}\Delta\psi^*(x) & 1 - \frac{i\lambda}{2} \Delta \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

qui est bien analogue à la matrice $L_{N,S}(x, \lambda)$ du modèle de Schrödinger Non-linéaire (I.5.23) prise à l'ordre Δ^2 . On a par conséquent mis ici une fois de plus le lien existant entre le modèle de Heisenberg et le modèle de Schrödinger Non-linéaire.

4.2 Modèle de Toda

Pour le modèle de Toda, l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n-q_{n-1}} \quad (4.42)$$

où q_n est la coordonnée réelle d'une particule classique centrée sur le site n d'un réseau unidimensionnel. Ce modèle correspond physiquement à un réseau unidimensionnel de particules, qui chacune d'elles est infiniment couplée à ses deux voisines. Cette équation du mouvement peut-être déduite de l'équation de Newton

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_n} \quad (4.43)$$

pour un système de N particule soumise au potentiel

$$\mathcal{V} = \sum_n (e^{q_n-q_{n-1}} - 1). \quad (4.44)$$

Le Hamiltonien est par conséquent

$$\mathcal{H} = \sum_n \frac{1}{2} p_n^2 + \mathcal{V} \quad (4.45)$$

et les crochets de Poisson entre les variables q_n et p_n sont

$$\begin{aligned} \{p_n, p_m\} &= \{q_n, q_m\} = 0 \\ \{p_n, q_m\} &= \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ce modèle de Toda admet aussi une représentation à courbure nulle avec

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} p_n + \lambda & e^{q_n} \\ -e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

et

$$V_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{q_n} \\ e^{-q_{n-1}} & \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

En effet, l'équation de compatibilité (4.6) donne la relation matricielle

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_{n_{tt}} & q_{n_t} e^{q_n} \\ q_{n_t} e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -e^{q_{n+1}} \\ e^{-q_n} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n + \lambda & e^{q_n} \\ -e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} p_n + \lambda & e^{q_n} \\ -e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -e^{q_n} \\ e^{-q_{n-1}} & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n-q_{n-1}} & q_{n_t} e^{q_n} \\ q_{n_t} e^{-q_n} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.49)$$

dont la première composante nous donne l'équation du mouvement.

4.3 Modèle de Volterra

L'équation du mouvement correspondant au modèle de Volterra est

$$\frac{du_n}{dt} = (u_{n+1} - u_{n-1}) u_n. \quad (4.50)$$

Ce modèle fut originellement conçu pour étudier l'évolution d'une population hiérarchisée composée d'individus en compétition avec les individus de la classe inférieure et de la classe juste supérieure. Ici l'espace des phases est décrit par les variables positives u_n qui ont entre elles les crochets de Poisson suivants

$$\begin{aligned} \{u_n, u_m\} = & u_n u_m ((\delta_{n,m+1} - \delta_{n,m-1}) \left(\frac{u_n + u_m}{2} - 2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \delta_{n,m+2} u_{n-1} - \frac{1}{2} \delta_{n,m-2} u_{m-1}). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Le Hamiltonien correspondant à ce modèle est

$$\mathcal{H} = \sum_n \ln u_n, \quad (4.52)$$

en effet

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt} &= \{\mathcal{H}, u_n\} \\ &= \sum_m \frac{1}{u_m} \{u_m, u_n\} \\ &= \sum_m u_n \left((\delta_{m,n+1} - \delta_{m,n-1}) \left(\frac{u_m + u_n}{2} - 2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \delta_{m,n+2} u_{m-1} - \frac{1}{2} \delta_{m,n-2} u_{m-1} \right) \\ &= (u_{n+1} - u_{n-1}) u_n \end{aligned}$$

ce qui est bien l'équation du mouvement (4.50).

La représentation à courbure nulle pour le modèle de Volterra est la suivante

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & u_n \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

$$V_n(\lambda) = \begin{pmatrix} u_n & \lambda u_n \\ -\lambda & -\lambda^2 + u_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Comme pour le modèle de Toda, la démonstration est élémentaire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & u_{n+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} & \lambda u_{n+1} \\ -\lambda & -\lambda^2 + u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & u_n \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \lambda & u_n \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n & \lambda u_n \\ -\lambda & -\lambda^2 + u_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & u_n u_{n+1} - u_n u_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Le premier élément de la relation matricielle (4.55) nous donne bien l'équation du mouvement (4.50). Le modèle de Volterra est donc, comme le modèle de Toda, représentable à l'aide d'une paire $(L_n(\lambda), V_n(\lambda))$.

