

THÈSE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES DE  
L'UNIVERSITÉ DE LILLE 1

Spécialité

**Astronomie**

Présentée par

**Benoît NOYELLES**

**Contribution à l'étude de la rotation résonnante  
dans le Système Solaire**

soutenue à l'Observatoire de Lille le 8 décembre 2014

devant le jury composé de :

M. Hugues LEROUX	Président	Université de Lille 1
M. Carl D. MURRAY	Rapporteur	Queen Mary University of London
M. Jean SOUCHAY	Rapporteur	Observatoire de Paris
M. Tim VAN HOOLST	Rapporteur	KU Leuven
Mme Anne LEMAÎTRE	Examineur	Université de Namur
M. Alain VIENNE	Garant	Université de Lille 1



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>I</b>	<b>La rotation des satellites naturels</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Un modèle Hamiltonien de rotation rigide</b>	<b>17</b>
2.1	Exposition du problème . . . . .	17
2.2	Les équations du mouvement . . . . .	19
2.2.1	L'énergie cinétique $\mathcal{T}$ . . . . .	19
2.2.2	L'énergie potentielle $\mathcal{V}$ . . . . .	20
2.2.3	Le Hamiltonien du problème . . . . .	21
2.3	Caractérisation de la rotation résonnante . . . . .	23
2.3.1	La rotation d'équilibre des satellites des planètes géantes . . . . .	24
	La position d'équilibre . . . . .	24
	Les petites oscillations autour de l'équilibre . . . . .	27
2.3.2	Les libérations forcées . . . . .	31
2.3.3	Les États de Cassini . . . . .	33
2.4	Conclusion . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Applications de la rotation rigide</b>	<b>37</b>
3.1	La méthode générale . . . . .	37
3.1.1	Les éphémérides orbitales des satellites naturels . . . . .	37
3.1.2	Une résolution numérique du problème . . . . .	39
3.2	Titan . . . . .	40
3.2.1	Rotation rigide . . . . .	41
3.2.2	Un mouvement polaire résonnant . . . . .	42
3.2.3	L'influence du mouvement polaire sur la dissipation de marée . . . . .	45
3.3	Callisto . . . . .	47
3.3.1	Un comportement surprenant . . . . .	47
3.3.2	La problématique du Plan de Laplace . . . . .	50
3.3.3	Ma proposition de plan de référence acceptable . . . . .	52
3.3.4	Les quantités de rotation de Callisto . . . . .	54
3.4	Les coorbitaux Janus et Épiméthée . . . . .	55
3.4.1	Une dynamique orbitale intéressante . . . . .	55
3.4.2	La rotation observée (Tiscareno et al., 2009) . . . . .	58

3.4.3	Simulation de la rotation . . . . .	60
3.5	Mimas . . . . .	61
3.5.1	Les modèles d'intérieur . . . . .	62
3.5.2	La rotation simulée . . . . .	66
3.5.3	La rotation observée (Tajeddine et al., 2014) . . . . .	68
3.6	Un satellite non résonnant : Hypériorion . . . . .	69
3.6.1	Une première détection de chaos dans le Système Solaire ? . . . . .	69
3.6.2	La vérité des observations . . . . .	70
3.6.3	Quelques simulations... . . . .	71
3.7	Conclusion . . . . .	72
<b>4</b>	<b>La prise en compte d'un noyau fluide</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	75
4.2	Le modèle de Poincaré-Hough . . . . .	75
4.2.1	Géométrie du problème . . . . .	76
4.2.2	L'énergie cinétique . . . . .	78
4.2.3	Le Hamiltonien du système . . . . .	81
	Le Hamiltonien de libre rotation . . . . .	81
	Le potentiel gravitationnel du perturbateur . . . . .	84
4.2.4	Seulement 4 degrés de liberté . . . . .	84
4.2.5	Retrouver les quantités physiques (Noyelles et al., 2010) . . . . .	84
4.3	Comportement d'un satellite naturel . . . . .	86
4.3.1	Étude analytique (Henrard, 2008) . . . . .	86
4.3.2	Étude numérique (Noyelles, 2012) . . . . .	87
	Influence des paramètres d'intérieur . . . . .	87
	Une bifurcation ... . . . .	90
4.4	Application à Io . . . . .	94
4.4.1	6 modèles d'intérieur . . . . .	94
4.4.2	Les variables de rotation . . . . .	97
4.5	Vers une modélisation non linéaire du fluide ... . . . .	98
4.5.1	Pourquoi considérer $P_c$ comme constant . . . . .	99
4.5.2	Lien avec l'équation de Navier-Stokes . . . . .	100
4.5.3	L'instabilité elliptique . . . . .	102
4.6	Conclusion . . . . .	103
<b>5</b>	<b>La présence d'un océan global</b>	<b>105</b>
5.1	Introduction . . . . .	105
5.2	Mise en équations du problème . . . . .	105
5.2.1	Paramétrisation du problème . . . . .	106
5.2.2	Les équations cinématiques . . . . .	107
5.2.3	Les forces intervenant . . . . .	108
	Le forçage gravitationnel de Saturne . . . . .	109
	Le couplage gravitationnel . . . . .	109
	L'influence de l'océan . . . . .	111
5.2.4	Le système d'équations . . . . .	112
5.3	Application à Titan . . . . .	114

5.3.1	Vers un modèle d'intérieur réaliste . . . . .	116
5.3.2	Une obliquité résonnante . . . . .	118
5.3.3	La variation temporelle de l'obliquité . . . . .	121
5.4	Et si la croûte est élastique. . . . .	124
5.4.1	Par le formalisme de Goldreich & Mitchell (2010) . . . . .	124
	Couple élastique dû à un déplacement radial en longitude . . . . .	125
	Couple de marée s'appliquant en longitude sur la croûte . . . . .	126
	Les marées en latitude . . . . .	129
5.4.2	Par le formalisme de Richard et al. (2014) . . . . .	130
5.4.3	Synthèse . . . . .	134
5.5	Conclusions et perspectives . . . . .	135
<b>II Mercure en résonance 3 :2</b>		<b>137</b>
<b>6</b>	<b>L'exploration de Mercure</b>	<b>139</b>
6.1	Mariner 10 (NASA) . . . . .	139
6.2	MESSENGER (NASA) . . . . .	140
6.3	BepiColombo (ESA / JAXA) . . . . .	142
<b>7</b>	<b>L'obliquité de Mercure</b>	<b>145</b>
7.1	Introduction . . . . .	145
7.2	Le Plan de Laplace . . . . .	146
	7.2.1 Moyennisation séculaire . . . . .	146
	7.2.2 Moyennisation numérique . . . . .	147
	7.2.3 Plan de Laplace instantané . . . . .	147
7.3	Notre modélisation de l'obliquité . . . . .	148
	7.3.1 La méthode . . . . .	148
	7.3.2 Notre solution . . . . .	153
	7.3.3 Test de la solution . . . . .	157
	7.3.4 Influence des harmoniques d'ordre supérieur . . . . .	158
	7.3.5 Influence des marées . . . . .	159
	7.3.6 Le moment d'inertie polaire $C$ . . . . .	161
7.4	Conclusion . . . . .	161
<b>8</b>	<b>Les librations en longitude</b>	<b>163</b>
8.1	Introduction . . . . .	163
8.2	L'expérience de Peale (1976) . . . . .	163
	8.2.1 Théorie . . . . .	163
	8.2.2 Observations radar . . . . .	165
8.3	Modélisation théorique . . . . .	166
	8.3.1 Si le noyau est sphérique . . . . .	166
	8.3.2 Si le noyau est ellipsoïdal . . . . .	167
	8.3.3 Avec un noyau interne rigide . . . . .	170
8.4	Conclusion . . . . .	172

<b>9</b>	<b>La capture de Mercure en résonance</b>	<b>173</b>
9.1	Introduction . . . . .	173
9.2	Différents scénarii d'évolution . . . . .	174
9.2.1	Différents modèles de formation de Mercure . . . . .	174
9.2.2	Si Mercure était solide . . . . .	175
9.2.3	Avec un noyau fluide . . . . .	177
9.2.4	Si Mercure était initialement rétrograde . . . . .	177
9.3	Pourquoi utiliser un nouveau modèle de marée . . . . .	178
9.3.1	Théorie . . . . .	178
9.3.2	Une rotation pseudosynchrone impossible . . . . .	179
9.3.3	Résultats préliminaires . . . . .	180
9.4	La méthode . . . . .	181
9.4.1	Évolution de l'excentricité . . . . .	181
9.4.2	Validation de la méthode . . . . .	183
9.5	Revisite du scenario 1 . . . . .	185
9.5.1	Premiers essais . . . . .	185
9.5.2	Avec un proto-Mercure plus chaud . . . . .	186
9.6	Revisite du scenario 2 . . . . .	186
9.7	Revisite du scenario 3 . . . . .	187
9.8	Conclusion . . . . .	188
<b>III</b>	<b>Un outil mathématique pour la rotation</b>	<b>191</b>
<b>10</b>	<b>L'algorithme NAFFO</b>	<b>193</b>
10.1	Introduction . . . . .	193
10.2	Notre algorithme . . . . .	194
10.2.1	Principe . . . . .	194
10.2.2	L'algorithme NAFF . . . . .	196
10.3	Approches de la preuve . . . . .	197
10.3.1	Dans un cadre général . . . . .	197
10.3.2	Dans un contexte Hamiltonien . . . . .	198
10.3.3	Vitesse de convergence . . . . .	201
10.4	2 exemples numériques . . . . .	201
10.4.1	La résonance spin-orbite 1 :1 en longitude . . . . .	201
10.4.2	Un système proie-prédateur avec forçage périodique . . . . .	206
10.5	Conclusion . . . . .	207
<b>IV</b>	<b>Conclusions</b>	<b>209</b>
<b>11</b>	<b>Conclusion</b>	<b>211</b>

# Table des figures

2.1	Les angles d'Euler du problème (reproduit de (Henrard, 2005)). . . . .	18
2.2	Les 3 différents types de libration en longitude . . . . .	32
2.3	2 ou 4 États de Cassini . . . . .	34
3.1	Comportement quasi-résonnant du mouvement polaire de Titan. . . . .	42
3.2	Simulations numériques de la rotation de Callisto. . . . .	49
3.3	Mouvement du moment cinétique de Callisto $\vec{G}$ . . . . .	54
3.4	Variations de la durée du jour de Callisto . . . . .	55
3.5	Échanges d'orbites entre Janus et Épiméthée . . . . .	56
3.6	Janus et Épiméthée vus par Cassini . . . . .	58
3.7	Librations physiques de Janus et Épiméthée . . . . .	60
3.8	Libration diurne d'Épiméthée . . . . .	61
3.9	Mimas vu par Cassini . . . . .	62
3.10	Rotation de Mimas simulée . . . . .	67
3.11	Minimisation de l'erreur en ajustant l'amplitude des librations . . . . .	68
3.12	Portraits de phase pour la rotation d'Hypérion . . . . .	69
3.13	Exemple d'aliasing . . . . .	71
3.14	Variations des quantités de rotation pour l'observation 3 et le modèle basé sur la forme	73
3.15	Variations des quantités de rotation pour l'observation 3 et le modèle basé sur la rotation . . . . .	74
4.1	Paramétrisation de l'orientation du satellite et de son pseudo-noyau . . . . .	76
4.2	Les 2 paramétrisations sur la même figure . . . . .	77
4.3	Trajectoire passant proche de l'équilibre $J = J^c = 0$ pour un noyau très aplati . . . . .	90
4.4	La rotation du modèle 1 (noyau composé uniquement de fer). . . . .	98
4.5	La rotation du modèle 2 (le noyau est un mélange eutectique de fer et de soufre). . . . .	99
5.1	Modèle d'intérieur de Titan . . . . .	106
5.2	Angles d'Euler . . . . .	107
5.3	Propriétés de nos Titans. . . . .	119
5.4	Influence de l'épaisseur de la croûte sur son obliquité moyenne. . . . .	120
5.5	Influence de l'épaisseur de l'océan sur l'obliquité de la croûte. . . . .	121
5.6	Forçage résonnant de l'obliquité de Titan. . . . .	122
5.7	Obliquités moyenne et instantanée . . . . .	123
5.8	Obliquité de Titan à court terme . . . . .	124

7.1	Erreur sur les éléments orbitaux . . . . .	153
7.2	Obliquité de Mercure simulée à l'aide des équations non moyennées. . . . .	158
7.3	Amplitude des oscillations libres . . . . .	159
7.4	Influence de $C_{30}$ sur l'obliquité moyenne . . . . .	160
7.5	Influence des marées sur l'obliquité . . . . .	160
8.1	Libration et obliquité de Mercure mesurées . . . . .	166
8.2	La période propre $T_v$ . . . . .	170
8.3	Orientation du moment cinétique du fluide dans le noyau . . . . .	171
8.4	Mouvement polaire du manteau . . . . .	172
9.1	Masses volumiques des planètes telluriques . . . . .	174
9.2	Accélération de marée au voisinage d'une résonance . . . . .	180
9.3	Instabilité de la rotation pseudosynchrone . . . . .	181
9.4	Probabilités de capture . . . . .	182
9.5	Évolution statistique de l'excentricité de Mercure . . . . .	182
9.6	Évolution temporelle de l'excentricité de Mercure . . . . .	183
9.7	Répartition des vitesses de rotation après 3 millions d'années, avec le CTL . . . . .	184
9.8	Statistiques de capture avec $\tau_M = 500$ ans . . . . .	185
9.9	Statistiques de captures pour un Mercure plus chaud . . . . .	186
9.10	Probabilités de capture avec la friction noyau-manteau . . . . .	187
9.11	Rotation finale pour un proto-Mercure chaud initialement rétrograde . . . . .	188
10.1	Convergence de notre algorithme pour la rotation synchrone quasi-résonnante . . . . .	206
10.2	Intégrations numériques du système proie-prédateur . . . . .	207

# Liste des tableaux

3.1	Longitude moyenne de Mimas . . . . .	38
3.2	Inclinaison de Callisto . . . . .	39
3.3	Fréquences propres des petites oscillations autour de l'équilibre, pour un Titan rigide. . . . .	41
3.4	Modes propres présents dans le mouvement orbital de Titan autour de Saturne . . . . .	41
3.5	Décomposition quasi-périodique de $\eta + \nu\xi$ . . . . .	42
3.6	Valeurs de l'équilibre résonnant . . . . .	44
3.7	Champ de gravité de Callisto obtenu par Galileo . . . . .	48
3.8	Les modes propres de la rotation de Callisto . . . . .	48
3.9	Le Plan de Laplace de Callisto. . . . .	51
3.10	Le Plan de Laplace des 4 satellites Galiléens . . . . .	52
3.11	Modes propres du mouvement orbital de Janus et Épiméthée . . . . .	57
3.12	Demi grand-axe de Janus et Épiméthée . . . . .	57
3.13	Éléments orbitaux moyens de Janus et Épiméthée. . . . .	58
3.14	Formes triaxiales de Janus et Épiméthée observées par Tiscareno et al. (2009) . . . . .	59
3.15	Libration physique diurne de Janus et Épiméthée . . . . .	59
3.16	Paramètres physiques et dynamiques de Mimas . . . . .	63
3.17	Nos modèles d'intérieur pour Mimas . . . . .	65
3.18	Les fréquences propres du mouvement orbital de Mimas . . . . .	66
3.19	Librations physiques de Mimas . . . . .	66
3.20	Les quantités de rotation pour nos modèles de Mimas . . . . .	67
3.21	Librations de Mimas observées . . . . .	68
3.22	Moments principaux d'inertie d'Hypérion . . . . .	71
3.23	Orientations du vecteur rotation d'Hypérion observées par Voyager et Cassini . . . . .	72
3.24	Angles définissant l'orientation du moment cinétique d'Hypérion. . . . .	72
4.1	Paramètres physiques et dynamiques de mon pseudo-Io . . . . .	88
4.2	Influence de la taille du noyau $\delta = C_c/C$ , avec $\epsilon_3 = \epsilon_1$ et $\epsilon_4 = \epsilon_2$ . . . . .	89
4.3	Influence de l'aplatissement polaire du noyau $\epsilon_3$ , avec $\delta = 0.5$ et $\epsilon_4 = \epsilon_2$ . . . . .	89
4.4	Influence de l'ellipticité équatoriale du noyau $\epsilon_4$ , avec $\delta = 0.5$ et $\epsilon_3 = \epsilon_1$ . . . . .	90
4.5	Paramètres de forme et champ de gravité d'Io . . . . .	95
4.6	Paramètres physiques de nos 6 modèles d'Io . . . . .	96
4.7	Les paramètres du modèle de Poincaré-Hough . . . . .	96
4.8	Périodes des oscillations propres autour de la rotation d'équilibre. . . . .	97
4.9	Librations physiques du Modèle 1 . . . . .	100
4.10	Obliquité du Modèle 1 . . . . .	100

4.11	Les variables de rotation pour les différents modèles. . . . .	101
4.12	Instabilité elliptique d'Io . . . . .	102
4.13	Bilan énergétique d'Io . . . . .	103
5.1	Les 2 solutions du champ de gravité de Titan. . . . .	115
5.2	Décomposition fréquentielle des variables d'inclinaison de Titan . . . . .	122
6.1	Le champ de gravité de Mercure . . . . .	141
7.1	Analyse en fréquence d'une solution du système . . . . .	155
7.2	Les coefficients intervenant dans les Éq.7.58 à 7.61. . . . .	157
7.3	Les différents effets agissant sur l'obliquité de Mercure. . . . .	161
8.1	Les mesures radar de libration et d'obliquité de Mercure. . . . .	166
8.2	Librations en longitude en Mercure . . . . .	168
8.3	Variation des périodes propres $T_v$ and $T_z$ . . . . .	169
9.1	Probabilités de capture avec le CTL . . . . .	184
9.2	Statistiques de capture pour un temps de Maxwell plus court. . . . .	186
10.1	Convergence de notre algorithme dans le cas quasi-résonnant . . . . .	205
10.2	Utilisation de notre algorithme sur le système proie-prédateur . . . . .	208

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury qui ont accepté d'examiner cette Habilitation à Diriger des Recherches. Il est de tradition de commencer par les rapporteurs, donc je remercie Carl Murray, Tim Van Hoolst et Jean Souchay d'avoir accepté de rédiger un rapport sur ce document. Je remercie Anne Lemaître d'avoir accepté la charge d'examineur(rice), Alain Vienne de s'être porté garant auprès de l'Université de Lille 1 pour que je puisse m'inscrire en HDR, et Hugues Leroux pour avoir présidé ce jury. Merci aussi à toutes les personnes qui se sont déplacées pour assister à cette soutenance. Et je n'oublie pas Damya Souami et Jonathan Besserer, qui se sont proposés pour relire le manuscrit... même si je ne les ai finalement pas sollicités.

Cette recherche a pu se faire, tout au long de ces années, grâce aux sponsors. Donc merci à l'Université de Namur, BELSPO et le FNRS de m'avoir financé, ainsi qu'aux personnes qui m'ont permis d'obtenir ces financements. D'un point de vue scientifique, ces travaux sur la rotation ont été faits à l'Université de Namur, dans la continuité d'une tradition locale initiée par le regretté Jacques Henrard, que j'ai eu le grand honneur de connaître. Je remercie par cette occasion mes collaborateurs locaux Anne Lemaître, Sandrine D'Hoedt, Julien Dufey, Nicolas Delsate, Timoteo Carletti, Christoph Lhotka et Julien Frouard. Ces travaux ont été rendus possibles notamment grâce à l'énorme travail de Frédéric Wautelet sur les serveurs de calcul. Je remercie également mes collaborateurs extérieurs Özgür Karatekin, Nicolas Rambaux, Valeri Makarov, et Radwan Tajeddine. Enfin, une mention spéciale pour les personnes qui m'ont permis d'effectuer plusieurs séjours scientifiques à l'étranger, Michael Efroimsky, Tadashi Yokoyama et Francis Nimmo.

L'Habilitation à Diriger des Recherches sanctionne toute une expérience de chercheur, qui ne se limite pas à ce manuscrit. J'ai aussi travaillé sur la dynamique orbitale des satellites naturels, dès ma thèse de doctorat, avant de le faire au sein du groupe transversal Encelade. Merci en particulier à Valéry Lainey, Sébastien Charnoz et Kévin Baillié pour cette collaboration sur les anneaux de Saturne (qui n'est pas encore terminée). Merci également à Émilie Verheylewegen pour notre collaboration sur les satellites d'Uranus.

Cette soutenance a eu lieu dans un lieu particulier, l'Observatoire de Lille, 80 ans jour pour jour après son inauguration. J'en profite pour rendre hommage aux bénévoles de l'Association Jonckhère pour leur temps consacré à l'entretien du patrimoine scientifique de ce bâtiment, ainsi que pour toutes leurs observations à la lunette, utiles à la science (notamment les phénomènes mutuels). Un hommage aussi à Madame Ballenghien, la gardienne des lieux.

Et puis un grand merci à mes parents, qui m'ont toujours soutenu.



# Chapitre 1

## Introduction

L'objet de cette thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches est de présenter mes travaux sur la rotation des corps résonnants, qui sont soit des satellites naturels des planètes géantes, en rotation synchrone, soit Mercure, qui effectue 3 rotations sur elle-même en exactement 2 révolutions autour du Soleil. Cette thématique se situe à un carrefour entre la mécanique céleste, la planétologie, et la géophysique, car l'amplitude de la réponse d'un corps en rotation à une excitation extérieure, dans la plupart des cas gravitationnelle, dépend de la structure interne de ce corps. Cette dépendance est d'autant plus importante dans le cas de corps en rotation résonnante, car cette configuration est un équilibre dynamique, c'est-à-dire un minimum d'énergie. Ce minimum d'énergie est atteint grâce à des phénomènes dissipatifs, essentiellement des forces de marée et des phénomènes de friction interne fluide-solide, agissant depuis la formation de l'objet. Ainsi, les déviations par rapport à la rotation strictement résonnante sont la signature d'excitation par une source externe, tandis que des corps non résonnants, c'est-à-dire dont la rotation n'a pas été entièrement amortie, ont un mouvement essentiellement dû aux phénomènes s'étant produits pendant leur formation (accrétion, impacts, . . .)

Modéliser la rotation de tels objets nécessite donc d'avoir des informations sur leur structure interne, ce qui n'était pendant longtemps possible que pour la Lune. Ceci a justifié un certain nombre d'études sur le sujet (Koziel, 1967; Williams et al., 1973; Migus, 1980; Eckhardt, 1981; Moons, 1982a,b; Williams et al., 2001; Rambaux & Williams, 2011), mêlant aussi bien études théoriques qu'observations de la rotation, en particulier grâce à des dispositifs de type Laser-Lune, consistant à mesurer très précisément la distance entre un émetteur laser et un panneau réflecteur situé sur la surface de la Lune, à l'aide du temps d'aller-retour des photons.

Ceci dit, la rotation de la Lune est très différente de celle des satellites naturels des planètes géantes, essentiellement car la Lune orbite autour d'une planète de taille relativement modeste (notre Terre) et subit fortement la perturbation gravitationnelle du Soleil. Une conséquence est que l'orientation de son moment cinétique, ou *obliquité*, correspond à l'*État de Cassini 2*, alors que l'obliquité des satellites des planètes géantes est supposée être à l'*État de Cassini 1*.

Jusqu'à la mission spatiale Galileo qui a visité le système de Jupiter de 1995 à 2003, les satellites des planètes géantes n'étaient connus que comme des masses sphériques avec certaines propriétés de surface; les sondes Galileo, puis Cassini en orbite autour de Saturne depuis 2004, ont permis de connaître les champs de gravité à l'ordre 2 des principaux satellites, voire parfois de mesurer un état de rotation. En parallèle, des études théoriques et expérimentales se sont développées, en particulier pour modéliser l'intérieur d'un satellite naturel, pour étudier le comportement d'une couche fluide

en son sein, ou pour comprendre la réponse rotationnelle d'un corps qui a un océan global.

Ce manuscrit a pour but de présenter ma contribution à certaines de ces études. Il s'agit du point de vue d'un mécanicien céleste qui s'est lentement mais sûrement rapproché des sciences planétaires. Je présenterai d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire celui de la rotation d'un corps triaxial rigide (Chapitre 2), ainsi que la façon dont j'ai appliqué ce modèle à certains satellites de Jupiter et de Saturne (Chapitre 3). Je présenterai ensuite des complications de ce modèle afin de se diriger vers une structure interne de plus en plus réaliste, d'abord en considérant un noyau entièrement fluide (Chapitre 4), puis en tenant compte d'un océan global compris entre 2 couches rigides, à savoir un noyau et une croûte (Chapitre 5).

Je montrerai ensuite comment j'ai appliqué ces méthodes à Mercure, en résonance spin-orbite 3 :2, dans le cadre de la préparation de la mission de l'ESA BepiColombo. J'explique en particulier comment on peut utiliser l'obliquité (Chapitre 7) et les librations en longitude (Chapitre 8) pour déterminer la taille du noyau fluide de la planète. Mon expertise sur Mercure m'a également amené à collaborer avec une équipe de l'US Naval Observatory (Washington, DC, USA) spécialisée dans les effets de marée, pour comprendre la façon dont la planète a été capturée dans son actuelle résonance spin-orbite (Chapitre 9).

Ayant été formé dans un laboratoire spécialisé dans les éphémérides, je me suis toujours attaché à utiliser la modélisation la plus réaliste possible du mouvement orbital du corps que j'étudiais, ceci notamment afin d'inclure toute résonance éventuelle avec une fréquence de forçage. Un modèle orbital complet est complexe, ceci a nécessité la mise au point d'algorithmes numériques sans lesquels certaines des études que je présente ici n'auraient pas été menées à bien. J'expose ici un algorithme, NAFFO pour Numerical Algorithm For Forced Oscillations, qui se base sur le fait que les mouvements de rotation sont quasipériodiques pour déterminer itérativement et avec une grande précision l'équilibre dynamique d'un corps en résonance spin-orbite pour lequel on tient compte du mouvement orbital complet (Chapitre 10).