Troisième partie

**Systemes Intégrables
Quantiques**

Bien entendu, pour passer des systèmes intégrables classiques aux systèmes intégrables quantiques, il faut se demander ce qu'il est nécessaire de modifier dans la méthode classique que l'on a vu jusqu'à présent. Cela afin de prendre en compte le fait essentiel, que l'on ne travaille plus avec des champs classiques, commutant entre eux, mais qu'au contraire, on travaille avec des champs quantiques obéissant à des règles de commutation particulières.

En effet, précédemment, la méthode consistait à trouver le crochet de Poisson fondamental (I.5.19)

$$\{U(x, \lambda) \otimes U(y, \mu)\} = [r(\lambda - \mu), U(x, \lambda) \otimes I + I \otimes U(y, \mu)] \delta(x - y),$$

d'en déduire ensuite, en se plaçant sur un réseau unidimensionnel (pages 25-26), une relation ultralocale (5.25)

$$\{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)] \delta_{nm}$$

et enfin d'arriver à une quantité $F_L(\lambda) = \text{tr} T_L(\lambda)$ (5.31) telle que

$$\{F_L(\lambda), F_L(\mu)\} = 0$$

qui génère les quantités conservées du système, dont le Hamiltonien de celui-ci, qui sont en involution entre elles, conférant ainsi une complète intégrabilité au système étudié. A présent, il est nécessaire de trouver des équations analogues dans le cas de systèmes quantiques.

Chapitre 5

Relations fondamentales de commutation et matrice \mathcal{R}

Nous nous placerons sur un réseau unidimensionnel constitué de N points appartenant à l'intervalle $[-L, L]$. En chacun de ces points, nous définissons un espace quantique E_i où agissent les opérateurs fonctionnels quantiques associés à ce site. L'espace quantique global E est donc le produit tensoriel de tous ces espaces

$$E = \bigotimes_{i=1}^N E_i. \quad (5.1)$$

5.1 Matrice \mathcal{R}

Comme on l'a dit il faut quantifier les méthodes déjà utilisées. Si on se rappelle bien, dans le cas des systèmes classiques, nombre de résultats (voir chap. I.5 et I.6) dérivait de la relation

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \quad (5.2)$$

où A, B, C et D étaient des matrices dont les éléments étaient des fonctionnelles dépendant de champs classiques. Or à présent ces fonctionnelles sont dépendantes de champs quantiques par conséquent en un site précis elles ne commutent pas entre elles et donc la relation (5.2) ne tient plus ; en particulier, au site i , on a

$$(L_i(\lambda) \otimes I)(I \otimes L_i(\mu)) \neq (I \otimes L_i(\mu))(L_i(\lambda) \otimes I) \quad (5.3)$$

ou bien en posant

$$\overrightarrow{L_i(\lambda)} = L_i(\lambda) \otimes I, \quad (5.4)$$

$$\overleftarrow{L_i(\lambda)} = I \otimes L_i(\lambda) \quad (5.5)$$

$$(5.6)$$

on a (5.3) réécrit sous la forme

$$[\overrightarrow{L_i(\lambda)}, \overleftarrow{L_i(\lambda)}] \neq 0. \quad (5.7)$$

Introduisons alors la matrice de c-nombres $R(\lambda, \mu)$ compensant le "manque de commutativité" entre $\overrightarrow{L_i(\lambda)}$ et $\overleftarrow{L_i(\mu)}$, de la manière suivante

$$R(\lambda, \mu) \overrightarrow{L_i(\lambda)} \overleftarrow{L_i(\mu)} = \overleftarrow{L_i(\mu)} \overrightarrow{L_i(\lambda)} R(\lambda, \mu). \quad (5.8)$$

Essayons de trouver une relation analogue concernant cette fois les matrices de transfert. On a

$$R(\lambda, \mu) \overrightarrow{T(\lambda)} \overleftarrow{T(\mu)} = R(\lambda, \mu) \underbrace{\left[\left(\prod_{i=1}^{\widehat{N}} L_i(\lambda) \right) \otimes I \right]}_{(1)} \underbrace{\left[I \otimes \left(\prod_{j=1}^{\widehat{N}} L_j(\mu) \right) \right]}_{(2)} \quad (5.9)$$

puisqu'en différents sites les fonctionnelles commutent, on peut utiliser à l'intérieur de (1) et de (2) la relation (5.2), ainsi

$$\begin{aligned} & R(\lambda, \mu) \overrightarrow{T(\lambda)} \overleftarrow{T(\mu)} \\ &= R(\lambda, \mu) \prod_{i=1}^{\widehat{N}} \overrightarrow{L_i(\lambda)} \prod_{j=1}^{\widehat{N}} \overleftarrow{L_j(\mu)} = \xi_N \\ &= R(\lambda, \mu) \overrightarrow{L_N(\lambda)} \overrightarrow{L_{N-1}(\lambda)} \dots \overrightarrow{L_1(\lambda)} \overleftarrow{L_N(\mu)} \overleftarrow{L_{N-1}(\mu)} \dots \overleftarrow{L_1(\mu)} \\ &= R(\lambda, \mu) \overrightarrow{L_N(\lambda)} \overrightarrow{L_{N-1}(\lambda)} \dots \overleftarrow{L_N(\mu)} \overleftarrow{L_1(\lambda)} \overleftarrow{L_{N-1}(\mu)} \dots \overleftarrow{L_1(\mu)} \end{aligned}$$

en faisant encore voyager $\overleftarrow{L_N(\mu)}$ vers la gauche

$$\begin{aligned} & R(\lambda, \mu) \overrightarrow{T(\lambda)} \overleftarrow{T(\mu)} \\ &= R(\lambda, \mu) \overrightarrow{L_N(\lambda)} \overleftarrow{L_N(\mu)} \overrightarrow{L_{N-1}(\lambda)} \dots \overrightarrow{L_1(\lambda)} \overleftarrow{L_{N-1}(\mu)} \dots \overleftarrow{L_1(\mu)} \\ &= \overleftarrow{L_N(\mu)} \overrightarrow{L_N(\lambda)} R(\lambda, \mu) \prod_{i=1}^{\widehat{N-1}} \overrightarrow{L_i(\lambda)} \prod_{j=1}^{\widehat{N-1}} \overleftarrow{L_j(\mu)} \\ &= \overleftarrow{L_N(\mu)} \overrightarrow{L_N(\lambda)} \xi_{N-1} \\ &= \overleftarrow{L_N(\mu)} \overrightarrow{L_N(\lambda)} \overleftarrow{L_{N-1}(\mu)} \overrightarrow{L_{N-1}(\lambda)} \dots \overleftarrow{L_1(\mu)} \overrightarrow{L_1(\lambda)} R(\lambda, \mu) \end{aligned}$$

les L_i commutent entre eux aux différents sites, on peut alors déplacer les $\overrightarrow{L_i(\lambda)}$ vers la droite et les $\overleftarrow{L_i(\mu)}$ vers la gauche

$$R(\lambda, \mu) \overrightarrow{T(\lambda)} \overleftarrow{T(\mu)} = \prod_{j=1}^{\widehat{N}} \overleftarrow{L_j(\mu)} \prod_{i=1}^{\widehat{N}} \overrightarrow{L_i(\lambda)} R(\lambda, \mu). \quad (5.10)$$

Et donc **la relation fondamentale** concernant les matrices de transfert s'écrit

$$R(\lambda, \mu) \overrightarrow{T(\lambda)} \overleftarrow{T(\mu)} = \overleftarrow{T(\mu)} \overrightarrow{T(\lambda)} R(\lambda, \mu) \quad (5.11)$$

relation qui s'appelle aussi relation quantique de Yang-Baxter [13]. On peut néanmoins réécrire (5.11) sous une forme faisant apparaître comment commute $T(\lambda)$ et $T(\mu)$ vis-à-vis du produit tensoriel; pour cela, multiplions (5.11) à gauche par la matrice P , on a

$$\begin{aligned} PR(\lambda, \mu) (T(\lambda) \otimes I) (I \otimes T(\mu)) &= P(I \otimes T(\mu)) (T(\lambda) \otimes I) R(\lambda, \mu) \\ &= (T(\mu) \otimes I) (I \otimes T(\lambda)) PR(\lambda, \mu) \end{aligned} \quad (5.12)$$

et posons

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) = PR(\lambda, \mu) \quad (5.13)$$

ainsi (5.12) devient

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) T(\lambda) \otimes T(\mu) = T(\mu) \otimes T(\lambda) \mathcal{R}(\lambda, \mu). \quad (5.14)$$

La relation (5.14) donne donc bien la façon selon laquelle on peut commuter $T(\lambda)$ et $T(\mu)$ vis-à-vis du produit tensoriel.