Première partie

**La rotation des satellites naturels**



## Chapitre 2

# Un modèle Hamiltonien de rotation rigide

Ce chapitre donne une formulation Hamiltonienne de la rotation rigide d'un corps triaxial. Il est fortement inspiré des travaux de Jacques Henrard (Henrard & Schwanen, 2004; Henrard, 2005,b), à la suite desquels mes travaux se situent.

### 2.1 Exposition du problème

On considère ici que l'objet d'étude  $S$  est un ellipsoïde triaxial, rigide, en orbite autour de sa planète parente  $P$ . La matrice d'inertie  $I$  du satellite  $S$  est définie ainsi :

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

dans un repère normal  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$  lié au satellite, avec  $0 \leq A \leq B \leq C$ . Les axes  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$  sont les *axes principaux d'inertie* du satellite. On a, par définition des moments principaux d'inertie  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

$$A = \iiint \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz, \quad (2.2)$$

$$B = \iiint \rho(x, y, z) (x^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz, \quad (2.3)$$

$$C = \iiint \rho(x, y, z) (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz, \quad (2.4)$$

où  $\rho(x, y, z)$  est la masse volumique locale, chaque élément de masse du satellite étant repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  dans le repère  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ . Pour un corps homogène, la quantité  $\rho$  est constante, on a  $M_S = 4\pi/3\rho abc$  et

$$A = \frac{M_S}{5} (b^2 + c^2), \quad (2.5)$$

$$B = \frac{M_S}{5} (a^2 + c^2), \quad (2.6)$$

$$C = \frac{M_S}{5} (a^2 + b^2), \quad (2.7)$$

où  $M_S$  est la masse du satellite, et  $0 \leq c \leq b \leq a$  sont les 3 rayons,  $c$  est le rayon polaire, il correspond à l'axe  $\vec{f}_3$ .  $a$  et  $b$  sont les rayons équatoriaux liés aux axes  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$ . Pour un corps en rotation synchrone, ils sont dirigés respectivement vers la planète et le long de l'orbite.

Dans notre étude nous distinguerons l'orientation du moment cinétique  $\vec{G}$  et celle des axes principaux d'inertie, ou axes de figure,  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ . Nous avons besoin de 2 autres repères de référence : un repère inertiel  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , et un repère lié au moment cinétique  $\vec{G}$   $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ , avec  $\vec{G} = G\vec{n}_3$ . Dans la pratique, le repère inertiel sera le plan équatorial du corps parent à la date J2000. Le passage d'un repère à un autre se fait grâce à 2 jeux d'angles d'Euler :  $(h, K, g)$  du repère inertiel  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  vers le repère du moment cinétique  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ , et  $(-J, l)$  de  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$  vers le repère lié au satellite  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$  (Fig.2.1).

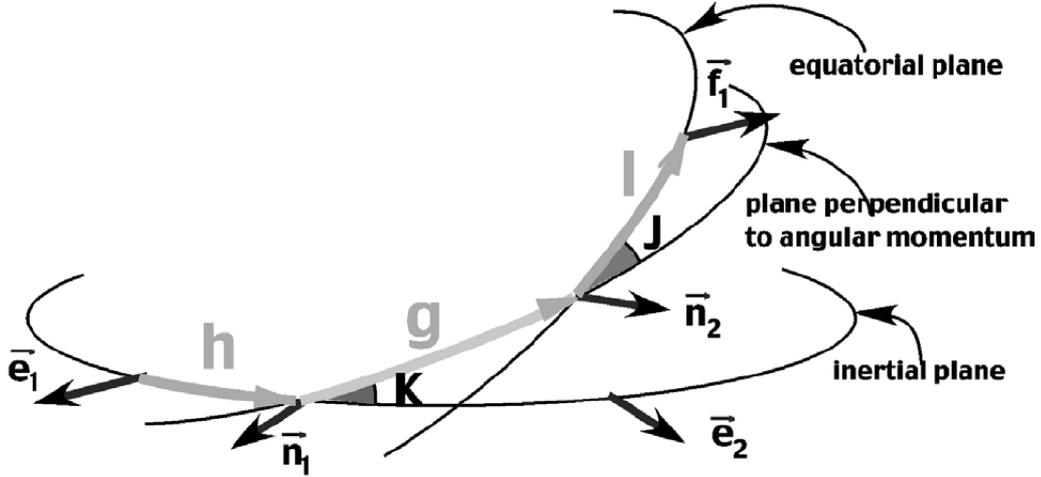


FIGURE 2.1 – Les angles d'Euler du problème (reproduit de (Henrard, 2005)).

$h$  représente l'orientation de la ligne des noeuds du repère du moment cinétique par rapport au repère inertiel. Nous appellerons  $K$  l'*obliquité inertielle*, cet angle représente l'orientation du moment cinétique du satellite par rapport à la normale au plan de référence, alors que classiquement l'obliquité est définie par rapport à la normale à l'orbite du satellite.  $g$  est un angle de spin tournant avec le satellite. L'angle  $J$  représente l'amplitude du *mouvement polaire*, c'est-à-dire la déviation de l'orientation du moment cinétique par rapport à l'axe de figure, et  $l$  est l'orientation de ce mouvement polaire.

À ces angles sont associées les variables canoniques d'Andoyer (Andoyer, 1926) :

$$\begin{array}{ll}
l & L = G \cos J \\
g & G \\
h & H = G \cos K,
\end{array} \tag{2.8}$$

il découle naturellement des définitions de  $J$  et  $K$  que  $L$  et  $H$  sont les projections du moment cinétique  $\vec{G}$  sur  $\vec{f}_3$  et  $\vec{e}_3$ , respectivement. Si l'obliquité  $K$  est en général significative, il n'en est pas de même pour l'amplitude du mouvement polaire  $J$ . Quand  $J$  est nul, alors les angles  $l$  et  $g$  ne sont pas clairement définis, alors que leur somme l'est toujours. Nous contourrons ce problème en introduisant les éléments d'Andoyer modifiés :

$$\begin{array}{ll}
p = l + g + h & P = \frac{G}{nC} \\
r = -h & R = \frac{G-H}{nC} = 2P \sin^2 \frac{K}{2} \\
\xi = -\sqrt{\frac{2(G-L)}{nC}} \sin l = -\sqrt{\frac{2G}{nC}} \sin \frac{J}{2} \sin l & \eta = \sqrt{\frac{2(G-L)}{nC}} \cos l = \sqrt{\frac{2G}{nC}} \sin \frac{J}{2} \cos l.
\end{array} \tag{2.9}$$

Ici, les variables cartésiennes  $\xi$  et  $\eta$  sont nulles lorsque  $J$  est nul, l'indétermination est donc levée.  $nC$  est un facteur de normalisation, c'est la norme moyenne du moment cinétique  $\vec{G}$  si le satellite est en rotation synchrone.

## 2.2 Les équations du mouvement

Comme dit précédemment, nous considérons que la seule force exercée sur le satellite est la perturbation gravitationnelle de sa planète parente. Nos variables (Eq.2.9) étant canoniques, nous pouvons utiliser une formulation Hamiltonienne. Pour cela, nous devons exprimer l'énergie cinétique  $\mathcal{T}$  et l'énergie potentielle  $\mathcal{V}$  due à la perturbation gravitationnelle de la planète.

### 2.2.1 L'énergie cinétique $\mathcal{T}$

On a

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{G}, \tag{2.10}$$

où  $\vec{\omega}$  est le vecteur rotation instantanée. Il découle de la définition des moments d'inertie et des angles d'Euler :

$$\vec{G} = G \sin J \sin l \vec{f}_1 + G \sin J \cos l \vec{f}_2 + G \cos J \vec{f}_3, \tag{2.11}$$

$$\vec{\omega} = \frac{G}{A} \sin J \sin l \vec{f}_1 + \frac{G}{B} \sin J \cos l \vec{f}_2 + \frac{G}{C} \cos J \vec{f}_3. \tag{2.12}$$

Dans ce cas, on obtient

$$\mathcal{T} = \frac{G^2 \sin^2 J}{2} \left( \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{G^2 \cos^2 J}{2C} \tag{2.13}$$

ce qui donne, dans les variables d'Andoyer :

$$\mathcal{T} = \frac{G^2 - L^2}{2} \left( \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C} \tag{2.14}$$

et, dans les variables d'Andoyer modifiées<sup>1</sup> :

$$\mathcal{T} = nC \left( \frac{nP^2}{2} + \frac{n}{8} (4P - \xi^2 - \eta^2) \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \xi^2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \gamma_1 + \gamma_2} \eta^2 \right) \right) \quad (2.15)$$

avec

$$\gamma_1 = \frac{2C - A - B}{2C} = J_2 \frac{M_S R_S^2}{C}, \quad (2.16)$$

$$\gamma_2 = \frac{B - A}{2C} = 2C_{22} \frac{M_S R_S^2}{C}. \quad (2.17)$$

$J_2 = -C_{20}$  et  $C_{22}$  sont les classiques harmoniques de degré 2 du champ de gravité du satellite, ou *coefficients de Stokes*, et  $R_S$  son rayon moyen.

### 2.2.2 L'énergie potentielle $\mathcal{V}$

Le potentiel gravitationnel de l'interaction entre le satellite et sa planète, vue comme une masse sphérique<sup>2</sup>, s'écrit

$$\mathcal{V} = -\mathcal{G}M_P \iiint_W \frac{\rho}{r'} dW, \quad (2.18)$$

où  $\mathcal{G}$  est la constante gravitationnelle,  $W$  le volume du satellite, et  $d'$  la distance entre le centre de masse de la planète et l'élément de masse du satellite. Ce potentiel (2.18) peut être développé en harmoniques sphériques sous la forme

$$\mathcal{V} = -\frac{\mathcal{G}M_P M_S}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_S}{r} \right)^n P_n^m(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)), \quad (2.19)$$

où  $r$  est la distance satellite-planète. Les fonctions  $P_n^m$  sont les fonctions de Legendre associées, définies par rapport aux polynômes de Legendre classiques  $P_n$  par :

$$P_n^m(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(u)}{du^m}. \quad (2.20)$$

Les angles  $\phi$  et  $\lambda$  sont respectivement la latitude et la longitude, et les coefficients  $C_{nm}$  et  $S_{nm}$  sont les coefficients de Stokes zonaux ( $m = 0$ ), tesseraux ( $m < n$ ) et sectoriaux ( $m = n$ ). Avec les hypothèses que nous avons faites sur le champ de gravité du satellite, c'est-à-dire un ellipsoïde triaxial rigide homogène, et un choix optimal du repère de référence dans lequel on travaille, ici celui des axes principaux d'inertie ( $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ ), le potentiel (2.19) prend une forme simplifiée

$$\mathcal{V} = -\frac{\mathcal{G}M_P M_S}{r} \left( 1 + \left( \frac{R_S}{r} \right)^2 (C_{20} P_2(\sin \phi) + C_{22} P_2^2(\sin \phi) \cos 2\lambda) \right), \quad (2.21)$$

avec

1. cette formule est donnée avec une erreur typographique dans (Henrard, 2005b)

2. Henrard (2005c) étudie l'influence de l'aplatissement de la planète, introduit comme un terme correctif. Cela a une influence négligeable.

$$P_2(u) = \frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{2}, \quad (2.22)$$

$$P_2^2(u) = 3 - 3u^2. \quad (2.23)$$

Dans le potentiel (2.21), le premier terme n'a aucun effet sur la rotation car il correspond à un satellite ponctuel, on a donc maintenant

$$\mathcal{V} = -\mathcal{G}M_P M_S \frac{R_S^2}{r^3} \left( -\frac{3}{2}C_{20} \cos^2 \phi + 3C_{22} \cos^2 \phi \cos 2\lambda \right), \quad (2.24)$$

où  $P_2(\sin \phi) = 3/2 \sin^2 \phi - 1/2$  a été remplacé par  $3/2 \sin^2 \phi - 3/2$  par simple ajout de constante, ce qui permet d'écrire  $P_2(\sin \phi) = -3/2 \cos^2 \phi$ . Soit  $\vec{r}$  le vecteur satellite-planète, posons

$$\vec{r} = x_S \vec{f}_1 + y_S \vec{f}_2 + z_S \vec{f}_3, \quad (2.25)$$

$$= r \left( \hat{x}_S \vec{f}_1 + \hat{y}_S \vec{f}_2 + \hat{z}_S \vec{f}_3 \right), \quad (2.26)$$

avec

$$\hat{x}_S = \cos \phi \cos \lambda, \quad (2.27)$$

$$\hat{y}_S = \cos \phi \sin \lambda, \quad (2.28)$$

$$\hat{z}_S = \sin \phi. \quad (2.29)$$

On a alors

$$\cos^2 \phi = \hat{x}_S^2 + \hat{y}_S^2, \quad (2.30)$$

$$\cos^2 \phi \cos 2\lambda = \hat{x}_S^2 - \hat{y}_S^2, \quad (2.31)$$

et

$$\mathcal{V} = -\frac{3}{2}\mathcal{G}M_P M_S \frac{R_S^2}{r^3} \left( J_2 \left( \hat{x}_S^2 + \hat{y}_S^2 \right) + 2C_{22} \left( \hat{x}_S^2 - \hat{y}_S^2 \right) \right), \quad (2.32)$$

ou encore

$$\mathcal{V} = -\frac{3}{2}C \frac{\mathcal{G}M_P}{r^3} \left( \gamma_1 \left( \hat{x}_S^2 + \hat{y}_S^2 \right) + \gamma_2 \left( \hat{x}_S^2 - \hat{y}_S^2 \right) \right). \quad (2.33)$$

### 2.2.3 Le Hamiltonien du problème

Le Hamiltonien du problème  $\mathcal{H} = (\mathcal{T} + \mathcal{V})/(nC)$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p, r, \xi, P, R, \eta, t) &= \frac{nP^2}{2} + \frac{n}{8} \left( 4P - \xi^2 - \eta^2 \right) \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \xi^2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \gamma_1 + \gamma_2} \eta^2 \right) \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}M_P}{nr(t)^3} \left( \gamma_1 \left( \hat{x}_S(t)^2 + \hat{y}_S(t)^2 \right) + \gamma_2 \left( \hat{x}_S(t)^2 - \hat{y}_S(t)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ici le choix a été fait de l'écrire sous forme non autonome, c'est-à-dire dépendant explicitement du temps. Ceci est implicitement une conséquence du fait que le mouvement orbital du satellite autour de la planète, plutôt vu ici comme le mouvement de la planète autour du satellite, est considéré comme un forçage externe, qui agit sur la rotation mais sans lui-même être affecté. Cette approximation est tout-à-fait légitime dans le cas des satellites de planètes géantes où l'énergie de rotation est de plusieurs ordres de grandeur inférieure à l'énergie orbitale, il suffit pour le voir de comparer les masses de la planète  $M_P$  et du satellite  $M_S$ . Cette approximation perd de sa légitimité dans le cas des astéroïdes binaires où un modèle complet d'interactions entre la rotation et l'orbite doit être considéré (Maciejewski, 1995; Fahnstock & Scheeres, 2008; Boué & Laskar, 2009).

En général, le mouvement orbital du satellite est donné dans un repère inertiel  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  par des éphémérides comme L1 pour les satellites Galiléens de Jupiter (Lainey et al., 2006) ou TASS pour les principaux satellites de Saturne (Vienne & Duriez, 1995), il est donc nécessaire d'effectuer des rotations pour se mettre dans le repère lié au satellite  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ . En appelant  $(\hat{x}_I, \hat{y}_I, \hat{z}_I)$  les coordonnées du vecteur unitaire pointant vers la planète dans le repère inertiel, il découle de la définition des angles d'Euler (Fig.2.1) :

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_S \\ \hat{y}_S \\ \hat{z}_S \end{pmatrix} = R_3(-l)R_1(-J)R_3(-g)R_1(-K)R_3(-h) \begin{pmatrix} \hat{x}_I \\ \hat{y}_I \\ \hat{z}_I \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

où les matrices de rotation sont définies par<sup>3</sup> :

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

et

$$R_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Ce Hamiltonien donne directement les équations du problème :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} & \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} & \frac{dR}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dans toutes les études de rotation rigide que je montre par la suite, les simulations numériques ont consisté à propager les équations (2.38). Nulle part ces équations n'imposent que le satellite soit en rotation synchrone. La normalisation par  $nC$  le suggère, mais n'est en aucun cas une contrainte.

---

3. Il est important de les définir, car il existe 2 conventions de signe pour les angles...

Ces équations sont donc valables pour tout corps rigide dont la rotation n'influe pas significativement sur l'orbite, ce sont les conditions initiales qui vont déterminer si la rotation est résonnante ou non, et de quelle résonance il s'agit.

### 2.3 Caractérisation de la rotation résonnante

Le but de cette section est de caractériser l'état d'équilibre dynamique dans lequel les satellites naturels sont supposés être. Il s'agit d'une étude analytique visant à comprendre le fonctionnement global du système. Pour cela, nous faisons quelques approximations, mais dans les applications qui vont suivre, nous utiliserons notamment un code numérique propageant les équations complètes (2.38) et utilisant le mouvement orbital réel du satellite. L'état d'équilibre implique une rotation en moyenne synchrone, une obliquité correspondant à l'État de Cassini 1, et un mouvement polaire très petit. Le choix qui a été fait ici est de considérer la dynamique d'un point de vue global, c'est-à-dire en considérant les 3 degrés de liberté du système simultanément, sans négliger leurs couplages. Une telle approche peut faire intervenir un grand nombre de termes, c'est la raison pour laquelle nous négligeons ici tout effet non indispensable à l'établissement de cet équilibre, en particulier nous considérons que l'orbite du satellite est circulaire.

Cette approximation a l'inconvénient d'empêcher la modélisation des libérations forcées en longitude, souvent mises en avant en planétologie. Ces libérations sont très bien modélisées par une approche plus classique consistant à considérer un problème plan (inclinaison orbitale nulle,  $K = J = 0$ ) et une excentricité constante. Sous ces hypothèses, le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  devient (Goldreich & Peale, 1966; Celletti, 1990; Murray & Dermott, 1999) :

$$\mathcal{H}(p, -, -, P, -, -, t) = \frac{nP^2}{2} - \frac{3n}{4} \frac{B - A}{C} \sum_i H\left(\frac{i}{2}, e\right) \cos(2p - i\lambda), \quad (2.39)$$

où  $\lambda = nt$  est la longitude moyenne du satellite, et les fonctions  $H\left(\frac{i}{2}, e\right) = G_{20(i-2)}(e)$  sont des fonctions classiques en excentricité définies par (Kaula, 1966). On a, sous forme développée en excentricité :

$$\begin{aligned}
\sum_i H\left(\frac{i}{2}, e\right) \cos(2p - i\lambda) &= \frac{15625}{129024} e^7 \cos(2p + 5\lambda) \\
&+ \frac{4}{45} e^6 \cos(2p + 4\lambda) \\
&+ \left(\frac{81}{1280} e^5 + \frac{81}{2048} e^7\right) \cos(2p + 3\lambda) \\
&+ \left(\frac{1}{24} e^4 + \frac{7}{240} e^6\right) \cos(2p + 2\lambda) \\
&+ \left(\frac{1}{48} e^3 + \frac{11}{768} e^5 + \frac{313}{30720} e^7\right) \cos(2p + \lambda) \\
&+ \left(-\frac{1}{2} e + \frac{1}{16} e^3 - \frac{5}{384} e^5 - \frac{143}{18432} e^7\right) \cos(2p - \lambda) \\
&+ \left(1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 - \frac{35}{288} e^6\right) \cos(2p - 2\lambda) \\
&+ \left(\frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 + \frac{489}{128} e^5 - \frac{1763}{2048} e^7\right) \cos(2p - 3\lambda) \quad (2.40) \\
&+ \left(\frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 + \frac{601}{48} e^6\right) \cos(2p - 4\lambda) \\
&+ \left(\frac{845}{48} e^3 - \frac{32525}{768} e^5 + \frac{208225}{6144} e^7\right) \cos(2p - 5\lambda) \\
&+ \left(\frac{533}{16} e^4 - \frac{13827}{160} e^6\right) \cos(2p - 6\lambda) \\
&+ \left(\frac{228347}{3840} e^5 - \frac{3071075}{18432} e^7\right) \cos(2p - 7\lambda) \\
&+ \frac{73369}{720} e^6 \cos(2p - 8\lambda) \\
&+ \frac{12144273}{71680} e^7 \cos(2p - 9\lambda) + \mathcal{O}(e^8).
\end{aligned}$$

On voit ainsi qu'à excentricité nulle (orbite circulaire), seule la résonance synchrone d'argument  $2p - 2\lambda$  subsiste. Le seul autre cas de résonance connu dans le Système Solaire est la résonance 3 : 2 de Mercure, d'argument  $2p - 3\lambda$ . On voit que le préfacteur est de degré 1 en excentricité, Mercure a d'ailleurs une excentricité significative, actuellement 0.206, alors que l'excentricité des satellites est généralement d'un ordre de grandeur plus faible.

### 2.3.1 La rotation d'équilibre des satellites des planètes géantes

#### La position d'équilibre

Nous repartons ici du Hamiltonien (2.34) à partir duquel nous allons étudier l'état de rotation attendu des satellites naturels, c'est-à-dire l'État de Cassini 1 avec rotation synchrone. L'orbite du satellite autour de sa planète parente est circulaire, avec une inclinaison constante et une précession uniforme de son nœud ascendant. En notant  $a$ ,  $I$ ,  $\lambda$  et  $\Omega$  les éléments orbitaux du satellite, respectivement le demi-grand axe, l'inclinaison, la longitude moyenne et le nœud ascendant, les coordonnées du vecteur unitaire pointant vers la planète s'écrivent, dans le repère inertiel  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  :

$$\hat{x}_I = -\cos \delta \Omega \cos(\lambda - \delta) + \cos I \sin \delta \sin(\lambda - \delta), \quad (2.41)$$

$$\hat{y}_I = -\sin \delta \Omega \cos(\lambda - \delta) - \cos I \cos \delta \sin(\lambda - \delta), \quad (2.42)$$

$$\hat{z}_I = -\sin I \sin(\lambda - \delta). \quad (2.43)$$

On cherche ici à caractériser un comportement moyen du système, ce qui nécessite de moyenniser le Hamiltonien du problème. Pour cela, on commence par exprimer les angles en libration. À la résonance synchrone, l'angle  $p - \lambda$  libère autour de 0 ou  $\pi$ , ce qui veut dire que l'axe le plus long du satellite pointe en moyenne vers la planète (en fait vers l'antifoyer de son orbite, la distinction n'a pas de sens ici puisque l'orbite est circulaire). De plus, il découle de la définition de l'État de Cassini 1, et plus précisément de la troisième loi de Cassini que, si le plan du repère inertiel  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est choisi de façon à optimiser la représentation de la rotation (cf. Sect.3.3), alors l'argument  $\Omega - h = r + \delta$  est lui aussi en libration.

Afin de tenir compte de ces librations, nous faisons le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \sigma &= p - \lambda & P \\ \rho &= r + \delta & R \\ \xi & & \eta. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ce changement de variables dépend linéairement du temps, nous devons donc ajouter au Hamiltonien  $\mathcal{H}$  la quantité  $-nP + \dot{\delta}R$ , où  $\dot{\delta}$  est la vitesse de précession constante du nœud  $\delta$ .

Tous calculs faits, on obtient, après moyennisation :

$$\hat{x}_S^2 + \hat{y}_S^2 = a_1 \sin^2 K + a_2 \sin K \cos K \cos \rho + a_3 \cos 2\rho(1 - \cos 2K) + \mathcal{O}(\xi^2, \xi\eta, \eta^2) \quad (2.45)$$

et

$$\begin{aligned} \hat{x}_S^2 - \hat{y}_S^2 &= b_1(1 + \cos K)^2 \cos 2\sigma + b_2 \sin K(1 + \cos K) \cos(2\sigma + \rho) + b_3 \sin^2 K \cos(2\sigma + 2\rho) \\ &+ b_4 \sin K(1 - \cos K) \cos(2\sigma + 3\rho) + b_5(1 - \cos K)^2 \cos(2\sigma + 4\rho) \\ &+ \mathcal{O}(\xi^2, \xi\eta, \eta^2) \end{aligned} \quad (2.46)$$

avec

$$a_1 = \frac{\sin^2 I}{2} - \frac{1 + \cos^2 I}{4}, \quad (2.47)$$

$$a_2 = \frac{\sin 2I}{2}, \quad (2.48)$$

$$a_3 = \frac{\sin^2 I}{8}, \quad (2.49)$$

$$b_1 = \frac{1 + 2 \cos I + \cos^2 I}{16}, \quad (2.50)$$

$$b_2 = \frac{2 \sin I + \sin 2I}{8}, \quad (2.51)$$

$$b_3 = \frac{3}{8} \sin^2 I, \quad (2.52)$$

$$b_4 = \frac{2 \sin I - \sin 2I}{8}, \quad (2.53)$$

$$b_5 = \frac{1 - 2 \cos I + \cos^2 I}{16}. \quad (2.54)$$

Il en découle le Hamiltonien moyenné  $\mathcal{H}_1$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{nP^2}{2} - nP + \dot{\Omega}R - \frac{3n}{2}\gamma_1[a_1 \sin^2 K + a_2 \sin K \cos K \cos \rho + a_3 \cos 2\rho(1 - \cos 2K)] \\ &- \frac{3n}{2}\gamma_2[b_1(1 + \cos K)^2 \cos 2\sigma + b_2 \sin K(1 + \cos K) \cos(2\sigma + \rho) \\ &+ b_3 \sin^2 K \cos(2\sigma + 2\rho) + b_4 \sin K(1 - \cos K) \cos(2\sigma + 3\rho) \\ &+ b_5(1 - \cos K)^2 \cos(2\sigma + 4\rho)] + \mathcal{O}(\xi^2, \xi\eta, \eta^2), \end{aligned} \quad (2.55)$$

la notation  $K$  est conservée uniquement par commodité d'écriture. Lorsqu'on est à l'équilibre strict, on a, par hypothèse<sup>4</sup>,  $\sigma = \rho = 0$ , et par définition de l'équilibre :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial P} = 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial R} = 0, \quad (2.57)$$

ce qui donne

$$n \left( P - 1 - \frac{3}{2} \Delta \frac{\cos K - 1}{P \sin K} \right) = 0, \quad (2.58)$$

$$\dot{\Omega} - \frac{3}{2} \frac{n\Delta}{P \sin K} = 0, \quad (2.59)$$

avec

---

4. ce qui signifie qu'on ne cherche pas tous les équilibres, mais juste à caractériser l'État de Cassini 1

$$\begin{aligned}
\Delta &= \gamma_1 (a_1 \sin 2K + a_2 \cos 2K + 2a_3 \sin 2K) \\
&+ \gamma_2 (-2b_1 \sin K(1 + \cos K) + b_2(\cos K + \cos 2K) + b_3 \sin 2K \\
&+ b_4(\cos K - \cos 2K) + 2b_5 \sin K(1 - \cos K)).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Dans le cadre d'une application, on peut résoudre numériquement le système composé des équations (2.58) et (2.59). Dans un cadre plus général, en supposant les quantités  $K$  et  $I$  petites, l'équation (2.58) donne immédiatement  $P^* = 1$ , l'étoile désignant la valeur à l'équilibre.