Dans le cas classique, nous avons vu que la trace de la matrice de transfert était la fonctionnelle génératrice des quantités conservées, prenons à présent la trace de l'expression (5.14)

$$\begin{aligned} \text{tr}_4(T(\lambda) \otimes T(\mu)) &= \text{tr}_4(\mathcal{R}^{-1}(\lambda, \mu) T(\mu) \otimes T(\lambda) \mathcal{R}(\lambda, \mu)) \\ &= \text{tr}_4(T(\mu) \otimes T(\lambda)) \\ &\iff \\ \text{tr}T(\lambda) \text{tr}T(\mu) &= \text{tr}T(\mu) \text{tr}T(\lambda) \end{aligned} \quad (5.15)$$

ainsi en posant $F(\lambda) = \text{tr}T(\lambda)$, on a

$$[F(\lambda), F(\mu)] = 0 \quad \forall (\lambda, \mu). \quad (5.16)$$

$F(\lambda)$ et $F(\mu)$ commutent entre eux quelque soient λ et μ , par conséquent, il sont comme l'étaient $F_L(\lambda)$ et $F_L(\mu)$ dans le cas classique les fonctionnelles génératrices des quantités conservées du système considéré.

Développons $F(\lambda)$ en puissance de λ

$$F(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \lambda^n. \quad (5.17)$$

Les coefficients C_n qui sont des fonctionnelles de champs quantiques sont les quantités conservées du système puisqu'en vertu de (5.16) on peut extraire des relations du type

$$\lambda^m \mu^n [C_n, C_m] = 0 \quad \forall (n, m) \quad (5.18)$$

qui impliquent que C_n et C_m sont en involution

$$[C_n, C_m] = 0. \quad (5.19)$$

En conclusion, si on peut caractériser un système quantique par la relation (5.14) grâce à une matrice \mathcal{R} appropriée, ce système quantique en question, est complètement intégrable pourvu que dans les quantités conservées on ait le Hamiltonien \mathcal{H} .

5.2 Limite Classique/Quantique

Pour finir, et avant de passer à un exemple plus concret de système intégrable quantique, regardons en quantifiant la relation classique ultralocale

$$\{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)] \delta_{nm} \quad (5.20)$$

à quoi doit ressembler la matrice $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$. Ainsi en réécrivant (5.20) sous la forme

$$\left\{ \overrightarrow{L_n(\lambda)}, \overleftarrow{L_m(\mu)} \right\} = \left[r(\lambda - \mu), \overrightarrow{L_n(\lambda)} \overleftarrow{L_m(\mu)} \right] \delta_{nm} \quad (5.21)$$

et en quantifiant cette dernière, il vient

$$\left[\overrightarrow{L_n(\lambda)}, \overleftarrow{L_m(\mu)} \right] = i\hbar \left[r(\lambda - \mu), \overrightarrow{L_n(\lambda)} \overleftarrow{L_m(\mu)} \right] \delta_{nm}. \quad (5.22)$$

Pour $n \neq m$, il est clair que $\overrightarrow{L_n(\lambda)}$ et $\overleftarrow{L_m(\mu)}$ commutent entre elles, mais pour $n = m$ on a en développant (5.22)

$$\begin{aligned} & (I - i\hbar r(\lambda - \mu)) \overrightarrow{L_n(\lambda)} \overleftarrow{L_n(\mu)} \\ &= \overleftarrow{L_n(\mu)} \overrightarrow{L_n(\lambda)} - i\hbar \overrightarrow{L_n(\lambda)} \overleftarrow{L_n(\mu)} r(\lambda - \mu) \\ &= \overleftarrow{L_n(\mu)} \overrightarrow{L_n(\lambda)} \\ &\quad - i\hbar (I - i\hbar r(\lambda - \mu))^{-1} \left(\overleftarrow{L_n(\mu)} \overrightarrow{L_n(\lambda)} - i\hbar \overrightarrow{L_n(\lambda)} \overleftarrow{L_n(\mu)} r(\lambda - \mu) \right) r(\lambda - \mu) \\ &= \overleftarrow{L_n(\mu)} \overrightarrow{L_n(\lambda)} - i\hbar \overrightarrow{L_n(\mu)} \overleftarrow{L_n(\lambda)} r(\lambda - \mu) + o(\hbar^2) \end{aligned}$$