Soit  $\epsilon$  l'obliquité mesurée par rapport à la normale à l'orbite. La troisième loi de Cassini (Cassini, 1693; Colombo, 1966), initialement écrite pour la Lune, affirme que l'axe de rotation, la normale à l'orbite, et la normale au plan de référence sont coplanaires, ce qui permet d'écrire  $\epsilon = K^* - I$ . En substituant  $P^*$  dans l'équation (2.58) à partir de son expression découlant de (Eq.2.59), on a :

$$\begin{aligned}
0 &= -1 + \frac{\dot{\delta\Omega}}{n} (1 - \cos(I + \epsilon)) - \frac{3}{8} \frac{n}{\dot{\delta\Omega}} \frac{2\gamma_1 \sin 2\epsilon + \gamma_2 (\sin 2\epsilon + 2 \sin \epsilon)}{\sin(I + \epsilon)} \\
&- \frac{3}{8} \gamma_1 \frac{n \sin(I + 2\epsilon) + \sin(3I + 2\epsilon)}{\dot{\delta\Omega} \sin(I + \epsilon)}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

### Les petites oscillations autour de l'équilibre

Une manière de caractériser le comportement d'un système à l'équilibre est d'évaluer les fréquences des petites oscillations (ou librations) autour. On s'attend a priori à ce que ces petites oscillations aient une amplitude suffisamment faible pour être négligeable et indétectable. Néanmoins, connaître leur fréquence de libration peut permettre de détecter si elles subsistent, et aussi d'estimer l'amplitude de réponse aux sollicitations forcées.

On part du Hamiltonien moyenné  $\mathcal{H}_1$  (Eq.2.55) et on introduit de nouvelles variables afin de se centrer sur la position d'équilibre :

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \sigma, & \eta_1 &= P - P^*, \\
\xi_2 &= \rho, & \eta_2 &= R - R^*, \\
\xi_3 &= \xi, & \eta_3 &= \eta.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Exprimé dans ces variables, le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  ne contient plus de termes linéaires<sup>5</sup>. Soit  $\mathcal{N}$  la somme des termes quadratiques, on peut écrire :

$$\mathcal{N}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = n \left( \gamma_{11} \xi_1^2 + 2\gamma_{12} \xi_1 \xi_2 + \gamma_{22} \xi_2^2 + \gamma_{33} \xi_3^2 + \mu_{11} \eta_1^2 + 2\mu_{12} \eta_1 \eta_2 + \mu_2 \eta_2^2 + \mu_{33} \eta_3^2 \right) \tag{2.63}$$

avec

---

5. Le lecteur avisé aura remarqué que c'était déjà le cas pour le troisième degré de liberté, lié au mouvement polaire. Nous n'excluons pas que son amplitude  $J$  ait une valeur d'équilibre non nulle, mais cette quantité est en général négligée. De plus, en tenir compte rend les calculs bien plus complexes, donc nous laissons ce problème de côté dans le cadre de cette étude analytique. Néanmoins, cet effet est bien présent dans les simulations numériques que nous présentons au Chap.3.

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = & 3\gamma_2(b_1(1 + \cos K^*)^2 + b_2 \sin K^*(1 + \cos K^*) \\ & + b_3 \sin^2 K^* + b_4 \sin K^*(1 - \cos K^*) + b_5(1 - \cos K^*)^2), \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = & \frac{3}{2}\gamma_2(b_2 \sin K^*(1 + \cos K^*) + b_3 \sin^2 K^* \\ & + 3b_4 \sin K^*(1 - \cos K^*) + 4b_5(1 - \cos K^*)^2), \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{22} = & \gamma_1\left(\frac{3}{8}a_2 \sin 2K^* + 6a_3 \sin^2 K^*\right) + \gamma_2\left(\frac{3}{4}b_2 \sin K^*(1 + \cos K^*) + 3b_3 \sin^2 K^* \right. \\ & \left. + \frac{27}{4}b_4 \sin K^*(1 - \cos K^*) + 12b_5(1 - \cos K^*)^2\right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\gamma_{33} = \frac{P^*}{2} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{1 - \gamma_1 - \gamma_2} + \frac{3}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \left( \frac{\cos(K^* - I)}{4} + \frac{7}{16} \cos(2(K^* - I)) + \frac{5}{16} \right), \quad (2.67)$$

et

$$\begin{aligned} \mu_{11} = & \frac{1}{2} - \frac{3\gamma_1}{2P^{*2}} \left( (a_1 + 2a_3)(1 - \cos K^*)(3 \cos K^* - 1) \right. \\ & \left. + \frac{a_2}{2} \frac{\sin K^*}{(1 + \cos K^*)^2} (6 \cos^3 K^* + 4 \cos^2 K^* - 5 \cos K^* - 2) \right) \\ & - \frac{3\gamma_2}{2P^{*2}} \left( b_1(3 \cos K^* + 1)(\cos K^* - 1) + \frac{3}{2} b_2 \frac{\sin K^* \cos 2K^*}{1 + \cos K^*} \right. \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} & \left. + b_3(1 - \cos K^*)(3 \cos K^* - 1) + \frac{b_4}{2} \frac{1 - \cos K^*}{1 + \cos K^*} \sin K^*(1 + 8 \cos K^* + 6 \cos^2 K^*) + 3b_5 \right), \\ \mu_{12} = & -\frac{3\gamma_1}{2P^{*2}} \left( (a_1 + 2a_3)(1 - 2 \cos K^*) + \frac{a_2}{2} \frac{1 + 4 \cos K^* - 2 \cos^2 K^* - 4 \cos^3 K^*}{\sin K^*(1 + \cos K^*)} \right) \\ & - \frac{3\gamma_2}{2P^{*2}} \left( 2b_1 \cos K^* - b_2 \frac{4 \cos^2 K^* - \cos K^* - 2}{2 \sin K^*} - b_3(2 \cos K^* - 1) \right. \\ & \left. + \frac{b_4}{2} \frac{\cos K^* \cos K^* - 1}{\sin K^* \cos K^* + 1} (4 \cos K^* + 5) - 2b_5 \frac{\sin^2 K^*}{1 + \cos K^*} \right), \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \mu_{22} = & \frac{3\gamma_1}{2P^{*2}} \left( a_1 + \frac{a_2}{2} \frac{3 \cos K^* - 2 \cos^3 K^*}{\sin^3 K^*} + 2a_3 \right) \\ & - \frac{3\gamma_2}{2P^{*2}} \left( b_1 + \frac{b_2}{2} \frac{2 \cos^3 K^* - 3 \cos K^* - 1}{\sin^3 K^*} - b_3 - \frac{b_4}{2} \frac{1 - 3 \cos K^* + 2 \cos^3 K^*}{\sin^3 K^*} + b_5 \right), \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\mu_{33} = \frac{P^*}{2} \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \gamma_1 + \gamma_2}. \quad (2.71)$$

On peut remarquer la présence de termes croisés  $\xi_1 \xi_2$  et  $\eta_1 \eta_2$  qu'il serait intéressant d'éliminer pour découpler les 2 degrés de liberté associés. Pour cela nous introduisons la *untangling transformation*<sup>6</sup>(Henrard & Lemaître, 2005) :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - \beta x_2 & \eta_1 &= (1 - \alpha\beta)y_1 - \alpha y_2 \\ \xi_2 &= \alpha x_1 + (1 - \alpha\beta)x_2 & \eta_2 &= \beta y_1 + y_2 \\ \xi_3 &= x_3 & \eta_3 &= y_3, \end{aligned} \quad (2.72)$$

---

6. En français on dirait qu'on diagonalise le système. Je remercie Philippe Robutel pour m'avoir inspiré cette traduction.

en choisissant  $\alpha$  et  $\beta$  de façon à ce que  $\mathcal{N}$  s'écrive comme une somme de carrés, c'est-à-dire :

$$\mathcal{N}_1 = n \left( \zeta_1 x_1^2 + \zeta_2 x_2^2 + \zeta_3 x_3^2 + \psi_1 y_1^2 + \psi_2 y_2^2 + \psi_3 y_3^2 \right) \quad (2.73)$$

avec

$$\zeta_1 = \gamma_{11} + 2\gamma_{12}\alpha + \gamma_{22}\alpha^2, \quad (2.74)$$

$$\zeta_2 = \gamma_{11}\beta^2 - 2\beta(1 - \alpha\beta)\gamma_{12} + \gamma_{22}(1 - \alpha\beta)^2, \quad (2.75)$$

$$\psi_1 = \mu_{11}(1 - \alpha\beta)^2 + 2\beta(1 - \alpha\beta)\mu_{12} + \beta^2\mu_{22}, \quad (2.76)$$

$$\psi_2 = \alpha^2\mu_{11} - 2\alpha\mu_{12} + \mu_{22}, \quad (2.77)$$

$$\zeta_3 = \gamma_{33}, \quad (2.78)$$

$$\psi_3 = \mu_{33}. \quad (2.79)$$

On trouve  $\alpha$  et  $\beta$  en résolvant les équations :

$$\gamma_{12} - \gamma_{11}\beta + \gamma_{22}\alpha - 2\gamma_{12}\alpha\beta - \gamma_{22}\alpha^2\beta = 0, \quad (2.80)$$

$$\mu_{12} - \mu_{11}\alpha + \mu_{22}\beta + \mu_{11}\alpha^2\beta - 2\mu_{12}\alpha\beta = 0, \quad (2.81)$$

qui s'écrivent également

$$\beta = \frac{\gamma_{12} + \gamma_{22}\alpha}{\gamma_{11} + 2\gamma_{12}\alpha + \gamma_{22}\alpha^2} = \frac{\mu_{11}\alpha - \mu_{12}}{\mu_{22} + \mu_{11}\alpha^2 - 2\mu_{12}\alpha}, \quad (2.82)$$

$$0 = (\gamma_{12}\mu_{11} + \gamma_{22}\mu_{12})\alpha^2 + (\mu_{11}\gamma_{11} - \gamma_{22}\mu_{22})\alpha - \gamma_{12}\mu_{22} - \gamma_{11}\mu_{12}. \quad (2.83)$$

Le système d'équations (2.82-2.83) a 2 solutions. Le choix du couple  $(\alpha, \beta)$  déterminera si les variables  $(x_1, y_1)$  représenteront plutôt le mouvement en longitude, ou plutôt en obliquité. En pratique, le couplage entre ces 2 degrés de liberté est faible et négligé par de nombreux auteurs, il existe une solution où  $\alpha$  est proche de 1, ce choix permet de considérer que  $(x_1, y_1)$  modélise le mouvement en longitude.

Ceci fait, on peut introduire, après changement d'échelle, les variables polaires canoniques suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2UU^*} \sin u & y_1 &= \sqrt{\frac{2U}{U^*}} \cos u \\ x_2 &= \sqrt{2VV^*} \sin v & y_2 &= \sqrt{\frac{2V}{V^*}} \cos v \\ x_3 &= \sqrt{2WW^*} \sin w & y_3 &= \sqrt{\frac{2W}{W^*}} \cos w \end{aligned} \quad (2.84)$$

avec :

$$U^* = \sqrt{\frac{\psi_1}{\zeta_1}}, \quad (2.85)$$

$$V^* = \sqrt{\frac{\psi_2}{\zeta_2}}, \quad (2.86)$$

$$W^* = \sqrt{\frac{\psi_3}{\zeta_3}}, \quad (2.87)$$

ce qui permet d'écrire le Hamiltonien quadratique  $\mathcal{N}$  ainsi :

$$\mathcal{N}_2(-, -, -, U, V, W) = \omega_u U + \omega_v V + \omega_w W \quad (2.88)$$

avec :

$$\omega_u = 2n\sqrt{\psi_1\zeta_1}, \quad (2.89)$$

$$\omega_v = 2n\sqrt{\psi_2\zeta_2}, \quad (2.90)$$

$$\omega_w = 2n\sqrt{\psi_3\zeta_3}. \quad (2.91)$$

Les angles  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont les 3 angles des librations libres autour de l'équilibre, et  $U$ ,  $V$  et  $W$  sont les amplitudes associées. Dans ce Hamiltonien  $\mathcal{N}_2$ , les termes d'ordre supérieur ont été négligés, ce qui signifie que les amplitudes sont supposées petites. On a aussi

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial U} = \omega_u, \quad (2.92)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial V} = \omega_v, \quad (2.93)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial W} = \omega_w, \quad (2.94)$$

les quantités  $\omega_{u,v,w}$  sont donc les fréquences<sup>7</sup> des petites librations, plus exactement ce sont les limites des fréquences lorsque le système est à l'équilibre dynamique.

En négligeant les couplages ( $\alpha \approx 1$ ,  $\beta \approx 0$ ), l'inclinaison  $I$  et l'obliquité  $K$ , on a

$$\begin{aligned} \psi_1 &\approx \mu_{11} \approx \frac{1}{2}, \\ \zeta_1 &\approx \gamma_{11} \approx 12\gamma_2 b_1 \frac{3B-A}{2C}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

ce qui donne, pour la fréquence des petites librations en longitude

$$\omega_u \approx n\sqrt{3\frac{B-A}{C}} = 2n\sqrt{3\frac{C_{22}}{C/(M_S R_S^2)}}. \quad (2.96)$$

Cette expression est à rapprocher de celle donnée dans la littérature pour les problèmes plans (Murray & Dermott, 1999) :

$$\omega_u = n\sqrt{3\frac{B-A}{C}H(1,e)} \quad (2.97)$$

$$\approx n\sqrt{3\frac{B-A}{C}\left(1 - \frac{5e^2}{2} + \frac{13e^4}{16} - \frac{35e^6}{288}\right)}. \quad (2.98)$$

---

7. Les puristes reconnaîtront là un abus de langage, les  $\omega_{u,v,w}$  étant en fait des pulsations. La fréquence est l'inverse de la période, et diffère de la pulsation d'un facteur  $2\pi$ .

Pour le mouvement polaire, on a

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \mu_{33} = \frac{C-B}{2B}, \\ \zeta_3 &= \gamma_{33} \approx \frac{1}{2} \frac{C-A}{A} + \frac{3}{2} \frac{C-A}{C} \approx 2 \frac{C-A}{A},\end{aligned}\tag{2.99}$$

ce qui donne

$$\omega_w \approx 2n \sqrt{\frac{C-B}{A} \frac{C-A}{B}},\tag{2.100}$$

cette formule étant notamment présente dans (Rambaux & Williams, 2011). L'obtention d'une formule analytique simple pour la fréquence d'oscillation de l'obliquité  $\omega_v$  est plus complexe car elle nécessiterait, par notre méthode, de comparer les ordres de grandeur du coefficient de couplage  $\beta$  avec l'inclinaison  $I$  et l'obliquité  $K$ . Noyelles (2010, Eq.C6) donne :

$$\omega_v = n \left( \frac{3}{2} \frac{C-A}{C} + \frac{\dot{\Omega}}{n} \cos I \right).\tag{2.101}$$

### 2.3.2 Les librations forcées

Nous considérons ici que le satellite a une orbite képlérienne autour de sa planète parente. En conséquence, le problème est plan, et l'excentricité orbitale est une constante non nulle, en général comprise entre 0.001 et 0.05.

Les librations forcées en longitude sont un mouvement oscillatoire de l'axe de plus faible inertie  $\vec{f}_1$  dans le plan orbital du satellite, dues à un forçage gravitationnel. Implicitement on désigne les oscillations à la fréquence orbitale, elles sont dues à l'excentricité de l'orbite, donc aux variations de la distance planète-satellite, ainsi qu'à la rigidité du satellite, ou dans un cas plus général de sa croûte.

On distingue généralement 3 quantités (cf. Fig.2.2) :

les *librations de marée*  $\psi$  : Il s'agit de l'angle entre la direction de l'axe de plus faible inertie  $\vec{f}_1$  et la direction satellite-planète.

les *librations optiques*  $\phi$  : Au degré 1 en excentricité, le satellite pointe naturellement vers l'anti-foyer de son orbite autour de sa planète parente. Ceci est une conséquence de son excentricité, qui induit des variations de sa vitesse orbitale instantanée. Il en résulte des librations entre la direction instantanée planète-satellite et la stricte rotation synchrone, exprimées ainsi :

$$\phi(t) = 2e \sin nt.\tag{2.102}$$

Ces librations ne sont pas affectées par l'intérieur du satellite.

les *librations physiques*  $\gamma$  : Ces librations sont définies par l'angle entre  $\vec{f}_1$  et la stricte rotation synchrone. Elles sont dominées par l'influence de l'intérieur, d'où leur nom.

Afin d'obtenir une expression analytique des librations physiques  $\gamma$ , partons du Hamiltonien plan (Eq.2.39) limité au degré 2 en excentricité :

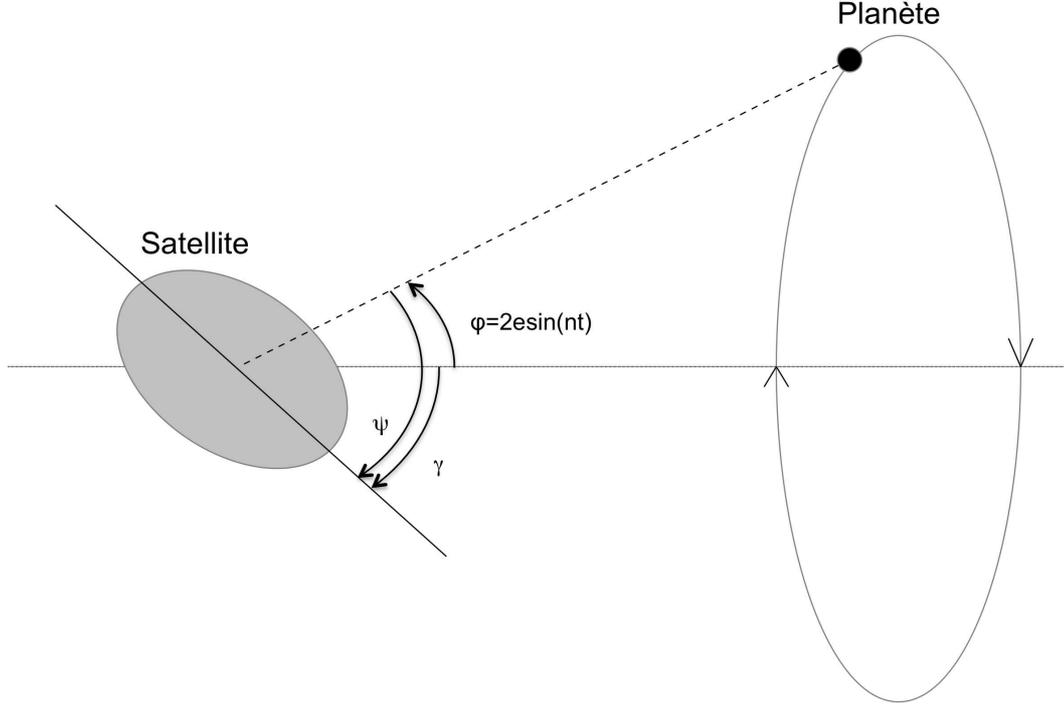


FIGURE 2.2 – Les 3 différents types de libration en longitude, exprimés dans un repère lié au satellite (figure inspirée de (Tiscareno et al., 2009)). De cette figure découle immédiatement la relation  $\phi = \gamma - \psi$ .

$$\mathcal{H}_2(p, P, t) = \frac{nP^2}{2} - \frac{3n}{4} \frac{B-A}{C} \times \left( -\frac{e}{2} \cos(2p - \lambda) + \left(1 - \frac{5e^2}{2}\right) \cos(2p - 2\lambda) + \frac{7e}{2} \cos(2p - 3\lambda) + \frac{17e^2}{2} \cos(2p - 4\lambda) \right) \quad (2.103)$$

avec  $\lambda = nt$ . En exprimant l'argument résonnant  $\sigma = p - \lambda$ , on obtient, à partir des équations de Hamilton :

$$\ddot{\sigma} + \frac{3}{4} n^2 \frac{B-A}{C} \left( -e \sin(2\sigma + \lambda) + 2 \left(1 - \frac{5e^2}{2}\right) \sin 2\sigma + 7e \sin(2\sigma - \lambda) + 17e^2 \sin(2\sigma - 2\lambda) \right) = 0. \quad (2.104)$$

À la résonance,  $\sigma$  est proche de 0, on peut donc développer l'équation (2.104) au degré 1 en  $\sigma$ , ce qui donne

$$\ddot{\sigma} + \frac{3}{4} n^2 \frac{B-A}{C} \left( -8e \sin \lambda + 4 \left(1 - \frac{5e^2}{2}\right) \sigma - 17e^2 \sin 2\lambda \right) = 0, \quad (2.105)$$

donc on déduit immédiatement

$$\sigma(t) = \mathcal{A} \cos(\omega'_0 t + \alpha) - \frac{2e\omega_0^2}{n^2 - \omega_0'^2} \sin \lambda - \frac{17}{4} \frac{e^2 \omega_0^2}{4n^2 - \omega_0'^2} \sin 2\lambda, \quad (2.106)$$

avec

$$\omega_0^2 = 3n^2 \frac{B-A}{C}, \quad (2.107)$$

$$\omega_0'^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{5e^2}{2}\right), \quad (2.108)$$

et où  $\mathcal{A}$  et  $\alpha$  sont des constantes d'intégration relatives aux librations libres. On s'attend à ce qu'elles soient suffisamment amorties pour que  $\mathcal{A}$  soit négligeable. Ceci donne l'expression des librations physiques

$$\gamma(t) = -\frac{2e\omega_0^2}{n^2 - \omega_0'^2} \sin \lambda = -\frac{2e\omega_0^2}{n^2 - \omega_0'^2} \sin nt. \quad (2.109)$$

Ce calcul permet d'appréhender une méthode de calcul des librations, présentée de façon plus générale par exemple dans (Comstock & Bills, 2003). Comme suggéré par l'Eq.(2.106), l'amplitude des librations à la fréquence  $kn$  à une amplitude proportionnelle à  $e^k$ , ce qui la rend en pratique indétectable pour  $k \geq 2$  et à la limite des possibilités des observations pour  $k = 1$ . Quand  $\gamma$  est mesuré, alors on peut obtenir  $\omega_0$  et donc le paramètre  $(B-A)/C$ , une sorte d'ellipticité équatoriale. On observe aussi un diviseur qui devient petit si la fréquence de forçage est proche de la fréquence des oscillations naturelles  $\omega_0'$ . Dans ce cas on a un phénomène de résonance qui fait radicalement croître l'amplitude de réponse du satellite, et qui par exemple a permis la détection des librations d'Épiméthée (Tiscareno et al., 2009). Ceci est en fait vrai pour tout forçage externe.

### 2.3.3 Les États de Cassini

Les États de Cassini sont les orientations possibles du moment cinétique du satellite à l'équilibre. Colombo (1966) a montré qu'ils sont au nombre de 2 ou 4, selon la vitesse de précession du nœud orbital  $\dot{\Omega}$  par rapport au moyen mouvement  $n$ . L'État de Cassini attendu pour la plupart des satellites naturels est l'État 1, considéré comme le plus stable, mais cet état n'existe pas pour la Lune, qui est dans l'État de Cassini 2. Je présente ici un calcul de ces états que j'ai présenté dans (Noyelles, 2010, Annexe B), en m'inspirant de (Ward & Hamilton, 2004). Ce sujet est également traité dans d'autres références, par exemple (Peale, 1969; Beletskii, 1972; Henrard & Murigande, 1987; D'Hoedt et al., 2006).

Ici on utilise des équations restreintes pour déterminer uniquement l'orientation du moment cinétique. On considère que l'orbite a une inclinaison constante et précesse uniformément par rapport au plan de référence  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ <sup>8</sup>. Soit  $\vec{n}$  la normale à l'orbite et  $\vec{s}$  le vecteur unitaire colinéaire au moment cinétique ( $\vec{s} = \vec{G}/G$ ).

On a

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \alpha (\vec{s} \cdot \vec{n}) (\vec{s} \times \vec{n}) + \dot{\Omega} (\vec{s} \times \vec{e}_3) \quad (2.110)$$

---

8. On peut ainsi considérer ce plan comme un Plan de Laplace. Cette notion sera l'objet de la Sec.3.3

avec

$$\alpha = \frac{3}{2}n \frac{J_2 + 2C_{22}}{C/(M_S R_S^2)} = \frac{3}{2}n \frac{C - A}{C}. \quad (2.111)$$

On a à l'équilibre  $d\vec{s}/dt = \vec{0}$  dans le repère de référence précessant défini par les vecteurs  $\vec{n}$ ,  $\vec{e}_3$  et leur produit vectoriel. La projection de l'équation (2.110) sur la direction normale au plan  $(\vec{s}, \vec{e}_3)$  donne :

$$\frac{\alpha}{2\dot{\Omega}} \sin 2\epsilon + \sin(I + \epsilon). \quad (2.112)$$

On peut montrer (Ward & Hamilton, 2004) que cette équation a 4 zéros si  $|\alpha/\dot{\Omega}| > (\sin^{2/3} I + \cos^{2/3} I)^{3/2} \approx 1$ , donc que le satellite a 4 États de Cassini, contre seulement 2 sinon.

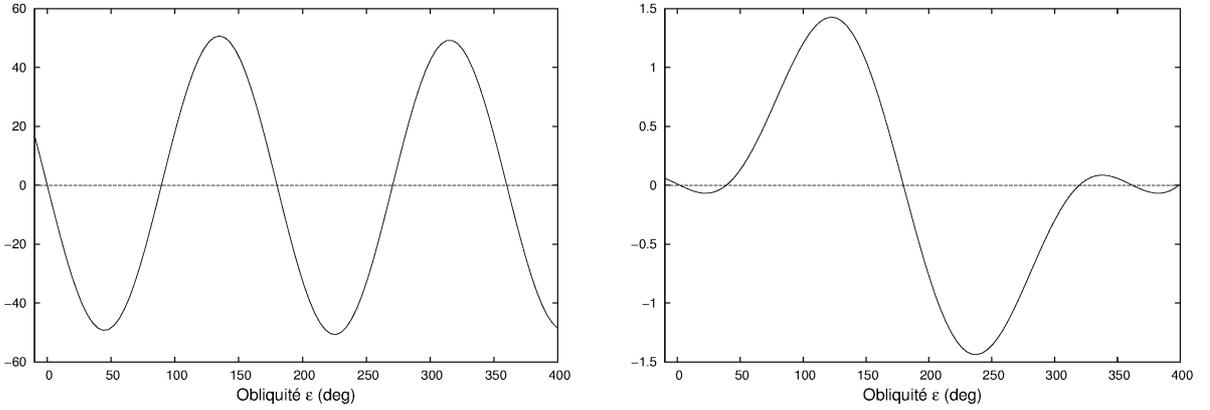


FIGURE 2.3 – Positions des États de Cassini donnés par l'Eq.(2.112) en ordonnée avec  $\alpha/\dot{\Omega} = -100$  (gauche) et  $\alpha/\dot{\Omega} = -1.3$  (droite) pour une inclinaison orbitale  $I = 0.01$  rad. Les États de Cassini sont respectivement, de la gauche vers la droite : 1, 4, 3, et 2. Lorsque le rapport  $|\alpha/\dot{\Omega}|$  est important alors les 4 États de Cassini sont proches de multiples de  $\pi/2$ , alors que les États 1, 4 et 2 tendent à se confondre lorsque ce rapport devient petit.

Pour les satellites naturels des planètes géantes, il est classique d'avoir  $|\alpha/\dot{\Omega}| \gg 1$ , dans ce cas on peut obtenir la position des 4 États de Cassini en développant l'Eq.(2.112) autour des multiples de  $\pi/2$  et on obtient :

$$\epsilon \approx -\frac{\sin I}{\alpha/\dot{\Omega} + \cos I} \quad (\text{État de Cassini 1}), \quad (2.113)$$

$$\epsilon \approx -\frac{\pi}{2} + \frac{\cos I}{\sin I - \alpha/\dot{\Omega}} \quad (\text{État de Cassini 2}), \quad (2.114)$$

$$\epsilon \approx \pi + \frac{\sin I}{\alpha/\dot{\Omega} - \cos I} \quad (\text{État de Cassini 3}), \quad (2.115)$$

$$\epsilon \approx \frac{\pi}{2} + \frac{\cos I}{\sin I + \alpha/\dot{\Omega}} \quad (\text{État de Cassini 4}). \quad (2.116)$$

## 2.4 Conclusion

Ce chapitre a présenté des équations Hamiltoniennes décrivant la rotation rigide d'un corps subissant une perturbation gravitationnelle. Le Hamiltonien (2.34) admet pour seules autres hypothèses que le perturbateur peut être considéré comme sphérique et que son mouvement n'est pas influencé par la rotation de notre corps. L'hypothèse de la rotation synchrone avec équilibre de Cassini n'a été faite que par la suite. Le Hamiltonien (2.34) peut donc décrire la rotation de nombreux corps, même non résonnants comme Hypériorion (Sec.3.6), ou piégés dans une autre résonance comme Mercure (Part.II).

L'étude analytique de la rotation synchrone que j'ai présentée ensuite permet notamment de mettre en lumière des liens entre l'intérieur et des grandeurs observables, comme les librations en longitude et l'obliquité. À l'instant où j'écris ces lignes, les librations ont été détectées de façon incontestée pour la Lune (Koziel, 1967), le satellite de Mars Phobos (Burns, 1972), et le satellite de Saturne Épiméthée (Tiscareno et al., 2009). On peut ajouter Mercure à cette liste (Margot et al., 2007) en s'étendant à la résonance 3 :2. Des librations ont été annoncées pour Encelade (Giese et al., 2011) mais elles sont controversées car d'amplitude comparable aux incertitudes. Je fais partie d'une équipe qui s'appête à annoncer la mesure de librations de Mimas (Tajeddine et al., 2014). L'obliquité dans l'État de Cassini a été mesurée au moins pour la Lune, Mercure (Margot et al., 2007) et Titan (Stiles et al., 2008; Meriggiola & Iess, 2012).



## Chapitre 3

# Applications de la rotation rigide

### 3.1 La méthode générale

J'expose ici la manière générale dont j'ai résolu des problèmes de rotation rigide des satellites naturels. Dans le chapitre précédent j'ai exposé des aspects analytiques du problème, mais mes résolutions ont été essentiellement numériques afin de négliger le moins d'effets possibles. Je me suis notamment attaché à avoir une modélisation la plus complète possible du couple gravitationnel de la planète sur le satellite. Ceci a nécessité de connaître précisément le mouvement orbital du satellite autour de la planète, pour cela j'ai utilisé des éphémérides orbitales. J'ai essentiellement utilisé les éphémérides L1.2 (Lainey et al., 2006) pour les satellites Galiléens de Jupiter, et TASS1.7 (Vienne & Duriez, 1995; Duriez & Vienne, 1997) pour les principaux satellites de Saturne. J'ai couplé ces éphémérides aux équations différentielles de rotation pour obtenir une représentation temporelle des observables de la rotation.

#### 3.1.1 Les éphémérides orbitales des satellites naturels

Il existe essentiellement 2 centres de ressources dans le monde élaborant des éphémérides orbitales : le Jet Propulsion Laboratory (JPL) à Pasadena, CA, qui dépend de la NASA et du Californian Institute of Technology (CalTech), et qui a notamment pour mission de livrer des éphémérides suffisamment précises pour piloter les sondes spatiales, et l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides (IMCCE), où j'ai fait ma thèse de doctorat, et qui est en charge des éphémérides nationales. Les 2 entités ont des approches assez différentes ; notamment le JPL tend à fournir les éphémérides sous une forme numérique avec une validité limitée dans le temps (quelques siècles), alors que l'IMCCE les délivre aussi sous forme de séries sinusoïdales, ajustées sur les observations, et extrapolables sans divergence. Ceci présente les avantages de séparer les différents effets dans les éphémérides (l'influence de l'aplatissement de la planète, d'un autre satellite, . . . ), ainsi que de pouvoir être utilisées sur une longue durée, permettant, dans la rotation, de séparer les oscillations dues au forçage des oscillations libres, influencées par un choix non optimal des conditions initiales.

Les éphémérides L1.2 et TASS1.7 donnent les solutions orbitales sous la forme suivante :

$$a(t) = a_0 + \sum_i a_i \cos(\omega_i^{(1)}t + \phi_i^{(1)}), \quad (3.1)$$

$$\lambda(t) = nt + \lambda_0 + \sum_i \lambda_i \sin(\omega_i^{(2)}t + \phi_i^{(2)}), \quad (3.2)$$

$$z(t) = \sum_i z_i \exp(i(\omega_i^{(3)}t + \phi_i^{(3)})), \quad (3.3)$$

$$\zeta(t) = \sum_i \zeta_i \exp(i(\omega_i^{(4)}t + \phi_i^{(4)})), \quad (3.4)$$

avec

$$\begin{aligned} z &= e \exp i\varpi \\ &= k + ih, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \gamma \exp i\delta\Omega \\ &= \sin \frac{I}{2} \exp i\delta\Omega \\ &= q + ip, \end{aligned} \quad (3.6)$$

2 exemples sont donnés dans les Tables 3.1 et 3.2.

TABLE 3.1 – Longitude moyenne  $\lambda(t)$  de Mimas donnée par TASS1.7, avec  $\lambda_0 = 0.1822485$  et  $n = 2435.14429644$  radians par an, l'origine des dates étant J1980.  $\omega_1, \phi_1, \phi_3, \Phi_1, \lambda_{01}$  et  $\rho_1$  sont des éléments propres utilisés pour décrire la dynamique orbitale des principaux satellites de Saturne. En particulier,  $\omega_1$  représente la libration de la résonance Mimas-Téthys.

N	Amplitude (rad)	Phase (deg)	Fréquence (rad /an)	Période (ans)	Identification	Amplitude (km)
1	0.7574073	39.325	0.08904538	70.56	$\omega_1$	140528.59
2	0.0124330	117.974	0.26713613	23.52	$3\omega_1$	2306.81
3	0.0022664	126.606	10.19765304	0.62	$\phi_1$	420.51
4	0.0010599	267.281	10.10860767	0.62	$\phi_1 - \omega_1$	196.65
5	0.0010228	165.931	10.28669842	0.61	$\phi_1 + \omega_1$	189.77
6	0.0007266	78.649	0.17809075	35.28	$2\omega_1$	134.81
7	0.0005061	259.757	0.05765338	108.98	$\phi_3 + 2\Phi_1 + \omega_1$	93.90
8	0.0003590	196.624	0.44522688	14.11	$5\omega_1$	66.61
9	0.0002628	3.120	0.06492496	96.78	$\phi_1 + 4\Phi_1 + \omega_1$	48.76
10	0.0002459	178.892	0.12043737	52.17	$-\phi_3 - 2\Phi_1 + \omega_1$	45.62
11	0.0002237	47.956	10.01956229	0.63	$\phi_1 - 2\omega_1$	41.51
12	0.0002097	205.255	10.37574380	0.61	$\phi_1 + 2\omega_1$	38.91
13	0.0001970	255.529	0.11316579	55.52	$-\phi_1 - 4\Phi_1 + \omega_1$	36.55
14	0.0001456	13.921	2428.76308172	0.94 j	$\lambda_{01} + \rho_1 - \phi_1$	27.01
15	0.0001276	312.080	5.02184135	1.25	$-2\Phi_1 - \omega_1$	23.67
16	0.0001164	210.730	5.19993211	1.21	$-2\Phi_1 + \omega_1$	21.60

TABLE 3.2 –  $\zeta(t)$  de Callisto donné par L1.2, l'origine des dates étant J2000. Les modes propres  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  et  $\Phi_4$  sont dus à l'influence de l'aplatissement de Jupiter sur la précession des nœuds de Io, Europe, Ganymède et Callisto (satellites J-1 à J-4),  $\Phi_0$  est un terme constant dû à l'influence séculaire du Soleil, et  $\lambda_{\odot}$  est le forçage annuel, dû au mouvement de Jupiter autour du Soleil.

N	Amplitude	Phase (deg)	Fréquence (rad /an)	Période (ans)	Identification	Inclinaison (arcmin)
1	0.0038423	138.277	0	$\infty$	$\Phi_0$	26.418
2	0.0022454	342.180	-0.01116251	562.88	$\Phi_4$	15.438
3	0.0002604	11.189	-0.04562451	137.72	$\Phi_3$	1.790
4	0.0000332	318.588	1.05936266	5.93	$2\lambda_{\odot}$	0.228
5	0.0000050	16.323	-0.52963339	11.86	$-\lambda_{\odot}$	0.034
6	0.0000049	240.028	-0.20790140	30.22	$\Phi_2$	0.034
7	0.0000044	101.323	0.52966163	11.86	$\lambda_{\odot}$	0.030
8	0.0000038	261.084	1.58900716	3.95	$3\lambda_{\odot}$	0.026
9	0.0000031	295.132	1.07065919	5.87	$2\lambda_{\odot} - \Phi_4 + \Phi_0$	0.021

Ces solutions orbitales permettent d'exprimer les quantités  $\hat{x}_I, \hat{y}_I$  et  $\hat{z}_I$ , coordonnées du vecteur unitaire pointant vers la planète dans le repère inertiel.

### 3.1.2 Une résolution numérique du problème

Après une évaluation numérique des quantités données par l'étude analytique que j'ai présentée dans le Chapitre précédent, en particulier l'obliquité d'équilibre, l'amplitude des librations forcées, et les périodes des oscillations libres  $\omega_u, \omega_v$  et  $\omega_w$ , j'intègre numériquement les équations de la dynamique de rotation (2.38) à l'aide de l'intégrateur d'Adams-Bashforth-Moulton d'ordre 10 (Hairer et al., 1993). Cet intégrateur est en fait composé d'un prédicteur d'ordre 10, dit d'Adams-Bashforth, et d'un correcteur d'ordre 11, dit d'Adams-Moulton. Ces intégrateurs reposent sur les schémas d'Adams, qui consistent à calculer la valeur  $x_{n+1}$  de la fonction  $x$  au temps  $t_{n+1}$  à partir de sa valeur  $x_n$  au temps  $t_n$  et d'évaluations de sa dérivée  $f$ , donnée par l'équation différentielle ordinaire utilisée. On pose

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - x_n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, x(\tau)) d\tau \\
 &= h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i-k+1},
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

avec  $\sum \beta_i = 1$ , et où les  $f_{n+i-k+1}$  sont des évaluations antérieures de la fonction de force  $f$ . À l'ordre 10, le prédicteur d'Adams-Bashforth est le schéma implicite suivant :

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} = x_n + \frac{h}{7257600} &(30277247f_n - 104995189f_{n-1} + 265932680f_{n-2} \\
 -454661776f_{n-3} &+ 538363838f_{n-4} - 444772162f_{n-5} + 252618224f_{n-6} \\
 -94307320f_{n-7} &+ 20884811f_{n-8} - 2082753f_{n-9}) + \mathcal{O}(h^{10}),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

et le correcteur d'Adams-Moulton est le schéma explicite suivant :

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} = x_n + \frac{h}{479001600} & (134211265f_{n+1} + 656185652f_n - 890175549f_{n-1} \\
 & + 1446205080f_{n-2} - 1823311566f_{n-3} + 1710774528f_{n-4} - 1170597042f_{n-5} \\
 & + 567450984f_{n-6} - 184776195f_{n-7} + 36284876f_{n-8} - 3250433f_{n-9}) + \mathcal{O}(h^{11}).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Par *schéma implicite* il faut comprendre que l'évaluation de  $x_{n+1}$  par le prédicteur d'Adams-Bashforth n'utilise pas la valeur de la dérivée en  $t_{n+1}$ , on est donc dans une logique d'extrapolation, tandis que le correcteur d'Adams-Moulton utilise cette valeur, elle-même évaluée à l'aide de la valeur prédite de  $x_{n+1}$ , ce *schéma explicite* réalise donc une interpolation polynomiale de la dérivée  $f$ . Si le correcteur est inconditionnellement stable, le prédicteur d'Adams-Bashforth (Eq.3.8) est, lui, conditionnellement stable, ce qui signifie qu'un choix d'un pas de temps trop grand peut le faire diverger. En pratique, un pas égal à 1/80 de la période de rotation du corps considéré est un bon choix.

Le choix des conditions initiales doit se faire de façon à ce qu'au temps initial de la simulation, le système soit dans l'état qu'on veut simuler, en général la rotation synchrone et l'État de Cassini 1 pour les satellites naturels. En général on obtient cet état avec une bonne approximation en posant, au temps initial,  $P = 1$ ,  $p = \lambda$ ,  $R = 1 - \cos I$  et  $r = -\Omega$ . Dans ce cas la trajectoire oscille autour de l'équilibre avec une relativement faible amplitude d'oscillations libres. Cet état peut être optimisé par itérations après identification, par analyse en fréquences, de ces oscillations. Un algorithme adapté, NAFFO, mis au point avec Nicolas Delsate et Timoteo Carletti (Noyelles et al., 20xx), fera l'objet du Chapitre 10.

Une fois cette trajectoire optimisée connue, les solutions du problème sont exprimées sous forme d'une décomposition quasi-périodique.

## 3.2 Titan

Ma première étude de la rotation rigide a concerné Titan (Noyelles et al., 2008; Noyelles, 2008). Cette étude a en fait eu lieu en 2006-2007, à l'époque nous ne disposions que de peu de données sur ce satellite. Cassini avait effectué un survol dédié à la gravitation, T11, le 27 février 2006, qui avait donné les valeurs suivantes :

$$J_2 = (3.15 \pm 0.32) \times 10^{-5}, \tag{3.10}$$

$$C_{22} = (1.1235 \pm 0.0061) \times 10^{-5}. \tag{3.11}$$

Des premières observations de la rotation par Cassini avaient été effectuées mais non encore publiées, elles suggéraient une rotation légèrement super-synchrone ainsi qu'une obliquité significative. Ces résultats ont été publiés presque simultanément à mon étude, je n'ai donc pas pu en tenir compte. Depuis, la rotation super-synchrone a été dénoncée mais l'obliquité a été confirmée. Quant au champ de gravité, 2 méthodes de réduction des observations ont permis d'obtenir 2 solutions significativement différentes. Toutes ces données seront discutées dans le Chapitre 5, notamment personne n'a réussi, à ce jour, à expliquer l'obliquité de Titan sans prendre en compte un océan global.

L'étude que j'ai conduite à l'époque doit donc être considérée pour les méthodes présentées, mais pas pour les résultats sur la rotation de Titan.

### 3.2.1 Rotation rigide

Cette étude consistait essentiellement en des essais analytiques et numériques pour différentes valeurs du moment d'inertie polaire  $C$ , les coefficients  $J_2$  et  $C_{22}$  étant considérés comme connus (Eq.3.10 & 3.11).

TABLE 3.3 – Fréquences propres des petites oscillations autour de l'équilibre, pour un Titan rigide.

Modes propres	$C = 0.31M_S R_S^2$		$C = 0.35M_S R_S^2$	
	Fréquence (rad/an)	Période (ans)	Fréquence (rad/an)	Période (ans)
$u$	2.999838	2.094508	2.822839	2.225839
$v$	$3.754149 \times 10^{-2}$	167.366424	$3.324655 \times 10^{-2}$	188.987571
$w$	$2.049150 \times 10^{-2}$	306.623991	$1.814709 \times 10^{-2}$	346.236493

TABLE 3.4 – Modes propres présents dans le mouvement orbital de Titan autour de Saturne. Ces modes se retrouvent dans les variables de rotation et constituent le mouvement forcé de l'équilibre dynamique. Les  $\lambda_i$  représentent le mouvement orbital des corps considérés autour de Saturne,  $\phi_i$  le mouvement de leur péricentre, lié à l'excentricité  $e_i$ , et  $\Phi_i$  celui de leur nœud ascendant, lié à l'inclinaison  $I_i$ .

Modes propres orbitaux	Fréquence (rad/an)	Période	Cause
$\lambda_5$	508.009320	4.52 j	Rhéa
$\lambda_6$	143.924047	15.95 j	Titan
$\lambda_8$	28.928522	79.33 j	Japet
$\phi_5$	0.175549	35.79 a	$e_5$
$\Phi_5$	-0.175468	35.81 a	$I_5$
$\phi_6$	0.008934	703.30 a	$e_6$
$\Phi_6$	-0.008931	703.51 a	$I_6$
$\phi_8$	0.001975	3181.86 a	$e_8$
$\Phi_8$	-0.001926	3263.07 a	$I_8$
$\lambda_9$	0.213299	29.46 a	Soleil

La Table 3.3 donne des exemples des fréquences propres d'oscillation autour de l'équilibre. Il est intéressant de comparer ces fréquences entre elles, et avec les fréquences du mouvement orbital, également présentes dans la dynamique de rotation. Lorsque le système est à l'équilibre strict, alors les amplitudes associées aux modes propres du mouvement de rotation (Tab.3.3) sont nulles tandis que celles dues au mouvement orbital sont en première approximation indépendantes des conditions initiales. On constate plusieurs échelles de temps dans la dynamique, notamment les perturbations sur la longitude moyenne ont une période bien plus courte que celles sur les nœuds et péricentres, et aussi que les oscillations libres (Tab.3.3). Ceci a pour conséquence que les librations forcées représentent un mouvement rapide, alors que les variations de l'obliquité sont bien plus lentes.

Le mouvement polaire a en général une amplitude négligeable, la Tab.3.5 donne sa décomposition quasi-périodique.

TABLE 3.5 – Décomposition quasi-périodique de la variable complexe  $\eta+i\xi$ , pour  $C = 0.31M_S R_S^2$ .  $V$  et  $W$  sont liés aux oscillations libres, leurs amplitudes ne sont donc dues qu'au choix des conditions initiales. Seuls les termes 3 et 4 restent lorsque Titan est réellement dans l'État de Cassini 1.

N	Amplitude ( $\times 10^{-4}$ )	Période (ans)	Identification	Cause
1	9.123917	306.336	$w$	$\sqrt{W}$
2	6.016886	-306.336	$-w$	$\sqrt{W}$
3	5.730335	351.703	$\phi_6 - \Phi_6$	$e_6 I_6$
4	3.832129	-351.703	$\Phi_6 - \phi_6$	$e_6 I_6$
5	0.636430	135.274	$v - \Phi_6$	$\sqrt{V} I_6$
6	0.383955	-135.274	$\Phi_6 - v$	$\sqrt{V} I_6$

On constate que la période du forçage, 351.703 ans, est proche de celle des oscillations libres, 306.336 ans. En faisant varier le moment d'inertie polaire  $C$ , cette période propre peut devenir très proche de celle de forçage et peut induire un phénomène résonnant ou quasi-résonnant, rendant significatif le mouvement polaire.

### 3.2.2 Un mouvement polaire résonnant

La Figure 3.1 montre le comportement que peut avoir l'amplitude du mouvement polaire  $J$  au cours du temps, en fonction du moment d'inertie polaire  $C$ . On voit bien notamment que cette amplitude peut dépasser le degré (figure de droite).

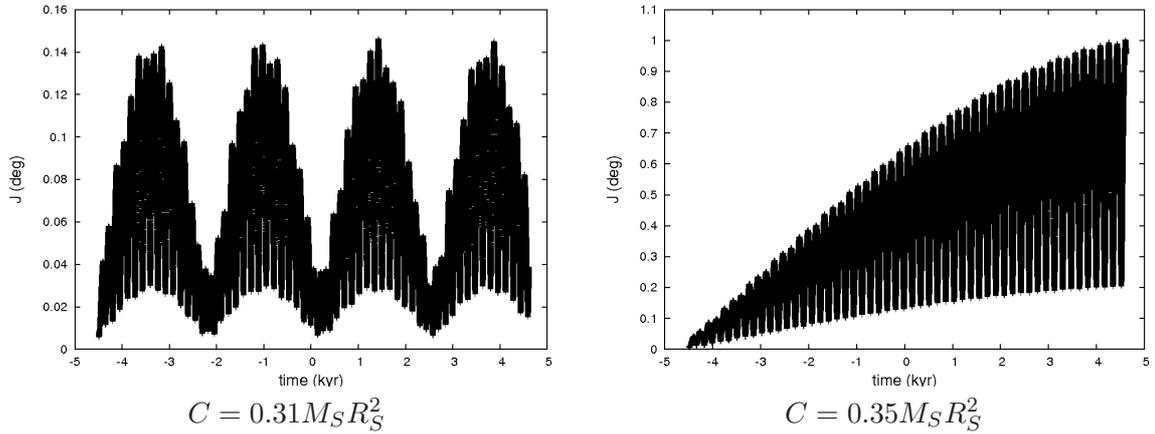


FIGURE 3.1 – Comportement quasi-résonnant du mouvement polaire de Titan.