ainsi

$$(I - i\hbar r(\lambda - \mu)) \overrightarrow{L_n(\lambda)} \overleftarrow{L_n(\mu)} = \overleftarrow{L_n(\mu)} \overrightarrow{L_n(\lambda)} (I - i\hbar r(\lambda - \mu)) + o(\hbar^2) \quad (5.23)$$

$$R(\lambda, \mu) \overrightarrow{L_n(\lambda)} \overleftarrow{L_n(\mu)} = \overleftarrow{L_n(\mu)} \overrightarrow{L_n(\lambda)} R(\lambda, \mu) \quad (5.24)$$

où

$$R(\lambda, \mu) = I - i\hbar r(\lambda - \mu) + o(\hbar^2), \quad (5.25)$$

on a donc aussi pour \mathcal{R}

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) = P(I - i\hbar r(\lambda - \mu)) + o(\hbar^2). \quad (5.26)$$

On notera qu'à l'instar de la matrice r du cas classique, la matrice \mathcal{R} peut-être de forme rationnelle, trigonométrique ou même elliptique [8, 10, 11, 12].

Chapitre 6

Chaîne de spins quantiques

Considérons un réseau unidimensionnel périodique où en chaque site existera un opérateur de spin S_i^a satisfaisant la relation de commutation

$$[S_i^a, S_j^b] = i\varepsilon_{abc} S_i^c \delta_{ij}. \quad (6.1)$$

A présent, les S_i^a sont des matrices telles que $S_i^a = \frac{1}{2}\sigma_i^a$ où σ_i^a est la matrice de Pauli σ_a ($a = 1, \dots, 3$) agissant sur le sous espace tensoriel E_i attaché au site i .

Classiquement, nous avons pour les chaîne de spins une matrice L_i donnée par les relations (II.4.13) et (II.4.14). A présent ces relations deviennent

$$L_i(\lambda) = I + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_i \quad (6.2)$$

avec

$$\mathbf{S}_i = X_a S_i^a \quad (6.3)$$

où X_a n'est autre que le générateur de $SU(N)$, or ici $N = 2$, ce qui revient à prendre

$$X_a = \sigma_a. \quad (6.4)$$

La relation (6.2) nous donne donc plus explicitement

$$L_i(\lambda) = \begin{pmatrix} I + \frac{\lambda}{2i} S_i^3 & \frac{\lambda}{2i} S_i^- \\ \frac{\lambda}{2i} S_i^+ & I - \frac{\lambda}{2i} S_i^3 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Les opérateurs X_a agissent sur l'espace auxiliaire \mathcal{A} , quant aux S_i^a ils agissent sur l'espace quantique E_i associé au spin sur le site i . On peut considérer que l'espace total \mathcal{E} est le produit tensoriel de l'espace quantique avec l'espace auxiliaire

$$\mathcal{E} = E \otimes \mathcal{A} = E_N \otimes E_{N-1} \otimes \dots \otimes E_1 \otimes \mathcal{A}. \quad (6.6)$$

6.1 Matrice $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$

En se référant à (5.26) et en se rappelant la forme de la matrice r pour le modèle discret de Heisenberg (4.19), on s'attend à avoir pour la chaîne de spin une matrice \mathcal{R} de la forme

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) = P - \alpha^2 \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} I \quad (6.7)$$

où

$$P = \frac{1}{2} (I + X_a X^a). \quad (6.8)$$

Vérifions donc que cette matrice $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$ puisse bien être la matrice \mathcal{R} de notre système quantique. Calculons

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}(\lambda, \mu) L_i(\lambda) \otimes L_i(\mu) - L_i(\mu) L_i(\lambda) \mathcal{R}(\lambda, \mu) \\ &= \left(P - \alpha^2 \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} I \right) \left(I + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_i \right) \left(I + \frac{\mu}{2i} \mathbf{S}_i \right) \\ & \quad - \left(I + \frac{\mu}{2i} \mathbf{S}_i \right) \left(I + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_i \right) \left(P - \alpha^2 \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} I \right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Effectuons morceau par morceau le calcul de l'expression (6.9) :

$$\begin{aligned} & P \left(I + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_i \right) \left(I + \frac{\mu}{2i} \mathbf{S}_i \right) - \left(I + \frac{\mu}{2i} \mathbf{S}_i \right) \left(I + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_i \right) P \\ &= -\frac{\lambda\mu}{4} (P (\mathbf{S}_i \otimes \mathbf{S}_i) - (\mathbf{S}_i \otimes \mathbf{S}_i) P) \\ &= -\frac{\lambda\mu}{4} S_i^a S_i^b (P (X_a \otimes X_b) - (X_a \otimes X_b) P) \\ &= -\frac{\lambda\mu}{4} S_i^a S_i^b P (X_a \otimes X_b - X_b \otimes X_a) \\ &= -\frac{\lambda\mu}{4} (S_i^a S_i^b - S_i^b S_i^a) P (X_a \otimes X_b) \\ &= -\frac{\lambda\mu}{4} i \varepsilon_{abc} S_i^c P (X_a \otimes X_b) \\ &= -\frac{\lambda\mu}{4} i S_i^c P \varepsilon_{abc} X_a \otimes X_b, \end{aligned}$$

or

$$[P, X_c \otimes I] = \frac{1}{2} [X_b \otimes X_b, X_c \otimes I] = i \varepsilon_{abc} X_a \otimes X_b,$$

ainsi

$$\begin{aligned} & P \left(I + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_i \right) \left(I + \frac{\mu}{2i} \mathbf{S}_i \right) - \left(I + \frac{\mu}{2i} \mathbf{S}_i \right) \left(I + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_i \right) P \\ &= -\frac{\lambda\mu}{4} S_i^c P [P, X_c \otimes I] \\ &= -\frac{\lambda\mu}{4} S_i^c (X_c \otimes I - I \otimes X_c) \\ &= -\frac{\lambda\mu}{4} (\mathbf{S}_i \otimes I - I \otimes \mathbf{S}_i). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Pour compléter le calcul de (6.9), il nous reste à calculer

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} \left(\left(I + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_i \right) \left(I + \frac{\mu}{2i} \mathbf{S}_i \right) - \left(I + \frac{\mu}{2i} \mathbf{S}_i \right) \left(I + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_i \right) \right) \\ &= \alpha^2 \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} (\lambda - \mu) (\mathbf{S}_i \otimes I - I \otimes \mathbf{S}_i) \\ &= \alpha^2 \lambda \mu (\mathbf{S}_i \otimes I - I \otimes \mathbf{S}_i). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ainsi, pour que $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$ soit correcte, il faut que l'équation (6.9) soit nulle et par conséquent il faut que $\alpha^2 = \frac{1}{4}$, ce qui implique

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu) = P - \frac{\lambda\mu}{4(\lambda - \mu)} I. \quad (6.12)$$

6.2 Quantités conservées : Hamiltonien

Essayons de trouver la quantité conservée principale du système, à savoir le Hamiltonien. Les quantités conservées sont indépendantes du paramètre spectral λ , par conséquent, il nous apparaît clair que l'on peut en fixer sa valeur pour les trouver.

En sachant que

$$S_i^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

et

$$S_i^\pm = S_i^1 \pm iS_i^2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2) = \sigma_\pm, \quad (6.14)$$

écrivons explicitement $L_i(\lambda)$,

$$L_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\lambda}{4i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\lambda}{4i} & \frac{\lambda}{2i} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2i} & 1 - \frac{\lambda}{4i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{\lambda}{4i} \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

En prenant, $\lambda = 4i$, on a

$$L_i(\lambda)|_{\lambda=4i} = 2P_i \quad (6.16)$$

où P_i agit sur l'espace $E_i \otimes \mathcal{A}$, c'est-à-dire qu'il permute les deux sous-espaces : sous son action l'espace quantique du spin i devient l'espace auxiliaire et vice-versa. Cette propriété (6.16) nous simplifie énormément les calculs puisque on a ainsi

$$T_N(\lambda)|_{\lambda=4i} = 2^N \prod_{i=1}^{\widehat{N}} P_i. \quad (6.17)$$

$T_N(\lambda)$ agit bien sûr sur des vecteurs de l'espace global \mathcal{E} , à savoir des vecteurs V de la forme