Pour représenter cette dynamique, il faut écrire l'excentricité et l'inclinaison de Titan ainsi :

$$z(t) = e_1 \cos \phi_6, \quad (3.12)$$

$$\zeta(t) = \Gamma_0 \cos \Phi_0 + \Gamma_1 \cos \Phi_6, \quad (3.13)$$

où  $\Phi_0$  est un terme constant. Lorsque le système est strictement dans cette résonance, d'argument  $w + \Phi_6 - \phi_6$ , le mouvement polaire a une amplitude forcée non nulle, que j'ai cherchée à exprimer. Pour cela, je suis parti du Hamiltonien quadratique avec perturbation

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(u, v, w, U, V, W, t) &= \mathcal{N}(-, -, -, U, V, W) + \mathcal{P}(u, v, w, U, V, W, t) \\ &= \omega_u U + \omega_v V + \omega_w W + \mathcal{P}(u, v, w, U, V, W, t),\end{aligned}\quad (3.14)$$

et j'ai effectué un changement de variable pour exprimer l'argument résonnant  $\theta$  :

$$\begin{aligned}u &= U \\ v &= V \\ \theta = w + \Phi_6 - \phi_6 &= \Theta = W.\end{aligned}\quad (3.15)$$

$\phi_6$  et  $\Phi_6$  sont ici des fonctions linéaires du temps, ce changement de variable implique donc d'ajouter la quantité  $(\dot{\Phi}_6 - \dot{\phi}_6)\Theta$  au nouveau Hamiltonien  $\mathcal{T}$ , qui devient :

$$\mathcal{T} = \omega_u U + \omega_v V + (\omega_w + \dot{\Phi}_6 - \dot{\phi}_6)\Theta + \mathcal{T}_2. \quad (3.16)$$

En considérant que  $\theta$  est le seul angle lent dans le modèle, on obtient, après moyennisation :

$$\mathcal{T} = \psi\Theta + \mu\Theta^2 + \epsilon\sqrt{2\Theta}\cos\theta, \quad (3.17)$$

avec

$$\psi = \omega_\theta + \dot{\Phi}_6 - \dot{\phi}_6, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{3n(1 + \delta_s)}{128P^{*4}W^{*2}} \left( \gamma_1 \left( 120R^{*2}\Gamma_0^2 - 12R^{*2}W^{*2} + 48\Gamma_0^2P^{*2}W^{*2} \right. \right. \\ &+ 96\Gamma_0^2R^{*2}W^{*2} - 228R^*P^*\Gamma_0^2 + 48W^{*4}R^*P^* - 21W^{*4}R^{*2} \\ &+ 96W^{*4}\Gamma_0^2P^{*2} + 168W^{*4}\Gamma_0^2R^{*2} - 348W^{*4}\Gamma_0^2R^*P^* + 24R^*P^* \\ &- 192R^*\Gamma_0^2P^*W^{*2} - 15R^{*2} - 24W^{*4}P^{*2} + 48\Gamma_0^2P^{*2} + 24R^*P^*W^{*2} - 8P^{*2}W^{*2} \\ &+ \left. \left( 2\frac{R^*}{P^*} - \left( \frac{R^*}{P^*} \right)^2 \right) \left( -96\Gamma_0W^{*4}P^{*2} + 84R^*\Gamma_0W^{*4}P^* \right. \right. \\ &- \left. \left. 48\Gamma_0P^{*2} + 48\Gamma_0P^*R^*W^{*2} + 60R^*P^*\Gamma_0 - 48\Gamma_0P^{*2}W^{*2} \right) \right) \\ &+ \gamma_2 \left( -120R^{*2}\Gamma_0^2 + 2R^{*2}W^{*2} - 16\Gamma_0^2P^{*2}W^{*2} - 16\Gamma_0^2R^{*2}W^{*2} \right. \\ &+ 228R^*P^*\Gamma_0^2 + 48R^*P^*W^{*4} - 21R^{*2}W^{*4} + 96P^{*2}W^{*4}\Gamma_0^2 + 168R^{*2}W^{*4}\Gamma_0^2 - 348R^*P^*W^{*4}\Gamma_0^2 \\ &- 24R^*P^* + 40R^*P^*\Gamma_0^2W^{*2} + 15R^{*2} - 24W^{*4}P^{*2} - 48\Gamma_0^2P^{*2} - 8R^*P^*W^{*2} + 8P^{*2}W^{*2} \\ &+ \left. \left( 2\frac{R^*}{P^*} - \left( \frac{R^*}{P^*} \right)^2 \right) \left( -96\Gamma_0W^{*4}P^{*2} + 84R^*\Gamma_0W^{*4}P^* \right. \right. \\ &+ \left. \left. 48\Gamma_0P^{*2} - 8R^*\Gamma_0P^*W^{*2} - 60R^*P^*\Gamma_0 + 16\Gamma_0P^{*2}W^{*2} \right) \right) \Bigg),\end{aligned}\quad (3.19)$$

et

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{3ne_1\Gamma_1}{8\sqrt{W^*P^{*\frac{5}{2}}}}(1 + \delta_s) \left( \gamma_1 \left( 8P^{*2} - 46R^*P^*W^* + 4R^{*2} + 16P^{*2}W^* - 14R^*P^* + 20R^{*2}W^* \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left( P^*\sqrt{R^*(2P^* - R^*)} \right) \left( 21\Gamma_0 + 69\Gamma_0W^* - 60W^*\Gamma_0\frac{R^*}{P^*} - 12\Gamma_0\frac{R^*}{P^*} \right) \right) \right. \\
&+ \gamma_2 \left( -8P^{*2} - 46R^*P^*W^* - 4R^{*2} + 16P^{*2}W^* + 14R^*P^* + 20R^{*2}W^* \right. \\
&+ \left. \left. \left( P^*\sqrt{R^*(2P^* - R^*)} \right) \left( -21\Gamma_0 + 69\Gamma_0W^* - 60W^*\Gamma_0\frac{R^*}{P^*} + 12\Gamma_0\frac{R^*}{P^*} \right) \right) \right), \tag{3.20}
\end{aligned}$$

où  $e_1 = 0.0289265$ ,  $\Gamma_0 = 5.6024 \times 10^{-3}$  et  $\Gamma_1 = 2.7899 \times 10^{-3}$ .  $\delta_s$  est un terme correctif qui tient compte de l'aplatissement de Saturne,  $R^*$  et  $P^* \approx 1$  sont les valeurs de  $R$  et  $P$  à l'équilibre, et  $W^*$  la constante donnée par l'Eq.(2.87).

Le Hamiltonien (3.17) est celui du Second Modèle Fondamental de la Résonance (Henrard & Lemaître, 1983). Il a 2 équilibres si la quantité  $\delta = -1 - \text{sign}(\psi\mu) \left| \frac{4}{27} \frac{\psi^3}{\mu\epsilon^2} \right|^{1/3}$  est positive, ces équilibres sont les racines de l'équation cubique  $x^3 - 3(\delta + 1)x - 2 = 0$  avec  $x = \left| \frac{2\mu}{\epsilon} \right|^{1/3} \sqrt{2\Theta}$ . Une seule de ces racines est positive, il s'agit de l'équilibre stable de la résonance.

En utilisant les relations

$$\xi^2 + \eta^2 = 4 \sin^2 \frac{J}{2}, \tag{3.21}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2W_0}{W^*} \left( \cos^2(\omega_w t + \omega_0) + W^{*2} \sin^2(\omega_w t + \omega_0) \right), \tag{3.22}$$

où  $W_0$  est la valeur de  $W = \Theta$  à l'équilibre de la résonance, on a le mouvement polaire moyen  $\langle J \rangle$  :

$$\langle J \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \arcsin \left( \sqrt{\frac{W_0}{2W^*}} \sqrt{\cos^2(\tau) + W^{*2} \sin^2(\tau)} \right) d\tau. \tag{3.23}$$

TABLE 3.6 – Valeurs de l'équilibre résonnant.  $W_0$  correspond à la valeur d'équilibre de  $\Theta = W$ , et l'amplitude moyenne du mouvement polaire  $\langle J \rangle$  est donnée par l'Eq.3.23.

$\frac{C}{M_S R_S^2}$	$\delta$	$W_0$	$\langle J \rangle$
0.34	5349.4	(pas de solution réelle)	
0.35	1909.6	0.342	80.368°
0.355	189.69	0.108	40.702°
0.3555	17.705	0.034	22.337°
0.355551	0.1616	0.010	12.034°
0.35555146967191	$1.6 \times 10^{-10}$	0.009	11.413°
0.35555146967192	$-3.3 \times 10^{-9}$	(pas de résonance)	

Les valeurs de l'équilibre résonnant sont données dans la Tab.3.6. Ces chiffres sont à prendre avec précaution pour au moins 3 raisons :

- ils supposent que Titan est rigide,
- ils indiquent que la résonance existe, mais pas que le système s’y trouve effectivement,
- ils ne rendent pas compte du comportement de Titan lorsqu’il se trouve proche de la résonance. Dans ce cas, plus probable que le cas strictement résonnant, on peut avoir un comportement où le mouvement polaire est amplifié (cf.Fig.3.1).

### 3.2.3 L’influence du mouvement polaire sur la dissipation de marée

Les effets de marée entre un satellite et sa planète parente créent un bourrelet de marée sur chacun de ces corps, dont l’alignement avec la direction instantanée planète-satellite présente un temps de retard. Ce désaxage induit un couple de rappel qui se traduira par une dissipation. Le calcul de la dissipation moyenne doit tenir compte de la rotation synchrone du satellite, qui présente des variations oscillantes dues à l’excentricité de son orbite, elle-même responsable de variations de la vitesse du satellite. Dans ce cas, la formule classique de dissipation d’énergie  $E$  dans le satellite est (Peale & Cassen, 1978; Peale et al., 1979; Peale, 1999) :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{21}{2} \frac{k_s}{Q_s} f \frac{\mathcal{G} M_P n R_S^5 e^2}{a^6}, \quad (3.24)$$

où  $k_s$  est le nombre de Love du champ de gravité,  $Q_s$  la fonction de dissipation du satellite, et  $f > 1$  un facteur qui permet de tenir compte d’un intérieur en partie visqueux. Dans cette formule, il est supposé que les librations du satellite sont les librations optiques d’amplitude  $2e$ , et que le mouvement est strictement plan. Wisdom (2004) propose une extension de cette formule qui tient compte de librations forcées, de librations dues à une résonance secondaire, et de l’obliquité, à partir d’un raisonnement basé sur l’orientation spatiale du bulbe de marée :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{k_s}{Q_s} f \frac{\mathcal{G} M_P n R_S^5}{a^6} \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{3}{2} (2e + F)^2 + \frac{1}{2} S^2 + \frac{3}{2} \sin^2 \epsilon \right), \quad (3.25)$$

où  $F$  est l’amplitude de la libration forcée,  $S$  est un terme supplémentaire de libration, correspondant à une éventuelle résonance secondaire dans la libration en longitude, et  $\epsilon$  est l’obliquité du satellite. Avec  $\epsilon = F = S = 0$ , on retrouve la formule de Peale & Cassen (Eq.3.24).

J’étends ici ce raisonnement pour tenir compte du mouvement polaire. Soit  $U_T$  le potentiel dû aux marées. La dissipation d’énergie au sein du satellite s’obtient par intégration sur son volume  $V$  :

$$\frac{dE}{dt} = - \iiint_V \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(U_T) dV, \quad (3.26)$$

où  $\rho$  est la densité d’un élément de volume  $dV$  de vitesse  $\vec{v}$ . Si le satellite est incompressible et de densité constante, alors on a

$$\frac{dE}{dt} = -\rho \iiint_V \text{div}(U_T \vec{v}) dV, \quad (3.27)$$

$$= -\rho \iint_S U_T \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \quad (3.28)$$

d'après le théorème de Green-Ostrogradski, ou théorème de flux-divergence,  $\mathcal{S}$  étant la surface du satellite. La hauteur de marée à un point donné de la surface peut s'exprimer ainsi :

$$\Delta r = -\frac{h_s}{g} U_T^*, \quad (3.29)$$

où  $U_T^*$  est le potentiel de marée avec un retard temporel dû au temps de réponse du matériau à l'excitation de marée.  $h_s$  est le nombre de Love lié au déplacement, et  $g$  l'accélération locale de la gravité. Ceci donne :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\rho h_s}{g} \iint_{\mathcal{S}} U_T \frac{dU_T^*}{dt} d\mathcal{S}, \quad (3.30)$$

l'élément de surface  $d\mathcal{S}$  correspondant à la sphère de rayon unitaire.

Le potentiel de marée à un point donné du satellite s'exprime par :

$$U_T = -\frac{\mathcal{G}M_P}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos \alpha) \quad (3.31)$$

$$\approx -\frac{\mathcal{G}M_P R^2}{r^3} P_2(\cos \alpha), \quad (3.32)$$

où  $\alpha$  est l'angle entre la direction planète-satellite et satellite-point où le potentiel est évalué.  $P_l$  sont les polynômes de Legendre, on a notamment  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ .  $r$  est la distance satellite-planète, et  $R$  la distance entre le centre du satellite et le point d'évaluation. On a

$$\cos \alpha = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{s}}{rR}, \quad (3.33)$$

où  $\vec{\sigma}$  et  $\vec{s}$  sont, respectivement, la position de la planète et celle de l'élément de surface considéré par rapport au centre du satellite. Les coordonnées cartésiennes d'un élément du satellite dans le repère de figure  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$  sont :

$$\vec{s}_0 = R(\sin \theta \cos \lambda, \sin \theta \sin \lambda, \cos \theta), \quad (3.34)$$

où  $\lambda$  est la longitude planétocentrique, et  $\theta$  la colatitute. On a (cf. Eq.2.35)

$$\vec{s} = R_3(-l)R_1(-J)R_3(-g)R_1(-K)R_3(-h)\vec{s}_0. \quad (3.35)$$

Mon but n'étant d'avoir que la contribution du mouvement polaire  $J$ , j'ai posé  $K = 0$ ,  $h = 0$ ,  $l = -wt$  et  $g = (n + w)t$ . Avec nos conventions, nous avons

$$\vec{\sigma} = r(\cos f, -\sin f, 0), \quad (3.36)$$

où  $f$  est l'anomalie vraie. Au degré 1 en excentricité, on a

$$r^{-1} = a^{-1}(1 + e \cos nt), \quad (3.37)$$

$$\cos f = \cos nt + e(\cos 2nt - 1), \quad (3.38)$$

$$\sin f = \sin nt + e \sin 2nt, \quad (3.39)$$

ce qui donne finalement  $dS$  :

$$dS = \sin \theta d\theta d\lambda. \quad (3.40)$$

J'obtiens ainsi

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{3h_s \Delta}{5} f \frac{\mathcal{G} M_P n R_s^5}{a^6} \left( \frac{21}{2} e^2 + \frac{3}{2} J_0^2 \left( \frac{n+w}{n} \right)^2 \right), \quad (3.41)$$

où  $\Delta$  est le retard temporel du bulbe de marée. Avec  $k_s = 3h_s/5$  et  $\Delta = -1/Q_s$ , on obtient :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{k_s}{Q_s} f \frac{\mathcal{G} M_P n R_s^5}{a^6} \left( \frac{21}{2} e^2 + \frac{3}{2} J_0^2 \left( \frac{n+w}{n} \right)^2 \right), \quad (3.42)$$

ce qui permet de compléter la formule de Wisdom (2004) :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{k_s}{Q_s} f \frac{\mathcal{G} M_P n R_s^5}{a^6} \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{3}{2} (2e + F)^2 + \frac{1}{2} S^2 + \frac{3}{2} \sin^2 \epsilon + \frac{3}{2} J_0^2 \left( \frac{n+w}{n} \right)^2 \right). \quad (3.43)$$

Il est en général considéré que la principale source de dissipation est l'excentricité. En réalité, l'excentricité est souvent le seul paramètre connu avec précision, notamment l'obliquité des satellites naturels n'est en général pas connue. On peut remarquer la présence du terme  $n+w$  dans la contribution du mouvement polaire, ce qui signifie que dans un modèle de dissipation physiquement réaliste où  $Q_s$  dépend de la fréquence d'excitation de marée, alors une fonction de dissipation différente doit être considérée pour la contribution du mouvement polaire.

Ce phénomène de composition de vitesses mis en valeur par cette étude des marées suggère que si Titan a un mouvement polaire significatif mais qu'il est a priori négligé au moment d'observer sa rotation, alors il peut laisser l'impression que la rotation de Titan est légèrement super-synchrone... et c'est justement ce que l'équipe RADAR de Cassini a annoncé (Stiles et al., 2008). Après une révision à la baisse de cette super-synchronicité (Stiles et al., 2010), les dernières mesures suggèrent que la rotation de Titan est en fait synchrone (Meriggiola & Iess, 2012).

### 3.3 Callisto

J'ai eu la curiosité de faire tourner mon code de rotation rigide pour le satellite de Jupiter Callisto. J'ai pour cela utilisé les éphémérides L1.2 (Lainey et al., 2006), ainsi que le champ de gravité suggéré par les observations de la sonde Galileo (Anderson et al., 2001, Tab.3.7). Les modes propres de la dynamique sont donnés dans la Tab.3.8, et les solutions de la rotation sont tracées dans la Fig.3.2.

#### 3.3.1 Un comportement surprenant

TABLE 3.7 – Coefficients du champ de gravité de Callisto obtenus à partir des survols de Galileo (Anderson et al., 2001). La précision des mesures n'a pas permis de mesurer indépendamment  $J_2$  et  $C_{22}$ , ils ont donc été considérés liés par la relation découlant de l'équilibre hydrostatique  $J_2 = 10C_{22}/3$ . De ces résultats ainsi que de la forme de Callisto observée, un moment d'inertie polaire  $C$  a été déduit.

Paramètre	Valeur	Référence
$\mathcal{G}M_P$	$1.26712767 \times 10^8 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$	Pioneer & Voyager (Campbell & Synnott, 1985)
$\mathcal{G}M_S$	$7179.292 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$	Galileo (Anderson et al., 2001)
$J_2$	$3.27 \times 10^{-5}$	Galileo (Anderson et al., 2001)
$C_{22}$	$1.02 \times 10^{-5}$	Galileo (Anderson et al., 2001)
$C$	$0.3549M_S R_S^2$	Anderson et al. (2001)

TABLE 3.8 – Les modes propres de la rotation de Callisto. Ils viennent tous de son mouvement orbital, sauf les 3 derniers qui sont les oscillations libres du mouvement de rotation (Eq.2.89-2.91). La résonance laplacienne est la résonance de moyen mouvement Io-Europe-Ganymède, les modes propres  $\nu$  et  $\rho$  ne sont pas linéairement indépendants des autres, ils correspondent à des quasi-résonances, et ont donc des effets dynamiques significatifs.  $\nu$  est une conséquence de la résonance laplacienne, tandis que  $\rho$  est lié à l'inégalité de De Haerdtl 3 :7 entre Ganymède et Callisto (De Haerdtl, 1892; Lieske, 1973; Noyelles, 2005; Noyelles & Vienne, 2007).  $e_i$  et  $I_i$  désignent respectivement l'excentricité et l'inclinaison du satellite J-i.

Mode propre	Fréquence (rad.an <sup>-1</sup> )	Période	Cause
$\lambda_1$	1297.20447253	1.769 j	J-1 Io
$\lambda_2$	646.24512024	3.551 j	J-2 Europe
$\lambda_3$	320.76544409	7.154 j	J-3 Ganymède
$\lambda_4$	137.51159676	16.689 j	J-4 Callisto
$\lambda_{\odot}$	0.52967961	11.863 a	Soleil
$\Psi$	1.1142494	5.639 a	Résonance laplacienne
$\nu$	4.7142321	1.333 a	$\lambda_1 - 2\lambda_2$
$\rho$	-0.2848446	22.058 a	$3\lambda_3 - 7\lambda_4$
$\phi_1$	0.9731185	6.457 a	$e_1$
$\phi_2$	0.2476298	25.373 a	$e_2$
$\phi_3$	0.0464869	135.160 a	$e_3$
$\phi_4$	0.0117118	536.484 a	$e_4$
$\Phi_1$	-0.8455888	7.431 a	$I_1$
$\Phi_2$	-0.2079026	30.222 a	$I_2$
$\Phi_3$	-0.0456245	137.715 a	$I_3$
$\Phi_4$	-0.0111625	562.883 a	$I_4$
$\Phi_0$	0.0000000	$\infty$	$I_{\odot}$
$u$	2.5535931	2.461 a	$\sqrt{U}$
$v$	0.0308604	203.600 a	$\sqrt{V}$
$w$	0.0198050	317.253 a	$\sqrt{W}$

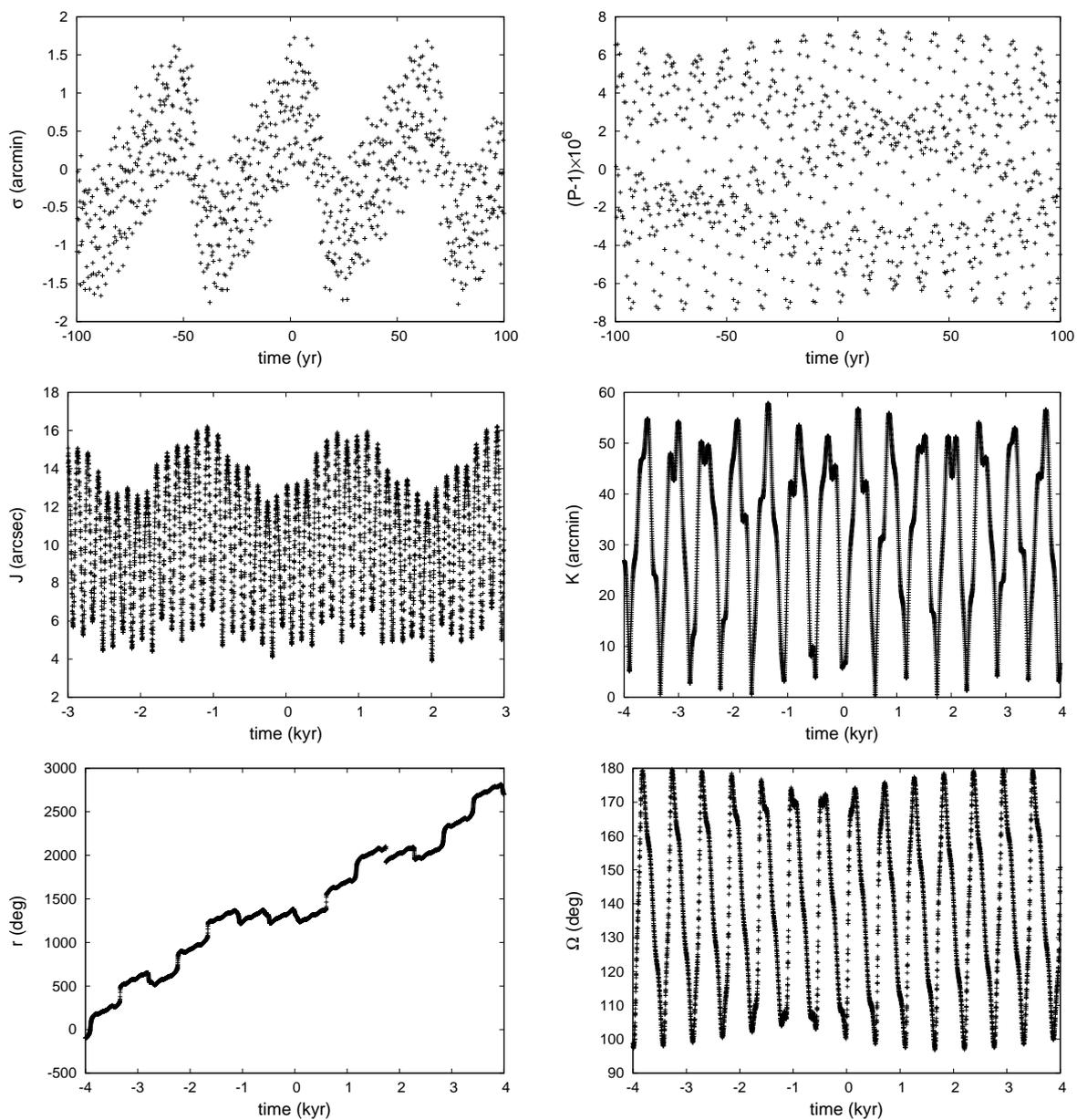


FIGURE 3.2 – Simulations numériques de la rotation de Callisto. L'origine des temps est J1950 = JD 2433282.5.

Un résultat interpellant est le comportement du nœud de la rotation  $r$ , a priori supposé se comporter comme le nœud orbital ascendant  $\Omega$ , selon la Troisième Loi de Cassini.  $\Omega$  oscille avec une amplitude d'environ  $40^\circ$  autour de la valeur moyenne  $\approx 140^\circ$  (en fait  $138.277^\circ$ ), alors que le nœud  $r = -h$  précède, mais de façon non uniforme, comme si son comportement était chaotique.

En fait, la Troisième Loi de Cassini (Cassini, 1693; Colombo, 1966) dit que l'axe de rotation<sup>1</sup> d'un corps dans un État de Cassini, la normale à son orbite, et la normale au plan de référence sont coplanaires. Le problème est la définition du plan de référence. On adopte en général un plan dit de Laplace, qu'on ne définit pas toujours. La Fig.3.2 utilise le plan de référence des éphémérides L1.2, c'est-à-dire le plan équatorial de Jupiter à la date J2000. Le comportement en apparence chaotique du nœud  $r$  est en fait dû au choix de ce repère de référence, mal adapté à la représentation du mouvement de rotation.

### 3.3.2 La problématique du Plan de Laplace

Le Plan de Laplace est, par définition, le plan qui, choisi comme référence, va minimiser les variations de l'inclinaison orbitale d'un corps considéré. L'idée qui rend populaire son utilisation est que l'obliquité qui en résulte a directement un sens physique, c'est-à-dire que sa valeur est dominée par la réponse de l'intérieur du corps considéré, alors que pour un plan de référence arbitraire, l'obliquité serait dominée par un effet géométrique, signature de l'inclinaison de ce plan par rapport à l'orbite moyenne. Dans le contexte de la détermination de l'obliquité de Mercure, Yseboodt & Margot (2006) proposent 3 méthodes non rigoureusement équivalentes pour le déterminer, une basée sur une théorie séculaire, une sur un ajustement numérique sur les éphémérides, et une sur une détermination analytique du pôle de Laplace, à partir de valeurs d'inclinaison et de nœud orbital ainsi que de leurs dérivées. J'ai ici utilisé la théorie séculaire de (Yseboodt & Margot, 2006) pour déterminer un Plan de Laplace pour Callisto.