$$V = f_N \otimes f_{N-1} \otimes \dots \otimes f_1 \otimes g \quad (6.18)$$

où g est un vecteur de l'espace auxiliaire et f_i un vecteur de l'espace quantique E_i . Ainsi pour $\lambda = 4i$,

$$\begin{aligned} L_1(\lambda)V &= 2 f_N \otimes f_{N-1} \otimes \dots \otimes f_3 \otimes f_2 \otimes g \otimes f_1 \\ L_2(\lambda)L_1(\lambda)V &= 2^2 f_N \otimes f_{N-1} \otimes \dots \otimes f_3 \otimes f_1 \otimes g \otimes f_2 \\ &\vdots \\ T_N(\lambda)|_{\lambda=4i}V &= 2^N f_{N-1} \otimes \dots \otimes f_2 \otimes f_1 \otimes g \otimes f_N. \end{aligned}$$

En prenant à présent la trace dans l'espace auxiliaire, nous obtiendront un opérateur purement quantique et donc

$$tr_{aux} T_N(\lambda)|_{\lambda=4i} \widetilde{V} \approx f_{N-1} \otimes \dots \otimes f_2 \otimes f_1 \otimes f_N \quad (6.19)$$

où

$$\widetilde{V} = f_N \otimes \dots \otimes f_2 \otimes f_1. \quad (6.20)$$

$tr_{aux} T_N(\lambda)|_{\lambda=4i}$ est à présent un opérateur totalement quantique qui permute site à site les spins par permutation circulaire.

Développons à présent l'opérateur $\ln(T_N(\lambda))$ en puissance de $\widetilde{\lambda} = \lambda - 4i$, on a

$$\ln(T_N(\lambda)) = \sum_n^{\infty} c_n \widetilde{\lambda}^n. \quad (6.21)$$

Le $n^{\text{ième}}$ coefficient c_n peut être obtenu en prenant la dérivée $n^{\text{ième}}$ par rapport à $\widetilde{\lambda}$ de $\ln(T_N(\lambda))$ pour $\widetilde{\lambda} = 0$,

$$\left. \frac{\partial^n}{\partial \widetilde{\lambda}^n} \ln(T_N(\lambda)) \right|_{\widetilde{\lambda}=0} = c_n. \quad (6.22)$$

Montrons à présent ici de manière informelle que le coefficient c_1 peut nous donner le Hamiltonien du système. En se rappelant donc que

$$T_N(\lambda) = \prod_{n=1}^{\widehat{N}} L_n(\lambda)$$

et que

$$L_n(\lambda) = I + \frac{\lambda}{2i} \mathbf{S}_n,$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(T_N(\lambda)) \right|_{\tilde{\lambda}=0} \mathbf{V} \\ & \approx \sum_{n=1}^N L_N \dots L_{n+1} S_n^a X_a L_{n-1} \dots L_1 \mathbf{V} \\ & \approx \sum_{n=1}^N L_N \dots L_{n+1} S_n^a X_a f_N \otimes \dots \otimes f_n \otimes f_{n-2} \otimes \dots \otimes f_2 \otimes f_1 \otimes g \otimes f_{n-1} \\ & \approx \sum_{n=1}^N L_N \dots L_{n+1} f_N \otimes \dots \otimes (\sigma^a f_n) \otimes f_{n-2} \otimes \dots \otimes f_2 \otimes f_1 \otimes g \otimes (\sigma_a f_{n-1}) \\ & \approx \sum_{n=1}^N f_{N-1} \otimes \dots \otimes f_{n+1} \otimes (\sigma^a f_n) \otimes (\sigma_a f_{n-1}) \otimes f_{n-2} \otimes \dots \otimes f_1 \otimes g \otimes f_N. \end{aligned}$$

En prenant la trace sur l'espace auxiliaire, on constate que

$$c_1 \sim \mathcal{H} \approx \sum_{n=1}^N \vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_{n-1} \quad (6.23)$$

ce qui est bien l'équivalent classique en prenant $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i-1}$ faible dans l'expression

$$\mathcal{H}_{classique} = \sum_{i=1}^N \ln \left(s^2 - \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i-1} \right). \quad (6.24)$$

On vient donc d'entrevoir succinctement que les quantités c_n sont reliés aux quantités conservées quantiques. Ainsi, en calculant rigoureusement ces dernières (ce que nous n'allons pas faire ici), on peut grâce, notamment à l'ansatz de Bethe [3, 10, 11, 19, 20], construire leurs états propres et valeurs propres.