L'équation de Laplace-Lagrange régissant la précession du nœud orbital ascendant  $\Omega$  sous l'effet de l'aplatissement de Jupiter  $\omega_{J4}$  et de l'action gravitationnelle des autres satellites Galiléens  $\omega_{i4}$  et du Soleil  $\omega_{\odot 4}$  s'écrit :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \omega_{J4} + \omega_{14} + \omega_{24} + \omega_{34} + \omega_{\odot 4} \quad (3.44)$$

avec

$$\omega_{J4} = \frac{3}{2} J_2 n_4 \left( \frac{R_P}{a_4} \right)^2, \quad (3.45)$$

$$\omega_{i4} = -\frac{1}{4} \frac{\mathcal{G} M_i}{\mathcal{G} M_P} \frac{a_i}{a_4} b_{3/2}^{(1)} \left( \frac{a_i}{a_4} \right), \quad (3.46)$$

$$\omega_{\odot 4} = -\frac{1}{4} \frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{\mathcal{G} M_P} \left( \frac{a_{\odot}}{a_4} \right)^2 b_{3/2}^{(1)} \left( \frac{a_{\odot}}{a_4} \right), \quad (3.47)$$

où ici  $J_2 = 1.4736 \times 10^{-2}$  (Campbell & Synnott, 1985) est celui de Jupiter,  $n_4$  est la fréquence orbitale de Callisto,  $M_i$  est la masse du satellite  $i$ ,  $M_{\odot}$  celle du Soleil,  $a_i$  et  $a_{\odot}$  les demi-grands axes

1. Il y a ici ambiguïté avec le moment cinétique, le mouvement polaire étant négligé.

des satellites et du Soleil en orbite autour de Jupiter<sup>2</sup>, et  $b_{3/2}^{(1)}$  un coefficient de Laplace classique défini par (Brouwer & Clemence, 1960) :

$$b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(j\psi)}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^s} d\alpha. \quad (3.48)$$

Appelons  $p_k = \sin i_k \sin \Omega_k$  et  $q_k = \sin i_k \cos \Omega_k$  pour les satellites 1 à 5 (le cinquième étant le Soleil), et  $p_0$  et  $q_0$  ces mêmes quantités pour l'orientation du Plan de Laplace. On a (Yseboodt & Margot, 2006) :

$$p_0 = \frac{p_1\omega_{14} + p_2\omega_{24} + p_3\omega_{34} + p_4\omega_{J4} + p_5\omega_{\odot 4}}{\omega_{14} + \omega_{24} + \omega_{34} + \omega_{J4} + \omega_{\odot 4}}, \quad (3.49)$$

$$q_0 = \frac{q_1\omega_{14} + q_2\omega_{24} + q_3\omega_{34} + q_4\omega_{J4} + q_5\omega_{\odot 4}}{\omega_{14} + \omega_{24} + \omega_{34} + \omega_{J4} + \omega_{\odot 4}}, \quad (3.50)$$

et la décomposition quasi-périodique du résultat est donnée dans la Table 3.9. Il s'agit du Plan de Laplace instantané, dont l'orientation dépend du temps. Une façon directe d'obtenir un plan de référence à partir de ce résultat est d'en prendre la partie constante.

TABLE 3.9 – Décomposition quasi-périodique de l'orientation du Plan de Laplace instantané de Callisto  $q_0 + ip_0$ . On obtient l'orientation du Plan de Laplace séculaire en conservant la première ligne, correspondant à la partie constante. L'origine des dates est J2000.

N	Amplitude (deg)	Amplitude	Fréquence (rad/an)	Phase (deg)	Période (an)	Identification
1	0.234718	14.083 arcmin	0	138.277	$\infty$	$\Phi_0$
2	0.128245	7.695 arcmin	-0.0111625	-17.821	562.8834	$\Phi_4$
3	0.083042	4.983 arcmin	-0.0456245	-168.810	137.7152	$\Phi_3$
4	0.010548	37.972 arcsec	-0.2079027	60.029	30.2218	$\Phi_2$
5	0.002558	9.208 arcsec	1.0593612	-41.412	5.9311	$2\lambda_{\odot}$
6	0.000817	2.940 arcsec	-0.8455888	160.220	-7.4305	$\Phi_1$
7	0.000392	1.413 arcsec	-0.5296331	16.320	-11.8633	$-\lambda_{\odot}$
8	0.000336	1.208 arcsec	0.5296621	101.254	11.8626	$\lambda_{\odot}$
9	0.000291	1.047 arcsec	1.5890069	-98.914	3.9542	$3\lambda_{\odot}$

La Table 3.10 donne le Plan de Laplace séculaire des 4 satellites Galiléens. On remarque que son inclinaison augmente à mesure qu'on s'éloigne de la planète. En fait, l'orientation du Plan de Laplace résulte essentiellement d'un équilibre entre la contribution de l'aplatissement de la planète et la perturbation gravitationnelle du Soleil. Si le satellite est proche de sa planète alors le Plan de Laplace sera proche du plan équatorial de celle-ci, alors que s'il est loin son inclinaison sera proche de celle du Soleil par rapport à l'équateur de la planète.

Calculer l'orientation du Plan de Laplace est en pratique relativement difficile, aussi j'ai cherché une manière plus directe de déterminer un plan de référence acceptable.

2. Dire que le Soleil tourne autour de Jupiter est simplement une représentation non conventionnelle du mouvement de Jupiter autour du Soleil.

TABLE 3.10 – Le Plan de Laplace séculaire des 4 satellites Galiléens de Jupiter, obtenu à l’aide des formules (3.49) &amp; (3.50).

Satellite	Amplitude (deg)	Phase (deg)
J-1 Io	$3.41 \times 10^{-3}$	138.333
J-2 Europe	$2.93 \times 10^{-2}$	138.281
J-3 Ganymède	0.121	138.277
J-4 Callisto	0.235	138.277

### 3.3.3 Ma proposition de plan de référence acceptable

L’Union Astronomique Internationale donne l’orientation du Pôle Nord de rotation des corps en fonction du temps sous la forme d’une série hybride composée d’un polynôme et de termes sinusoidaux (cf. e.g. les recommandations de 2009 (Archinal et al., 2011)). Ces recommandations sont données dans l’International Celestial Reference Frame (ICRF) (Ma et al., 1998), lui-même proche du repère des axes principaux d’inertie de la Terre à J2000. Ce repère a l’avantage d’avoir une définition très robuste, condition indispensable pour un repère de référence, mais son manque de lien avec la dynamique du corps considéré fait que le résultat est dominé par un effet géométrique. La physique liée à la réponse de l’intérieur dans l’obliquité n’est donc pas directement accessible.

La Fig.3.2 montre une évolution irrégulière du nœud de la rotation, rendant impossible une représentation sous forme de série composée d’un polynôme et de termes oscillants. Pour comprendre ce qui se passe, il faut exprimer les variables d’inclinaison orbitale en fonction du temps, i.e.

$$\zeta(t) \approx 0.0038423 \exp i\Phi_0 + 0.0022454 \exp i\Phi_4, \quad (3.51)$$

d’après (Lainey et al., 2006) et la Tab.3.2. On constate que les amplitudes associées au terme constant et au terme oscillant sont du même ordre de grandeur, alors que dans la logique d’une représentation basée sur la Plan de Laplace, le terme oscillant aurait une amplitude largement dominante.

J’ai calculé la variable de rotation  $R = P(1 - \cos K)$  à l’aide d’une théorie des perturbations (Deprit, 1969). Pour cela, j’ai considéré que Callisto était sur une orbite circulaire, que son inclinaison était régie par la formule (3.51) où  $\Phi_0$  est constant et  $\Phi_4$  dépend linéairement du temps, et que le mouvement polaire était nul. De façon similaire au Chapitre 2, le Hamiltonien  $\mathcal{H}(p, r, P, R, t)$  devient  $\mathcal{K}(u, v, U, V, t)$  :

$$\mathcal{K}(u, v, U, V, t) = \omega_u U + \omega_v V + \mathcal{P}(u, v, U, V, t), \quad (3.52)$$

où  $\omega_u$  et  $\omega_v$  sont les fréquences des petites oscillations autour de l’équilibre (cf. Tab.3.8). On a besoin, pour exprimer  $R$ , du générateur du premier ordre  $\mathcal{W}_1$ , solution de moyenne nulle de l’équation homologique :

$$\omega_u \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial u} + \omega_v \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial v} + n_4 \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial \lambda_4} + \dot{\Phi}_4 \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial \Phi_4} = \mathcal{P}. \quad (3.53)$$

On peut exprimer  $R$  comme fonction des variables canoniques en inversant les expressions de  $u, v, U, V$  (Eq.2.84), i.e.  $R = f(u, v, U, W)$ , et on obtient finalement  $R$  dépendant du temps par :

$$\begin{aligned}
R &= R^* + (f(u, v, U, V))|_{U=0, V=0} \\
&= R^* + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial U} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial V} - \frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial V} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial v},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

où  $R^* = P^*(1 - \cos K^*)$  est donné par le système d'équations (2.58)-(2.59), et  $(;)$  est le crochet de Poisson. Tous calculs faits, on obtient numériquement

$$\begin{aligned}
R(t) &= 2.95297 \times 10^{-5} \\
&+ 5.40736 \times 10^{-5} \cos(\Phi_4 - \Phi_0) \\
&- 3.87221 \times 10^{-9} \cos(\Phi_4 - 2\lambda_4 + \Phi_0) \\
&+ 2.56663 \times 10^{-9} \cos(2\Phi_4 - 2\Phi_0),
\end{aligned} \tag{3.55}$$

ce qui est incompatible avec la définition de  $R = P(1 - \cos K)$  qui suggère une quantité toujours positive. En écrivant

$$\zeta(t) = \Gamma_0 \exp i\Phi_0 + \Gamma_1 \exp i\Phi_4, \tag{3.56}$$

$$R(t) = A_0 + A_1 \cos(\Phi_4 - \Phi_0), \tag{3.57}$$

on obtient, après calculs :

$$A_0 = 2\Gamma_0^2, \tag{3.58}$$

$$A_1 = 6\Gamma_0\Gamma_1 \frac{n_4}{|\omega_v^2 - \dot{\Phi}_4^2|} (\gamma_1 + \gamma_2) \left( \frac{3}{4}n_4(2\gamma_1 + \gamma_2) \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0} \right)^2 \right) - \dot{\Phi}_4 \right), \tag{3.59}$$

et pour avoir une variable  $R$  toujours positive alors on doit avoir  $A_1 < A_0$ , ce qui n'est pas le cas ici. À l'instar des librations forcées en longitude (Eq.2.106), on a une différence de fréquences au dénominateur, ce qui veut dire que si la fréquence des oscillations libres  $\omega_v$  est proche de la fréquence de précession du nœud orbital ascendant  $\dot{\Phi}_4$ , alors un effet de quasi-résonance va amplifier fortement l'amplitude de réponse  $A_1$ . On peut directement exprimer une condition en fonction des quantités orbitales  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$ , i.e.  $A_1 < A_0$  revient à  $\Gamma_1 < \alpha\Gamma_0$  avec

$$\alpha = \frac{|\omega_v^2 - \dot{\Phi}_4^2|}{3n(\gamma_1 + \gamma_2) \left( \frac{9}{8}n_4(2\gamma_1 + \gamma_2) - \dot{\Phi}_4 \right)}. \tag{3.60}$$

Ici,  $\alpha$  est en fait une borne supérieure où la quantité  $1 + (\Gamma_1/\Gamma_0)^2/2$  a été majorée par  $3/2$ . En effet, ce calcul n'a de sens que lorsque  $\Gamma_1 < \Gamma_0$ . Pour résumer, on a

- si  $\Gamma_1 > \Gamma_0$ , alors le nœud orbital et le nœud de la rotation précèdent tous les 2 à la même fréquence,
- si  $\Gamma_1 < \alpha\Gamma_0$ , alors les 2 nœuds oscillent autour d'une valeur constante,
- si  $1 > \Gamma_1/\Gamma_0 > \alpha$ , alors on est dans une sorte de zone interdite où le nœud orbital oscille alors que le nœud de rotation peut précéder. Cet effet purement géométrique peut résulter en un comportement en apparence chaotique, déjà identifié par Colombo (1966) *the relative motion is in some cases a pure regular precessional motion but, in many cases, it may be very different from regular precessional motion.*

En une phrase, tout ceci signifie que pour représenter de façon quasi-périodique l’orientation du moment cinétique d’un corps dans l’État de Cassini 1, le plan de référence doit être soit suffisamment proche du plan orbital moyen, soit suffisamment éloigné (c’est en général le cas de l’ICRF), mais une zone intermédiaire est à éviter. Je suggère de prendre comme plan de référence le plan défini par le mode propre constant  $\Phi_0$ , qui est une sorte de plan orbital moyen. Ceci permet d’annuler la nouvelle quantité  $\Gamma_0$ . À partir du repère des éphémérides, c’est-à-dire le plan équatorial de Jupiter à J2000, il est obtenu par une rotation d’axe  $z$  (une  $R_3$ ) d’angle  $138.277^\circ$ , puis une rotation d’axe  $x$  (une  $R_1$ ) d’angle  $2 \arcsin \Gamma_0 \approx 0.44^\circ$ . Le choix de ce repère peut sembler naturel, et il est même parfois abusivement considéré comme le Plan de Laplace dans la littérature. Mon travail montre que ce n’est pas le Plan de Laplace, mais que son utilisation est tout-à-fait légitime.

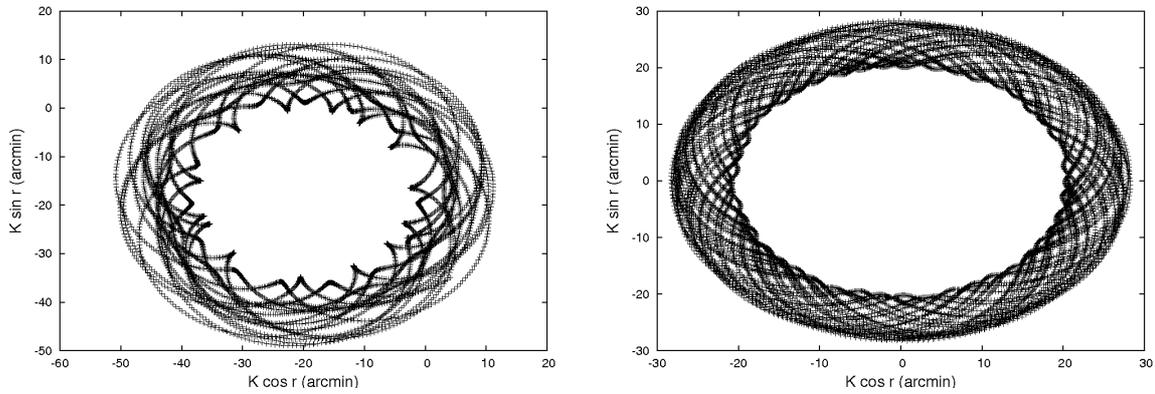


FIGURE 3.3 – Mouvement du moment cinétique de Callisto  $\vec{G}$ , par rapport au plan équatorial jovien à J2000 (à gauche) et par rapport au plan défini par  $\Phi_0$  (à droite). Ceci permet d’illustrer aussi le fait que le mouvement en apparence irrégulier obtenu pour le nœud était dû au fait que le centre du repère était dans l’épaisseur de la trajectoire.

La Fig.3.3 illustre ce changement de repère, qui consiste en pratique à centrer le repère de référence par rapport au mouvement de précession du moment cinétique  $\vec{G}$ .

### 3.3.4 Les quantités de rotation de Callisto

Le lecteur trouvera dans (Noyelles, 2009) la décomposition quasi-périodique des différentes variables de rotation, notamment l’obliquité, le mouvement polaire, et les libérations en longitude. J’obtiens un mouvement polaire d’une amplitude inférieure à 200 mètres, une obliquité moyenne de 9.65 arcmin avec des oscillations de 5.24 arcmin en 182 ans, correspondant à la combinaison de modes propres  $\Phi_3 - \Phi_4$ , et des libérations en longitude à la fréquence  $n_4$  d’amplitude  $\approx 1$  arcsec, soit  $\approx 12$  mètres. J’ai ici considéré Callisto comme un corps rigide, (Rambaux et al., 2011) obtiennent un résultat environ 10 fois plus grand en supposant l’existence d’un océan global qui découple le mouvement de la croûte, de relativement faible inertie, du reste de l’intérieur. Mais la principale composante des libérations vient du forçage annuel, de période 11.86 ans, et d’amplitude  $\approx 2$  arcmin, soit  $\approx 140$  mètres. La Fig.3.4 illustre les variations de la durée du jour sur Callisto, et illustre l’importance de ce forçage annuel.

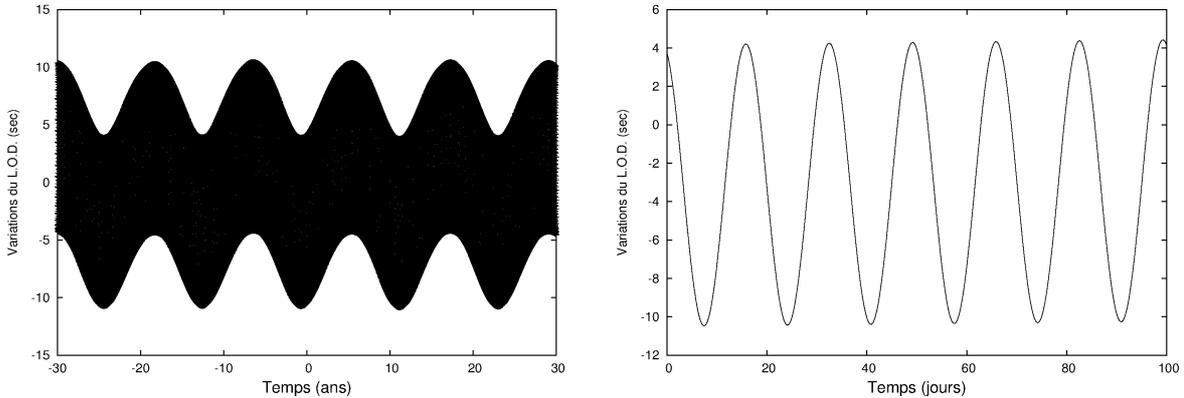


FIGURE 3.4 – Variations de la durée du jour (L.O.D.) de Callisto. La valeur moyenne est 16.6860174175 jours, et la date de référence J2000.

### 3.4 Les coorbitaux Janus et Épiméthée

Cette étude a été motivée par l'observation par Cassini de la rotation de Janus et Épiméthée (Tiscareno et al., 2009).

#### 3.4.1 Une dynamique orbitale intéressante

Les satellites de Saturne  $S - 10$  Janus et  $S - 11$  Épiméthée sont des petits corps ( $\approx 160$  km de diamètre pour Janus et  $\approx 120$  km pour Épiméthée) orbitant près de Saturne en environ 17 heures, et en résonance de moyen mouvement 1 : 1. Ceci signifie qu'ils cohabitent à la même distance moyenne de Saturne, le demi-grand axe moyen étant 152043 km. Régulièrement, à l'occasion de proches rencontres, ils échangent leurs orbites, c'est-à-dire que le satellite le plus proche de Saturne devient le plus éloigné, et inversement. Ces proches rencontres ont lieu tous les 4 ans, ce phénomène a donc une période de 8 ans. Dans un repère tournant, les orbites ont la forme de fer à cheval, d'où le nom *horseshoe orbits*. Les éléments orbitaux sont tracés Fig.3.5, on y voit notamment que l'amplitude des échanges est plus importante pour Épiméthée, en fait le rapport des amplitudes est aussi le rapport des masses entre les 2 satellites ( $\approx 3.6$ ). On voit également que l'échange d'orbites n'est pas un processus instantané mais dure environ 6 mois.

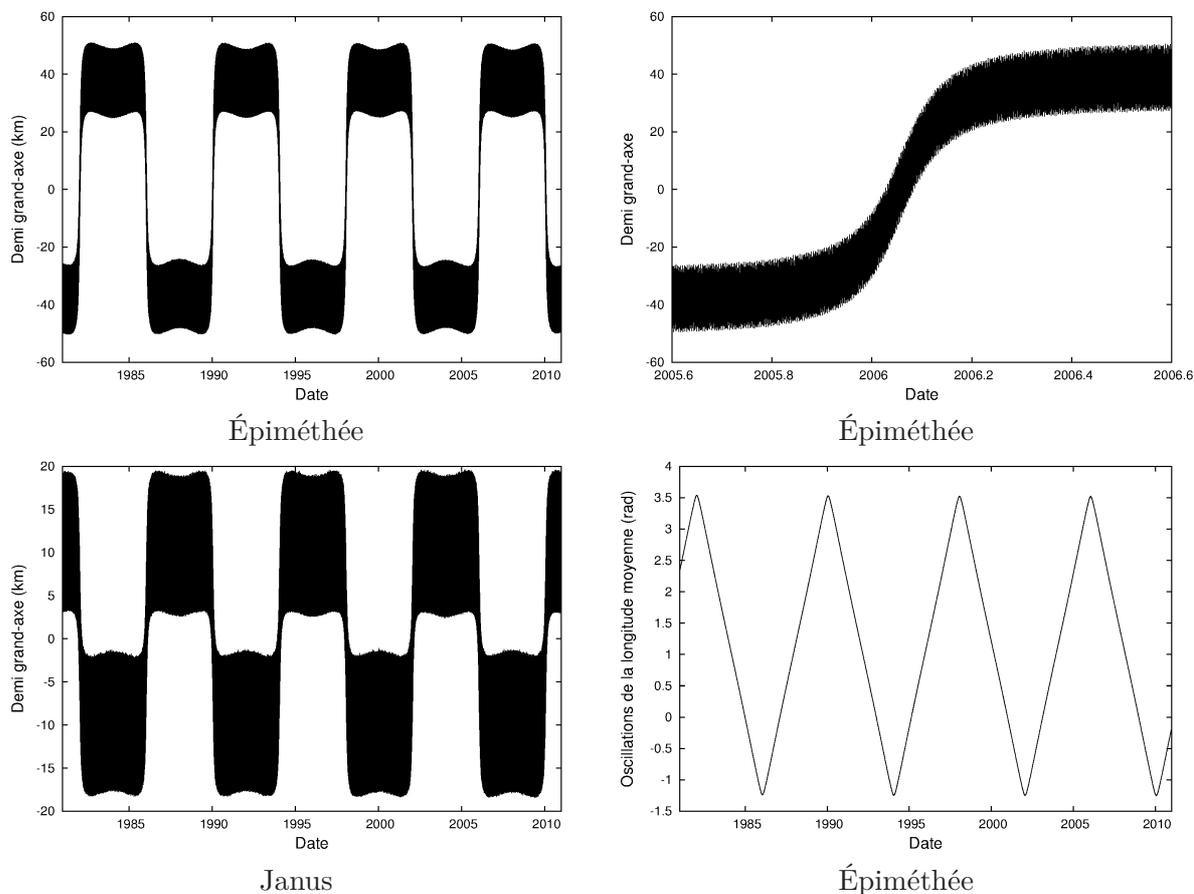


FIGURE 3.5 – Les échanges d’orbites entre Janus et Épipiméthée, tracés à l’aide des éphémérides du JPL. Les variations de la longitude moyenne d’Épipiméthée ont été obtenues après la soustraction d’une pente de  $3304.01449932$  rad/an.

En utilisant des valeurs tabulées des éléments orbitaux de Janus et Épipiméthée obtenues à partir du portail JPL HORIZONS, l’analyse en fréquence m’a donné les 7 modes propres recensés Tab.3.11. La résonance de moyen mouvement entre Janus et Épipiméthée a pour conséquence que les 2 longitudes moyennes ne sont pas des modes propres indépendants (ils ont la même fréquence), par contre les librations de l’argument résonnant,  $\phi$ , apparaissent, et leur période est celle des échanges d’orbite, soit  $\approx 8$  ans. Les 4 modes propres suivants sont ceux liés aux péricentres  $\varpi$  de Janus (J) et Épipiméthée (E), et aux nœuds ascendants  $\Omega$ . Le dernier mode propre,  $\omega$ , a été obtenu numériquement dans l’inclinaison de Janus, il est possible qu’il soit un artefact dû à une somme d’autres effets, comme les perturbations gravitationnelles des autres satellites. HORIZONS donne les éphémérides orbitales de Janus et Épipiméthée sur la période [1950-2050], avec le noyau SAT299, la détection d’une oscillation de période 136 ans sur un intervalle de 100 ans doit être considérée avec précaution.

La Tab.3.12 donne la décomposition quasi-périodique des demi-grands axes de Janus et Épipiméthée. On y observe l’importance du terme  $\phi$ , lié aux échanges d’orbite. On peut remarquer également l’opposition de phase, ou le changement de signe de l’amplitude, pour les termes en  $\phi$  dans Janus et Épipiméthée. Les éléments orbitaux moyens des satellites sont donnés dans la Tab.3.13,

TABLE 3.11 – Modes propres du mouvement orbital de Janus et Épiméthée.

	Fréquence (rad/an)	Phase à J2000	Période
$\lambda$	3304.0143278	$-114.564^\circ$	0.69459 j
$\phi$	0.7847244	$177.674^\circ$	8.00687 a
$\varpi_J$	13.0908741	$129.064^\circ$	175.30788 j
$\varpi_E$	13.0928523	$-121.751^\circ$	175.28140 j
$\Omega_J$	$-13.0386776$	$114.152^\circ$	$-176.00968$ j
$\Omega_E$	$-13.0400438$	$152.811^\circ$	$-175.99124$ j
$\omega$	0.0461439	$-120.692^\circ$	136.16498 a

qui indique que les excentricités et inclinaisons sont limitées.

TABLE 3.12 – Décomposition quasi-périodique des demi-grands axes de Janus et Épiméthée. Les séries sont en cosinus.  $\varpi$  désigne  $\varpi_J$  pour Janus, et  $\varpi_E$  pour Épiméthée.

$\lambda$	$\phi$	$\varpi$	Janus (km)	Épiméthée (km)	Période
-	-	-	152043.049	152043.602	$\infty$
-	1	-	13.182	-47.500	8.00687 a
1	-	-1	7.397	-3.114	0.69735 j
-	3	-	-4.538	16.353	2.66892 a
-	5	-	2.403	-8.660	1.60135 a
1	-1	-1	2.098	-6.251	0.69752 j
1	1	-1	2.097	-6.234	0.69719 j
-	7	-	-1.547	5.577	1.14382 a
-	9	-	1.087	-3.918	324.94105 j
-	11	-	-0.802	2.889	265.86068 j
-	13	-	0.611	-2.201	224.95882 j
-	15	-	-0.476	1.715	194.96413 j
-	17	-	0.377	-1.359	172.02726 j
1	2	-1	0.365	-4.731	0.69702 j
1	-2	-1	0.359	-4.726	0.69769 j
-	19	-	-0.302	1.090	153.91905 j
1	-3	-1	0.203	-1.293	0.69785 j
1	3	-1	0.200	-1.319	0.69685 j

La disponibilité d'éphémérides pour Janus et Épiméthée uniquement de la part du JPL m'a amené à télécharger des valeurs tabulées des coordonnées cartésiennes, puis à les interpoler par des splines cubiques, à l'aide de routines présentes dans la GNU Scientific Library (Galassi et al., 2009). L'erreur associée est d'ordre 4 (Sonneveld, 1969), ce qui signifie qu'une réduction du pas d'échantillonnage des données par un facteur  $\alpha$  réduira l'erreur d'un facteur  $\alpha^4$ . J'ai utilisé un pas d'échantillonnage d'une heure pour obtenir une erreur inférieure à 9 km. J'ai échantillonné les coordonnées cartésiennes pour obtenir ce résultat ; un premier essai sur les éléments orbitaux présentait un problème de convergence lors des échanges d'orbite. L'interpolation des orbites des satellites m'a permis d'écrire des routines C++ donnant leur position à n'importe quelle date, même si elle ne correspondait pas exactement à une donnée tabulée. J'ai ainsi pu les utiliser dans

TABLE 3.13 – Éléments orbitaux moyens de Janus et Épiméthée.

Élément	Janus	Épiméthée
Demi-grand axe	152043.049 km	152043.602 km
Excentricité	$9.8 \times 10^{-3}$	$1.61 \times 10^{-2}$
Inclinaison	$0.165^\circ$	$0.353^\circ$

mon code numérique de rotation rigide<sup>3</sup>.

### 3.4.2 La rotation observée (Tiscareno et al., 2009)

Tiscareno et al. (2009) ont publié des observations de la rotation de Janus et Épiméthée à partir d'images Cassini ISS (Imaging Science Subsystem) acquises entre 2005 et 2008 (Fig.3.6), d'une résolution inférieure au kilomètre. Le principe consiste à repérer des points remarquables à la surface de ces satellites, par exemple des cratères, présents sur au moins 2 images, et à ajuster un mouvement de rotation. Pour Janus, 66 points de contrôle ont été repérés à partir de 104 images, et 49 points de contrôle à partir de 50 images pour Épiméthée. Cette étude ajuste également une forme triaxiale sur Janus et Épiméthée (Tab.3.14), et la compare avec la forme déduite du mouvement de rotation (Tab.3.15).



FIGURE 3.6 – Images Cassini N1537923147 pour Janus (à gauche) et N1575363491 pour Épiméthée (à droite). Figure reproduite de (Tiscareno et al., 2009).

3. La méthode d'utilisation de ces éphémérides officiellement conseillée est d'utiliser la librairie SPICE <http://naif.jpl.nasa.gov/naif/toolkit.html> (Acton, 1996). Ayant jugé le temps d'apprentissage prohibitif pour cet outil aux nombreuses fonctionnalités, j'ai utilisé ma propre méthode, centrée sur l'usage que je souhaitais faire des éphémérides. Je signale également la disponibilité de la librairie CALCEPH, réalisée par Mickael Gastineau, <http://www.imcce.fr/inpop/calceph/>, destinée à lire les noyaux SPICE. Son usage est peut-être plus direct.

TABLE 3.14 – Formes triaxiales de Janus et Épiméthée observées par Tiscareno et al. (2009).  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les trois rayons de l'ellipsoïde,  $\bar{R}$  le rayon moyen, et les moments d'inertie sont ici calculés à partir de la forme, en supposant une densité constante.

	Janus	Épiméthée
$a$ (km)	$101.5 \pm 1.9$	$64.9 \pm 2.0$
$b$ (km)	$92.5 \pm 1.2$	$57.0 \pm 3.7$
$c$ (km)	$76.3 \pm 1.2$	$53.1 \pm 0.7$
$\bar{R}$ (km)	$89.5 \pm 1.4$	$58.1 \pm 1.8$
$A/(MR^2)$	0.360	0.328
$B/(MR^2)$	0.407	0.469
$C/(MR^2)$	0.470	0.476
$(B - A)/C$	$0.100 \pm 0.012$	$0.296^{+0.019}_{-0.027}$

TABLE 3.15 – Libration physique diurne, c'est-à-dire à la fréquence orbitale, de Janus et Épiméthée, et comparaison avec ce qu'indique la forme observée. On constate qu'une libration non nulle est mesurée pour Épiméthée, et que les observations de la rotation sont plutôt en accord avec celles de la forme.

	Janus	Épiméthée
Libration physique		
déduite de la forme	$-0.33^\circ \pm 0.06^\circ$	$-8.9^\circ_{+4.2^\circ}$
mesurée	$-0.3^\circ \pm 0.9^\circ$	$-5.9^\circ \pm 1.9^\circ$
$(B - A)/C$		
déduit de la forme	$0.100 \pm 0.012$	$0.296^{+0.019}_{-0.027}$
déduit de la libration	$0.09^{+0.11}_{-0.09}$	$0.280^{+0.008}_{-0.011}$

Le premier résultat est la confirmation que ces corps sont bien en rotation synchrone. De plus, pour la troisième fois après la Lune (Koziel, 1967) et le satellite de Mars Phobos (Beletskii, 1972), des librations diurnes ont été mesurées pour un satellite naturel : Épiméthée. Les barres d'erreur sont bien plus petites que le signal, ce qui permet de déterminer le paramètre d'intérieur  $(B - A)/C$  à l'aide de la formule (2.109). La forte élongation de la forme d'Épiméthée favorise ces librations. Un signal a également été détecté pour Janus, qui semble en accord avec la forme observée, mais les barres d'erreur sont plus importantes que le signal lui-même, donc ce dernier résultat doit être accueilli avec prudence.

Cette étude annonce également la mesure d'un décalage de l'orientation moyenne de l'axe le plus long de Janus par rapport à la direction Janus-Saturne, de  $5.2^\circ \pm 1^\circ$  en longitude et  $2.3^\circ \pm 1^\circ$  en latitude. Cette mesure est très surprenante car elle semble très difficile à expliquer, même en supposant des anomalies de masse dans Janus (Robutel et al., 2011). Des mesures plus récentes, réalisées par la même équipe et à ce jour non publiées, suggèrent que ce décalage est en fait bien plus faible qu'initialement annoncé.

Cette observation de la forme et de la rotation de Janus et Épiméthée m'a incité à simuler leur rotation en 3 dimensions à l'aide d'éphémérides réalistes, notamment dans la gestion des échanges d'orbites. Le but est d'essayer d'améliorer l'explication des observations, de prédire des quantités non encore mesurées comme les obliquités, ainsi que de comprendre la façon dont les échanges d'orbite affectent la rotation.

### 3.4.3 Simulation de la rotation

J'ai utilisé mon code numérique de rotation rigide en 3 dimensions ainsi que les éphémérides obtenues à partir de JPL HORIZONS pour simuler la rotation de Janus et Épiméthée à l'État de Cassini 1. Mes paramètres d'intérieur sont ceux déduits de la forme (Tab.3.14). La figure 3.7 montre les libérations physiques, de part et d'autre d'un échange d'orbites.

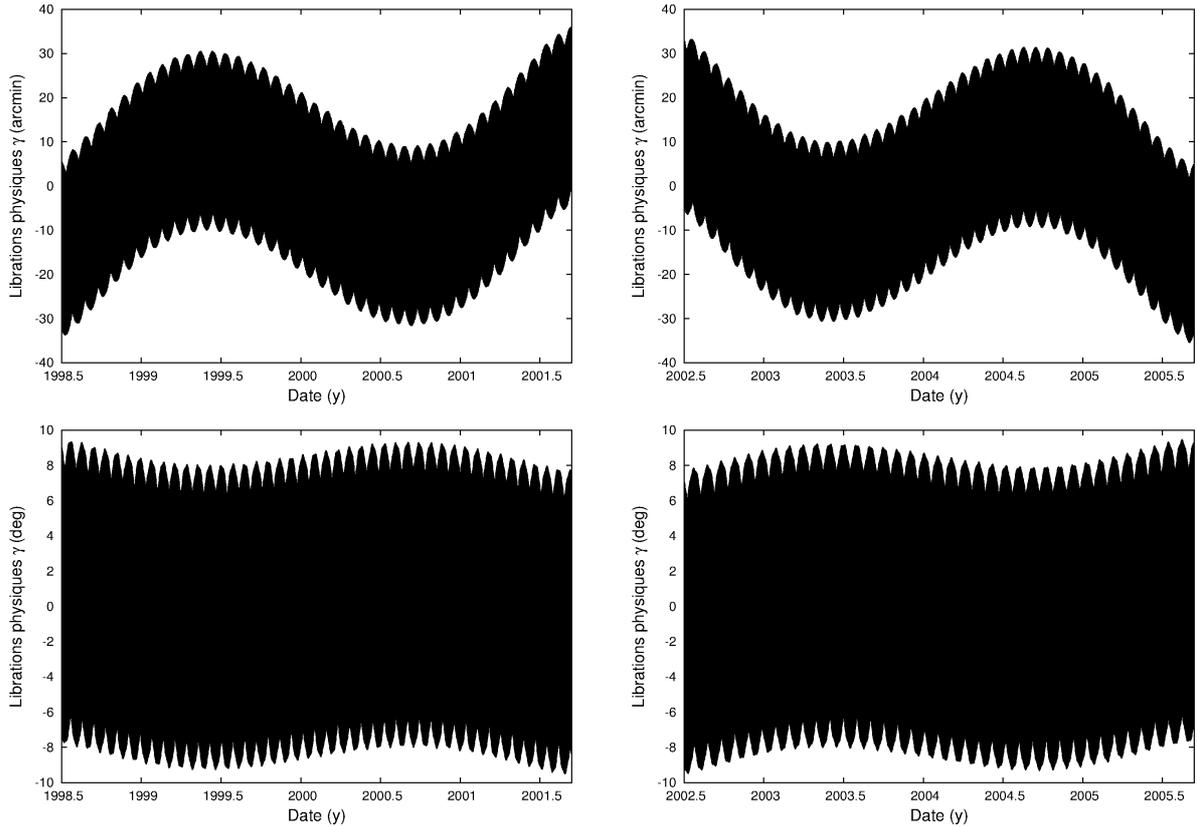


FIGURE 3.7 – Libérations physiques de Janus et Épiméthée, de part et d'autre d'un échange d'orbites. Ces figures ont été obtenues après la soustraction d'une pente constante, respectivement de 3304.356301 et 3303.673150 radians par an pour Janus, et 3302.7839016 et 3305.24602 radians par an pour Épiméthée.

Ces libérations présentent au moins 3 échelles de période. L'épaisseur de la courbe représente les libérations diurnes, de période la période orbitale, soit  $\approx 16.7$  heures. L'amplitude est de l'ordre de  $0.3^\circ$  pour Janus et  $8^\circ$  pour Épiméthée. On remarque également des pics en haut et en bas de ces courbes, d'amplitude quelques minutes d'arc pour Janus et de l'ordre du degré pour Épiméthée. Ces pics peuvent perturber la mesure de la libération diurne, et peut-être expliquer en partie les barres d'erreur sur les observations. Enfin, on observe une modulation à plus longue période, signature de la périodicité à 8 ans des échanges d'orbite.

La mesure élevée de la libération diurne pour Épiméthée est intéressante. Il s'agit en fait d'un cas de quasi-résonance, i.e. la période des libérations libres est proche de la période de forçage. C'est une conséquence de l'ellipticité équatoriale du satellite  $(B - A)/C$ , cf. la figure 3.8, obtenue à l'aide

de l'amplitude exprimée dans la formule (2.109).

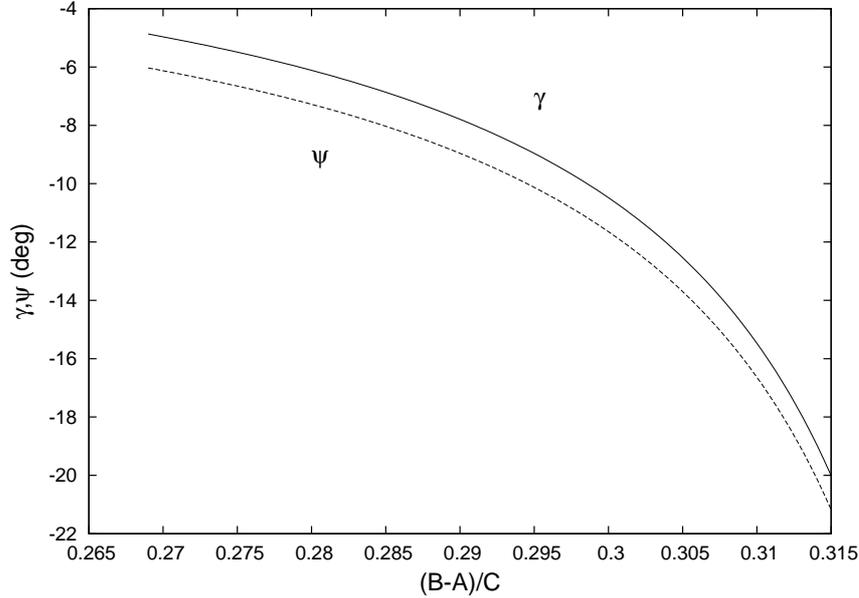


FIGURE 3.8 – Amplitude de la libration diurne d'Épiméthée en fonction de son ellipticité équatoriale  $(B - A)/C$ . On peut remarquer un comportement asymptotique à proximité de la valeur  $1/3$ , ceci correspond à une résonance entre la fréquence orbitale  $n$  et la fréquence des librations libres  $\omega_u$ .

Ces simulations indiquent une forte influence des échanges d'orbite sur les librations en longitude. Je l'ai montré numériquement, et Robutel et al. (2011) l'ont confirmé analytiquement. Cette dernière étude propose une approche originale du calcul des librations par une approche perturbative, en considérant le rapport des fréquences  $\dot{\phi}/n$  comme un petit paramètre ( $\approx 2.38 \times 10^{-4}$ ) sur lequel le développement peut s'appuyer.

Mes simulations numériques ont également permis de confirmer que le mouvement polaire doit être très petit, en fait de l'ordre du mètre. Les obliquités attendues sont de l'ordre de 6 secondes d'arc pour Janus et 11 secondes d'arc pour Épiméthée.

## 3.5 Mimas

Ce travail sur Mimas (Noyelles et al., 2011) s'est inscrit dans le cadre du groupe de travail Encelade<sup>4</sup>, animé par V. Lainey et regroupant diverses compétences européennes en planétologie (structure interne, mécanique céleste, astrométrie, marées, ...). Ce groupe s'est créé à la suite de la découverte de geysers sur Encelade, et a pour but de mieux comprendre le système de Saturne à la lumière des découvertes de Cassini, des nouvelles observations, et des nouveaux développements théoriques. On y trouve des membres de différents centres de recherches européens, comme l'Observatoire de Paris-Meudon, le CEA, l'Université de Namur, l'Observatoire Royal de Belgique, ou encore la Queen Mary University of London.

4. <http://www.imcce.fr/lainey/Encelade.htm>

Dans ce cadre, nous avons choisi de nous intéresser à la rotation de Mimas. Avant de disposer de suffisamment de données pour observer cette rotation (ce qu'a finalement fait R. Tajeddine à l'issue de sa thèse de doctorat), nous l'avons simulée théoriquement.

### 3.5.1 Les modèles d'intérieur

Le champ de gravité de Mimas n'a été mesuré qu'à l'ordre 0, c'est-à-dire que sa masse est connue<sup>5</sup> mais nous ne savons rien de sa répartition dans le satellite. Cette répartition est très probablement inhomogène, ne serait-ce que par l'anomalie de masse liée au cratère Herschel. Sa forme est incompatible avec l'équilibre hydrostatique si on considère sa densité constante. La détection d'anomalies de température sur Mimas par l'instrument CIRS (Cassini Composite Infrared Spectrometer) (Fig.3.9 à droite, reprise de Howett et al. (2011)) a été envisagée comme la détection d'anomalies de structure interne. Mais l'explication la plus probable est un bombardement électronique externe. Cette anomalie de température a également été détectée pour Téthys (Howett et al., 2012), et à chaque fois elle est très bien corrélée avec le mouvement orbital du satellite. L'anomalie de température correspond à l'hémisphère qui mène le mouvement.

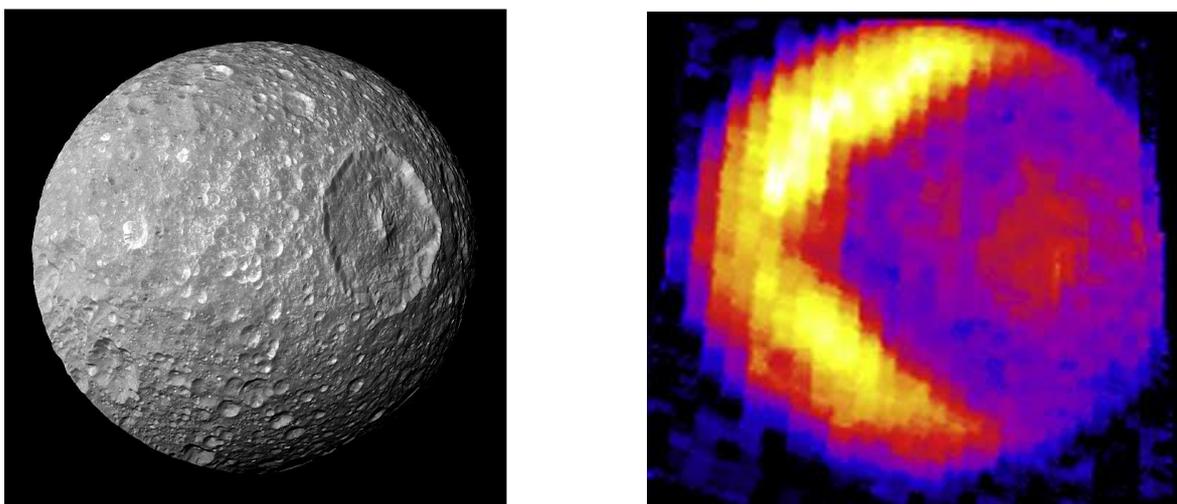


FIGURE 3.9 – Mimas vu par Cassini. À gauche dans le visible, on distingue bien le cratère Herschel. À droite dans l'infra-rouge moyen (instrument CIRS, ici entre 15.4 et 16.7  $\mu\text{m}$  de longueur d'onde), où le croissant jaune (ou PacMan®) représente l'anomalie de température.

Suivant de précédents auteurs, notamment Eluszkiewicz (1990), nous avons considéré Mimas comme un corps glacé, relativement poreux à l'extérieur et moins en son cœur, sous l'effet de la compaction. Ce phénomène de compaction dans les satellites de glace a récemment été confirmé par des expériences de laboratoire réalisées au Japon (Yasui & Arakawa, 2008, 2009). Nous avons modélisé cette compaction en considérant Mimas comme un corps à 2 couches rigides, concentriques triaxiales et coaxiales, la couche externe étant moins dense que la couche interne. Il s'agit donc de modèles à 8 paramètres en entrée, à savoir une densité (ou masse volumique)  $\rho$  et 3 rayons  $a \times b \times c$  pour chaque couche  $c$  (noyau/*core*) et  $s$  (croûte/*shell*), et 3 paramètres en sortie, dont nous avons

5. Elle est actuellement déterminée par analyse des libérations des résonances de moyen mouvement avec Téthys et Méthone (Jacobson et al., 2006). Les survols de Cassini sont trop lointains pour déterminer la masse de Mimas.

besoin pour modéliser la rotation d'un corps rigide : les coefficients de Stokes  $J_2$  et  $C_{22}$ , et le moment d'inertie polaire normalisé  $C/(mR^2)$ .

Nous avons imposé à ces modèles d'intérieur d'avoir la même masse totale que Mimas, et afin d'avoir une autre contrainte liant les paramètres d'intérieur nous avons soit considéré que Mimas était à l'équilibre hydrostatique, violant ainsi l'observation de la forme, soit imposé comme rayons externes les rayons observés, et considéré l'interface noyau-croûte comme homothétique de la surface. Aucune de ces hypothèses n'est pleinement satisfaisante, mais le manque de données incite à simplifier le modèle. Nos paramètres sont regroupés Tab.3.16.

TABLE 3.16 – Paramètres physiques et dynamiques de Mimas. Le moyen mouvement de Mimas  $n$  a été mis à jour depuis TASS 1.6, mais nous avons utilisé cette valeur car elle est cohérente avec l'utilisation des éphémérides TASS 1.6 et c'est la seule détermination dans la littérature qui est moyennée convenablement, c'est-à-dire après identification de toutes les fréquences qui régissent le système orbital des satellites de Saturne.

Paramètres	Valeurs	Sources
Moyen mouvement $n$	2435.14429644 rad/an	TASS 1.6 (Vienne & Duriez, 1995)
Masse $m$	$3.7495 \times 10^{19}$ kg	Jacobson et al. (2006)
Masse volumique $\rho$	1150.03 kg/m <sup>3</sup>	Thomas et al. (2007b)
Rayon moyen $R$	198.2 km	Thomas et al. (2007b)
Rayons $a \times b \times c$	$207.8 \times 196.7 \times 190.6$ km	Thomas (2010)

Tous les modèles basés sur la forme sont équivalents pour la modélisation de la dynamique de la rotation, car cette dynamique est la signature de la répartition relative de la masse au sein du corps considéré. C'est pourquoi nous n'avons qu'un seul modèle de Mimas y correspondant, le 23 (Tab.3.17).

Si Mimas est à l'équilibre hydrostatique, alors sa forme représente un équilibre entre sa propre gravité, sa rotation, et les marées exercées par Saturne. Un paramètre important est

$$q_r = \frac{\Omega^2 R^3}{\mathcal{G}m}, \quad (3.61)$$

où  $\Omega$  est la vitesse de rotation du corps ( $\Omega = n$  pour les corps en synchronisation spin-orbite).  $q_r$  permet de quantifier l'effet de la déformation de rotation. Un autre paramètre important est le nombre de Love fluide  $k_f$ , qui caractérise la réaction du satellite à un potentiel perturbateur après relaxation des contraintes visqueuses. La forme du satellite est donc stabilisée. On obtient  $k_f$  avec

$$I = \frac{2}{3} \iiint \rho (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad (3.62)$$

$$MOI = \frac{I}{mR^2}, \quad (3.63)$$

$$MOI = \frac{2}{3} \left[ 1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{4 - k_f}{1 + k_f}} \right], \quad (3.64)$$

ce qui permet d'obtenir (Rappaport et al., 1997) :

$$C_{22} = \frac{k_f}{4}q_r + \mathcal{O}(q_r^2), \quad (3.65)$$

$$J_2 = \frac{5k_f}{6}q_r + \mathcal{O}(q_r^2). \quad (3.66)$$

De plus, il vient de la définition des moments d'inertie (Eq.2.2-2.4) et de  $J_2 = (2C - A - B)/(2C)$  :

$$C = I + \frac{2}{3}J_2mR^2. \quad (3.67)$$

Il est à noter la relation classique pour un satellite naturel à l'équilibre hydrostatique :  $J_2 = 10/3 C_{22}$ . En pratique, cette relation a été vérifiée pour Io (Anderson et al., 2001b), dénoncée pour Rhéa (Mackenzie et al., 2008), et peut être compatible avec le champ de gravité de Titan (Iess et al., 2010). Mais dans le cas de Titan, la combinaison du champ de gravité et de la forme n'est pas compatible avec l'équilibre hydrostatique (Zebker et al., 2009). Cette hypothèse doit donc être considérée au mieux comme une approximation ; néanmoins son utilisation me paraît légitime dans le sens où le manque de données par rapport au nombre de paramètres nécessaires à l'élaboration d'un modèle d'intérieur nécessite l'introduction de contraintes supplémentaires.

Ici les calculs ont été faits à faible excentricité et faible  $q_r$ , donc rotation lente. L'influence de l'excentricité est donnée dans (Matsuyama & Nimmo, 2009), et d'un  $q_r$  significatif dans (Tricarico, 2014).

Nous avons ainsi suffisamment de paramètres pour simuler la rotation d'un tel corps. Nous avons ainsi créé 22 modèles de Mimas hydrostatiques (Tab.3.17), pour différentes densités du noyau et de la croûte.

TABLE 3.17 – Nos modèles d’intérieur pour Mimas. Les 22 premières lignes correspondent à un Mimas à l’équilibre hydrostatique, tandis que le dernier est basé sur la forme observée. Les masses volumiques sont en  $kg.m^{-3}$ .

N	$\rho_c$	$\rho_s$	$k_f$	$MOI$	$J_2 (10^{-2})$	$C_{22} (10^{-3})$	$C/(mR^2)$
1	1200	800	1.40473	0.389636	2.17051	6.51152	0.404106
2	1500	800	1.11293	0.354953	1.71963	5.15889	0.366418
3	2000	800	0.94032	0.331801	1.45293	4.35878	0.341487
4	2500	800	0.86349	0.320705	1.33422	4.00267	0.329600
5	3000	800	0.81885	0.314001	1.26524	3.79571	0.322436
6	3500	800	0.78921	0.309439	1.21944	3.65831	0.317569
7	4000	800	0.76788	0.306100	1.18649	3.55946	0.314010
8	1200	1000	1.41613	0.390899	2.18812	6.56437	0.405486
9	1500	1000	1.24455	0.371206	1.92301	5.76902	0.384026
10	2000	1000	1.17336	0.362551	1.81300	5.43901	0.374638
11	2500	1000	1.14536	0.359061	1.76975	5.30925	0.370860
12	3000	1000	1.12980	0.357099	1.74570	5.23711	0.368737
13	3500	1000	1.11969	0.355816	1.73009	5.19026	0.367350
14	4000	1000	1.11251	0.354901	1.71899	5.15698	0.366361
15	1200	1100	1.44040	0.393565	2.22563	6.67688	0.408403
16	1500	1100	1.38066	0.386951	2.13331	6.39993	0.401173
17	2000	1100	1.36451	0.385134	2.10836	6.32508	0.399189
18	2500	1100	1.35879	0.384487	2.09953	6.29858	0.398484
19	3000	1100	1.35572	0.384139	2.09478	6.28435	0.398105
20	3500	1100	1.35376	0.383917	2.09176	6.27527	0.397862
21	4000	1100	1.35239	0.383761	2.08963	6.26890	0.397692
22	1150.03	1150.03	1.5	0.400000	2.30951	6.92854	0.415397
23	1200	800	1.40473	0.389636	2.28639	5.57013	0.406273

### 3.5.2 La rotation simulée

Comme précédemment j'ai fait des simulations numériques de la rotation de Mimas, en confirmant analytiquement les résultats. J'ai utilisé pour cela les éphémérides TASS 1.6 (Vienne & Duriez, 1995). Les modes propres orbitaux sont présentés Tab.3.18.