Quelques mots de conclusion ...

Il est difficile de clore un ouvrage sur les systèmes intégrables tant la richesse du sujet est importante. De nombreux aspects ont été volontairement non traités : comme l'étonnante structure mathématique qui se trouve derrière le formalisme utilisé, on pensera notamment aux structures d'algèbres de Lie découlant du crochet de Poisson fondamental (le lecteur pourra se référer au dernier chapitre du livre de Faddeev [6]), ou bien comme la possibilité d'avoir des systèmes quantiques intégrables nonultralocaux [10].

Les références présentées en fin d'ouvrage se trouvent être, à mon avis, les références les plus abordables et les plus générales sur le sujet, cependant elles permettront également au lecteur d'aller plus loin dans son éventuel désir d'étudier les systèmes intégrables, notamment dans le domaine de la théorie des champs.

Bibliographie

- [1] L.D. Faddeev. A hamiltonian interpretation of the inverse scattering method. In R.K. Bullough and P.J. Caudrey, editors, *Solitons*, Topics in Current Physics, pages 339–354. Springer-Verlag, 1980.
- [2] L.D. Faddeev. Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory. In J.-B. Zuber et R. Stora, editor, *Recent advances in field theory and statistical mechanics*, volume XXXIX of *Les Houches*, pages 561–608. North-Holland, 1982.
- [3] L.D. Faddeev. Algebraic aspects of the Bethe ansatz. *Int. J. Mod. Phys.*, **A10**(13) :1845–1878, 1995.
- [4] L.D. Faddeev and N.Y. Reshetikhin. Hamiltonian structures for integrable models of field theory. *Teor. Mat. Fiz.*, **56**(3) :323–343, September 1983.
- [5] L.D. Faddeev and N.Y. Reshetikhin. Integrability of the principal chiral field model in 1+1 dimension. *Ann. Phys.*, **167**(2) :227–256, April 1986.
- [6] L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer-Verlag, 1986.
- [7] P. Garbaczewski. *Classical and Quantum Field Theory of Exactly Soluble Nonlinear Systems*. World-Scientific, 1985.
- [8] A.G. Izergin and V.E. Korepin. Lattice versions of quantum field theory models in two dimensions. *Nucl. Phys.*, **B205** :401–413, 1982.
- [9] Michio Jimbo, editor. *Yang-Baxter Equation in Integrable Systems*, volume 10 of *Advanced Series in Mathematical Physics*. World Scientific, 1989.
- [10] A. Kundu. Quantum integrable systems : Construction, solution, algebraic aspect. preprint hep-th\9612046, December 1996.
- [11] A. Kundu. Quantum integrable systems : Basic concepts and brief overview. preprint hep-th\9708114, August 1997.
- [12] A. Kundu and S. Ghosh. Soliton and breather states of the quantum sine-Gordon mode in light cone coordinates through the exact QIST method. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **21** :3951–3961, 1988.
- [13] J.-M. Maillet. Kac-Moody algebra and extended Yang-Baxter relations in the O(n) non-linear σ -model. *Phys. Lett.*, **162B** :137–142, 1985.
- [14] J. Moser. *Integrable Hamiltonian Systems and Spectral Theory*. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1981.
- [15] A. Neveu. Cours sur les systèmes intégrables. Cours donné dans le cadre de l'école doctorale de Physique de la Matière Condensée à l'université Montpellier II, non publié, 1998.

- [16] E.K. Sklyanin. Boundary conditions for integrable quantum systems. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **21** :2375–2389, 1988.
- [17] E.K. Sklyanin. Quantum version of the method of inverse scattering problem. In Jimbo [9], pages 121–171.
- [18] Z.E. Zakharov and A.B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. J.E.T.P.*, **34**(1) :62–69, January 1972.
- [19] Y.K. Zhou. Algebraic Bethe ansatz for the non-linear schrödinger model : I. multicomponent fields. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **21** :2391–2397, 1988.
- [20] Y.K. Zhou. Algebraic Bethe ansatz for the non-linear Schrödinger model : II. mixed fermion and boson fields. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **21** :2399–2403, 1988.