TABLE 3.18 – Les fréquences propres du mouvement orbital de Mimas d'après TASS1.6 (Vienne & Duriez, 1995)).

	Fréquence (rad/an)	Période (j)	Période (a)
$\lambda_{01}$	2435.14429644	0.942421949	$2.580211 \times 10^{-3}$
$\omega_1$	0.08904538	25772.62777	70.561609
$\phi_1$	10.19765304	225.0452555	0.616140
$\rho_1$	3.81643833	601.3285779	1.646348
$\Phi_1$	-2.55544336	898.0568575	2.458746

Le premier,  $\lambda_{01}$ , correspond au mouvement képlérien de Mimas autour de Saturne.  $\omega_1$  est l'argument de la libration de la résonance de moyen mouvement avec Téthys, tandis que les 3 autres modes propres apparaissent dans le nœud et le péricentre. Comme le montre la décomposition quasi-périodique de l'évolution de la longitude moyenne  $\lambda$  (Tab.3.1), la libration de la résonance prend une grande importance dans le mouvement en longitude, on s'attend donc à le retrouver dans la rotation. C'est bien ce qui se passe dans les librations physiques (Tab.3.19) où ce terme a une amplitude de  $\approx 44^\circ$ .

TABLE 3.19 – Librations physiques de Mimas, pour le modèle 23, basé sur la forme. Les séries sont en cosinus.

$\lambda_{01}$	$\omega_1$	$\phi_1$	$\rho_1$	Fréquence (rad/an)	Période (j)	Amplitude (arcmin)	Phase at J2000
-	1	-	-	0.08904538	25772.62777	43.61°	51.354°
-	3	-	-	0.26713614	8590.87592	43.261 arcmin	-25.913°
1	-	-1	1	2428.763080	0.944898	26.075 arcmin	101.355°
-	-	1	-	10.19765304	225.04526	7.828 arcmin	-157.744°
-	1	-1	-	10.10860766	227.02728	3.657 arcmin	-119.032°
-	1	1	-	10.28669842	223.09718	3.532 arcmin	-16.309°

En fait, le terme qui a un sens en terme de structure interne est celui lié à la libration diurne, par la formule (2.109), de période 0.944898 jour. Un autre terme intéressant est l'obliquité moyenne, par la formule (2.113). La figure 3.10 et la table 3.20 donnent ces quantités, toutes déterminées numériquement puis vérifiées analytiquement.

Les simulations indiquent que si Mimas est à l'équilibre hydrostatique, alors on peut s'attendre à une obliquité entre 2 et 3 minutes d'arc (entre 0.033 et 0.05 degrés), et des librations diurnes entre 21 et 32 minutes d'arc, soit entre 0.34 et 0.54 degrés. L'amplitude des autres librations n'est pratiquement pas affectée. Le cas homogène représente un extremum, c'est-à-dire que c'est l'obliquité la moins élevée et la libration la plus grande. Nous avons également estimé que les marées n'affectaient pas significativement la rotation d'équilibre (l'État de Cassini 1).

Ces résultats sont des simulations. Ils demandent à être confrontés aux observations. C'est ce que nous avons fait dans une étude menée par Radwan Tajeddine.

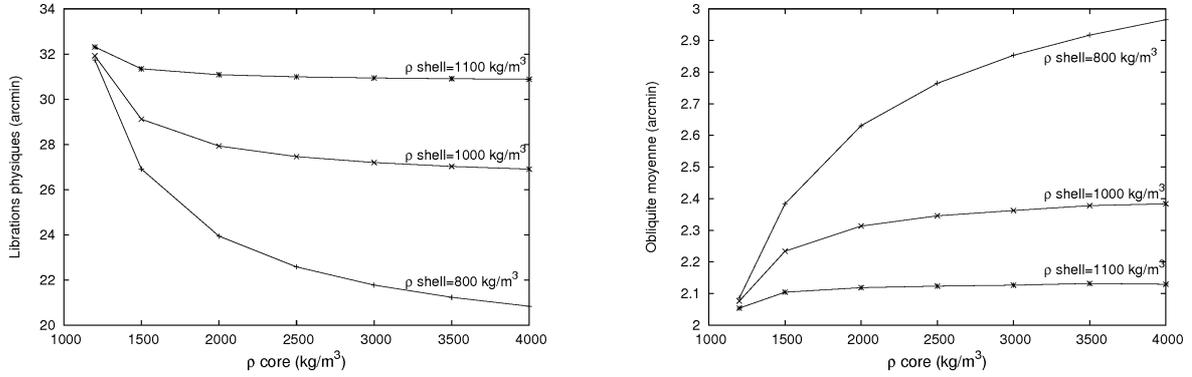


FIGURE 3.10 – La rotation de Mimas, simulée numériquement.

TABLE 3.20 – Les quantités de rotation pour nos modèles de Mimas.

N	$T_u$ (j)	$T_v$ (j)	$T_w$ (j)	Librations de marée (arcmin)	Librations en latitude (arcmin)	Obliquité moyenne (arcmin)	Librations physiques (arcmin)
1	2.143878	7.885550	11.621674	163.398	2.016	2.086	31.744
2	2.294081	8.997072	13.222674	158.577	2.314	2.384	26.914
3	2.407777	9.908107	12.763086	155.609	2.559	2.631	23.944
4	2.468518	10.416095	13.618627	154.248	2.693	2.765	22.582
5	2.507237	10.742236	14.181571	153.442	2.780	2.853	21.776
6	2.534519	10.975456	14.591169	152.900	2.843	2.917	21.234
7	2.555063	11.152890	14.906138	152.508	2.891	2.966	20.841
8	2.138844	7.849766	11.569966	163.583	2.006	2.076	31.922
9	2.220696	8.443608	12.426948	160.777	2.166	2.234	29.115
10	2.257477	8.730512	12.839826	159.593	2.243	2.313	27.930
11	2.274983	8.851150	13.013162	159.124	2.275	2.346	27.461
12	2.284054	8.920304	13.112486	158.862	2.293	2.363	27.199
13	2.290031	8.966015	13.178106	158.692	2.306	2.378	27.028
14	2.294326	8.998974	13.225425	158.571	2.315	2.384	26.907
15	2.128297	7.775062	11.461869	163.975	1.986	2.054	32.314
16	2.154684	7.962727	11.733240	163.008	2.037	2.104	31.347
17	2.162067	8.015705	11.809777	162.745	2.051	2.119	31.084
18	2.164709	8.034707	11.837202	162.652	2.056	2.124	30.991
19	2.166135	8.044989	11.852091	162.602	2.059	2.127	30.941
20	2.167044	8.051527	11.861492	162.570	2.060	2.132	30.909
21	2.167685	8.056158	11.868221	162.548	2.062	2.130	30.886
22	2.106951	7.625231	11.244996	164.792	1.946	2.014	33.132
23	2.323129	8.075914	10.113182	157.734	2.071	2.135	26.075

### 3.5.3 La rotation observée (Tajeddine et al., 2014)

Je suis volontairement bref dans cette section car ma contribution à cette étude a été relativement limitée. Nous avons utilisé des images Cassini ISS<sup>6</sup> acquises par la caméra NAC<sup>7</sup> pour repérer un réseau de 260 points de contrôle. Il s'agit de motifs remarquables sur la surface de Mimas, par exemple des cratères, qui apparaissent sur au moins 2 images. À partir de l'observation de ces points de contrôle, nous avons ajusté un mouvement en longitude, qui confirme la rotation synchrone et mesure des librations physiques (Tab.3.21).

TABLE 3.21 – Librations physiques de Mimas observées.

Période (j)	Amplitude (arcmin)		Phase à J2000 (°)	
	Théorie	Observation	Théorie	Observation
25772.62	43.61°	43.86° ± 0.05°	51.35	52.9 ± 0.9
8590.87	43.26	44.5 ± 1.1	-25.91	-18 ± 3.2
0.945	26 – 33	50.3 ± 1.0	101.35	107.7 ± 0.8
225.04	7.82	7.5 ± 0.8	-157.74	–
227.02	3.65	2.9 ± 0.9	-119.03	–
223.09	3.53	3.3 ± 0.8	-16.31	–

On constate que les amplitudes des librations non diurnes sont plutôt confirmées, ce qui donne confiance en les mesures. Par contre l'amplitude des librations diurnes est plus élevée que prévu, ce qui suggère que l'intérieur de Mimas ne soit pas ce qu'on croyait jusqu'à présent. La Fig.3.11 donne l'évaluation de l'erreur en fonction de cette amplitude.

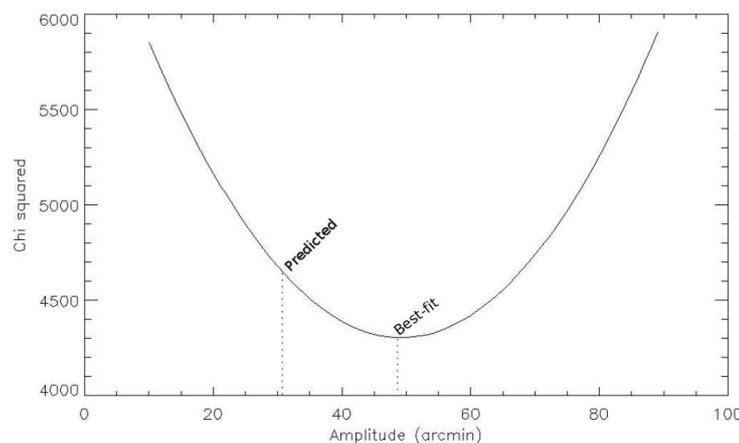


FIGURE 3.11 – Minimisation de l'erreur en ajustant l'amplitude des librations diurnes de Mimas. Figure extraite de (Tajeddine et al., 2014).

On considère en général que d'importantes librations diurnes sont la signature d'un océan global. Ceci voudrait dire que Mimas n'est en fait pas un corps gelé. Une autre possibilité serait que Mimas soit bien un corps solide, mais avec un noyau d'éléments lourds très allongé, comme s'il s'était

6. Image Science Subsystem

7. Narrow Angle Camera

formé bien plus près de Saturne, au bord extérieur des anneaux, avant d'être enrobé de silicates. Une telle structure interne confirmerait le modèle de formation des satellites à partir des anneaux de Charnoz et al. (2011).

### 3.6 Un satellite non résonnant : Hypériorion

Je vais clore ce chapitre avec le cas d'un satellite rigide dont la rotation n'est pas amortie. En conséquence, il tourne sur 3 axes, sa rotation ne correspond pas à une résonance. J'ai toujours considéré Hypériorion comme un corps intéressant car il s'agit, dans la limite de la connaissance actuelle, du plus grand objet de forme irrégulière dans le Système Solaire, ceci indiquerait qu'il serait issu d'une collision relativement récente (Farinella et al., 1983). D'un point de vue de la dynamique, son orbite est relativement allongée avec une excentricité de l'ordre de 0.1. Il est de plus en résonance de moyen-mouvement 4 : 3 avec Titan. Son mouvement orbital est assez complexe, notamment la décomposition quasi-périodique de ses éléments orbitaux converge assez lentement (Duriez & Vienne, 1997), ce qui a nécessité un traitement à part dans les éphémérides TASS.

Suite aux observations de la rotation par Cassini (Harbison et al., 2011), j'ai voulu moi-même étudier le chaos présent dans ce mouvement de rotation. Je ne suis pour l'instant pas allé au-delà de quelques simulations numériques, c'est pourquoi ce travail n'a encore été soumis nulle part.

#### 3.6.1 Une première détection de chaos dans le Système Solaire ?

Suite aux observations de la forme irrégulière d'Hypériorion (Smith et al., 1982) par Voyager 2, et en connaissance de son excentricité, Wisdom et al. (1984) ont étudié la stabilité des résonances spin-orbite dans son cas, cf. les portraits de phase Fig.3.12, obtenus à l'aide d'un Hamiltonien similaire à l'Eq.(2.103).

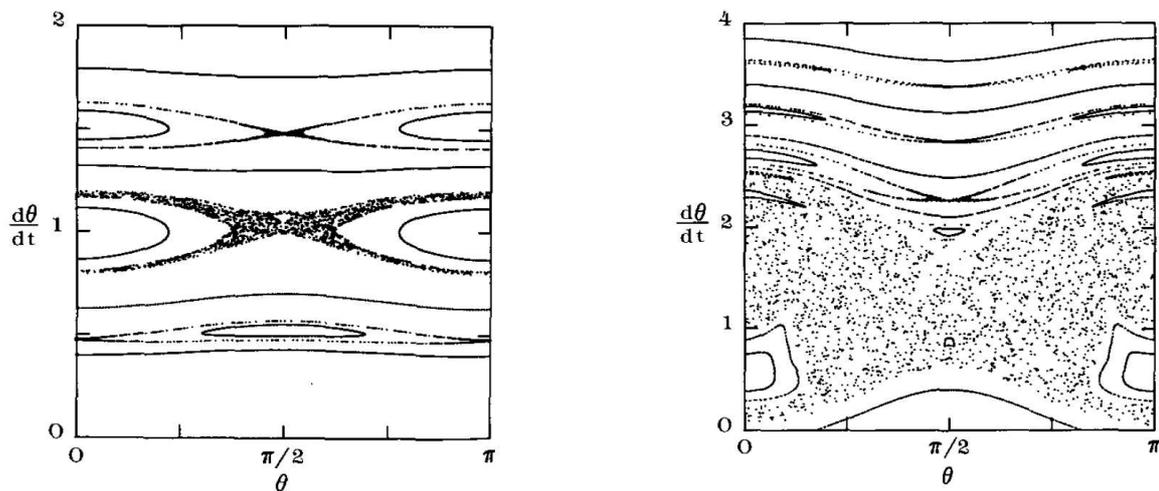


FIGURE 3.12 – Portraits de phase de la résonance spin-orbite pour un satellite classique (à gauche) et pour Hypériorion (à droite), avec  $e = 0.1$  et  $(B - A)/C = 0.264$ , en supposant que le mouvement polaire et l'obliquité sont amortis, reproduits de (Wisdom et al., 1984). On remarque une large zone de chaos couvrant notamment les résonances 1 : 2, 1 : 1, 3 : 2 et 2 : 1.

Dans le cas le plus commun, c'est-à-dire un satellite de forme relativement sphérique et d'orbite relativement circulaire, les résonances sont séparées, et ce sont des zones de stabilité. Par contre, dans le cas d'une excentricité et d'un aplatissement significatifs comme pour Hypériorion, les résonances sont suffisamment larges pour s'intersecter, ce qui est source de chaos (Chirikov, 1979). En conséquence les résonances 1 : 2, 1 : 1, 3 : 2 et 2 : 1 dans le sens où on les entend généralement ne sont pas stables, d'autres zones de stabilité apparaissent mais elles sont plus petites et entourées de chaos. Leur présence ne signifie donc pas que si la rotation d'Hypériorion avait été suffisamment amortie, il s'y trouverait bloqué. Les auteurs ne s'attardent pas sur ces zones, mais on peut voir proche de la résonance synchrone une petite zone de stabilité autour de  $\pi/2$ , c'est-à-dire que la résonance synchrone où l'axe le plus long est tangent à l'orbite est stable dans ce cas. Cette configuration a été nommée quelques années plus tard *Effet Amalthée* (Melnikov & Shevchenko, 1998), du nom du satellite de Jupiter pour lequel la théorie n'interdit pas son existence.

En 1984, on savait déjà que Japet, satellite de Saturne plus éloigné qu'Hypériorion, avait une rotation suffisamment amortie pour être synchrone (Widorn, 1950). Il était donc naturel de penser que la rotation d'Hypériorion était amortie. Wisdom et al. (1984) en ont déduit qu'Hypériorion se trouvait nécessairement dans la zone chaotique, et qu'il tournait même probablement sur 3 axes. Ceci est parfois considéré comme la première détection de chaos dans le Système Solaire.

S'il s'est avéré par la suite que la rotation d'Hypériorion était bien sur 3 axes et chaotique, elle n'est en fait pas suffisamment amortie pour atteindre la zone de chaos identifiée par Wisdom et al. (1984), sa fréquence de rotation étant plus de 4 fois son moyen mouvement moyen. Wisdom et al. (1984) ne peuvent donc être crédités de la prédiction de chaos dans la rotation d'Hypériorion.

### 3.6.2 La vérité des observations

Nous disposons d'observations de la rotation d'Hypériorion depuis Voyager. Entre Voyager et Cassini, des tentatives de mesures depuis la Terre ont été faites, à partir des variations de la courbe de lumière. En voici les résultats :

- Thomas et al. (1984) ont annoncé une période de rotation de 13.1 jours à partir de données Voyager. La période orbitale étant de 21.25 jours, on a un rapport de 1.62, et on serait dans la zone chaotique de Wisdom et al. (1984).
- Thomas & Veverka (1985) confirment cette mesure avec plus de données.
- Klavetter (1989), en utilisant aussi des données terrestres, incite à la prudence. Il dit ne pas détecter clairement de période, ce qui semble cohérent pour un corps tournant sur 3 axes. En cherchant à ajuster une sinusoïde sur ses observations, il trouve 2 optimaux, à 6.6 et 13.8 jours, mais préfère rester prudent quant à leur interprétation. À partir de cette étude, tous les auteurs considéreront qu'Hypériorion tourne sur 3 axes. Dans ce cas, parler de période est un abus de langage. Il faut la comprendre comme une valeur déduite de la norme du moment cinétique.
- Black et al. (1995), à l'aide de données Voyager, trouvent une période de  $5^{+0.29}_{-0.2}$  jours, ce qui suggère un rapport d'environ 4.25 entre la fréquence de rotation et l'orbitale. La chute de la période de rotation par rapport aux études précédentes reflète l'un des dangers de l'observation de phénomènes ayant une périodicité : l'aliasing. Le théorème de Shannon nous dit que si l'intervalle de temps entre 2 observations est supérieur à la moitié de la période du phénomène, alors l'analyse des données détectera bien une période, mais qui sera plus longue que la période réelle (cf. Fig. 3.13). Il faut garder à l'esprit qu'une période si courte pour Hypériorion n'était pas attendue.

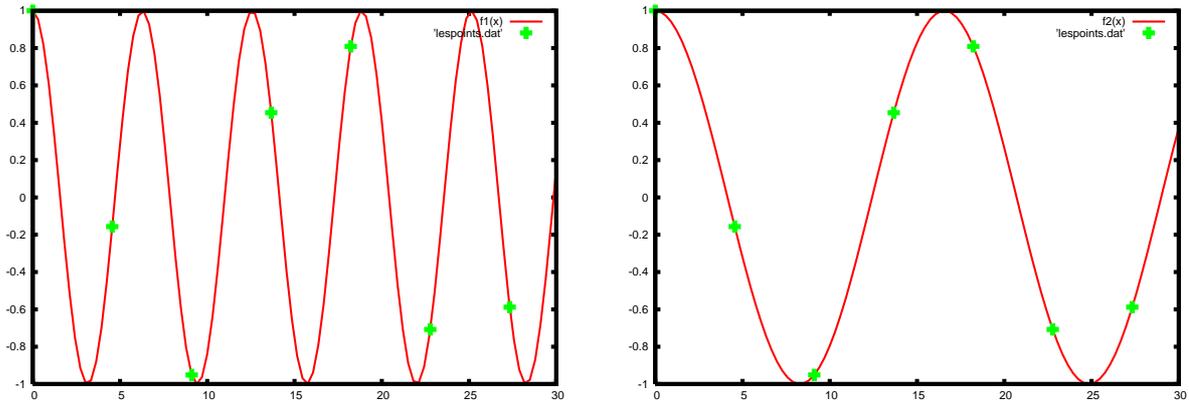


FIGURE 3.13 – Illustration du problème d'aliasing. L'analyse en fréquence d'un échantillon de mesures issu d'un problème périodique donne une période trop longue si le pas d'échantillonnage est trop grand. Cet exemple est issu d'un séminaire sur l'analyse en fréquences que j'ai donné en octobre 2007 à Namur, lors d'une formation doctorale.

- Harbison et al. (2011), à l'aide de données Cassini, trouvent une période de rotation entre 4.8 et 5 jours, et essaient de simuler l'évolution temporelle de la rotation d'Hypérior. Ils trouvent que ce mouvement est chaotique, avec un temps de Lyapounov de l'ordre de 100 jours.

Ces observations confirment que la dynamique de la rotation d'Hypérior est un problème complexe. Ce serait bien un mouvement chaotique, et Hypérior tournerait bien sur 3 axes.

### 3.6.3 Quelques simulations...

Ayant un code de rotation rigide, j'ai tenté moi aussi de m'attaquer au problème de la rotation d'Hypérior. Je disposais pour cela des paramètres d'intérieur et des observations (Tab.3.23) de Harbison et al. (2011).

TABLE 3.22 – Moments principaux d'inertie d'Hypérior, basés sur la forme et sur la rotation. Ici Hypérior est considéré comme un ellipsoïde triaxial, ce qui est probablement une approximation simpliste de sa forme.

	Forme (Thomas et al., 2007a)	Rotation (Harbison et al., 2011)
A/C	$0.58 \pm 0.03$	$\approx 0.61$
B/C	$0.87 \pm 0.03$	$\approx 0.80$
C	$0.542MR^2$	—

Lorsque j'ai entrepris cette étude numérique, j'avais pour objectif d'essayer de trouver une ou des trajectoires qui permettaient d'expliquer les observations. J'utilisais pour cela un mouvement orbital complet, donné par TASS1.7 (Duriez & Vienne, 1997). Mes conditions initiales utilisent les quantités  $(p, h, l, P, K, J)$  définies au Chap.2. Pour celles liées à l'angle de spin  $p$  et à la norme du moment cinétique normalisé  $P$ , j'ai voulu les laisser libres. Notamment,  $p$  peut prendre n'importe quelle valeur, et  $P$  reste dans les barres d'erreur de la fréquence de rotation. L'obliquité  $K$ , le

TABLE 3.23 – Orientations du vecteur rotation d’Hypérioron observées par Voyager et Cassini, à 5 dates (Harbison et al., 2011). Les coordonnées  $(\omega_A, \omega_B, \omega_C)$  se rapportent au repère des axes principaux d’inertie d’Hypérioron, tandis que  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  sont dans un repère lié au mouvement orbital d’Hypérioron.

N	Date	$\omega_A/ \omega $	$\omega_B/ \omega $	$\omega_C/ \omega $	$\omega_x$	$\omega_y$	$\omega_z$	$ \omega (^{\circ}/j)$
1	1981-08-23	0.986	0.160	-0.049	-2.457	-2.501	2.409	$72 \pm 3$
2	2005-06-10	0.890	0.067	0.451	3.399	-1.511	2.411	$75 \pm 1$
3	2005-08-16	0.907	0.162	0.389	3.026	1.909	2.303	$72 \pm 1$
4	2005-09-25	0.902	0.133	0.411	1.151	2.018	3.565	$72 \pm 1$
5	2007-02-16	0.749	0.080	0.659	-3.797	1.905	0.250	$72 \pm 1$

mouvement polaire  $J$ , et les angles de précession associés  $h$  et  $l$  sont facilement déductibles des données de la Tab.3.23, et sont rassemblées dans la Tab.3.24.

TABLE 3.24 – Angles définissant l’orientation du moment cinétique d’Hypérioron.

N	$K$	$h$	$A/C = 0.58, B/C = 0.87$		$A/C = 0.61, B/C = 0.80$	
			$J$	$l$	$J$	$l$
1	$55.218^{\circ}$	$49.788^{\circ}$	$94.759^{\circ}$	$76.320^{\circ}$	$94.556^{\circ}$	$77.986^{\circ}$
2	$57.922^{\circ}$	$9.829^{\circ}$	$49.036^{\circ}$	$83.557^{\circ}$	$50.419^{\circ}$	$84.361^{\circ}$
3	$58.271^{\circ}$	$-42.896^{\circ}$	$54.463^{\circ}$	$75.002^{\circ}$	$55.606^{\circ}$	$76.817^{\circ}$
4	$33.899^{\circ}$	$-67.356^{\circ}$	$52.509^{\circ}$	$77.528^{\circ}$	$53.744^{\circ}$	$79.055^{\circ}$
5	$86.251^{\circ}$	$-135.557^{\circ}$	$33.728^{\circ}$	$80.898^{\circ}$	$34.995^{\circ}$	$82.026^{\circ}$

À partir de 5 jeux de conditions initiales et 2 jeux de paramètres intérieurs, j’ai réalisé 10 groupes de 72000 simulations numériques, chacune différant des autres par le couple de conditions initiales  $(p, P)$ . Chacune des simulations était réalisée sur 100 ans, et affichait en sortie les variations relatives des différentes variables de rotation. J’ai utilisé pour cela le cluster de calculs ISCF *Interuniversity Scientific Computing Facility* qui me permettait d’utiliser jusqu’à 64 processeurs simultanément.

Les résultats ne montrent malheureusement pas grand-chose d’intéressant, on peut parler de résultat négatif.

Je ne montre ici que les cartes issues de 2 jeux de conditions initiales / paramètres (Fig.3.14 & 3.15), il n’est pas utile d’afficher les 10. Certaines semblent montrer des structures, mais aucune ne montre une possibilité de stabiliser les quantités de rotation. On a notamment un mouvement polaire qui varie de plusieurs dizaines de degrés. Je n’ai pas non plus trouvé de trajectoire qui ait l’air relativement proche des 5 conditions initiales.

Il semble difficile de trouver une solution suffisamment précise pour la rotation d’Hypérioron, du moins en le considérant comme un corps triaxial. Ceci semble confirmer la chaoticité de ce mouvement.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, j’ai présenté quelques applications de la rotation rigide. De tels modèles semblent parfaitement adaptés aux petits satellites comme Janus ou Épiméthée. Néanmoins, à partir d’une certaine taille, le corps se différencie et peut créer un noyau fluide ou un océan global.

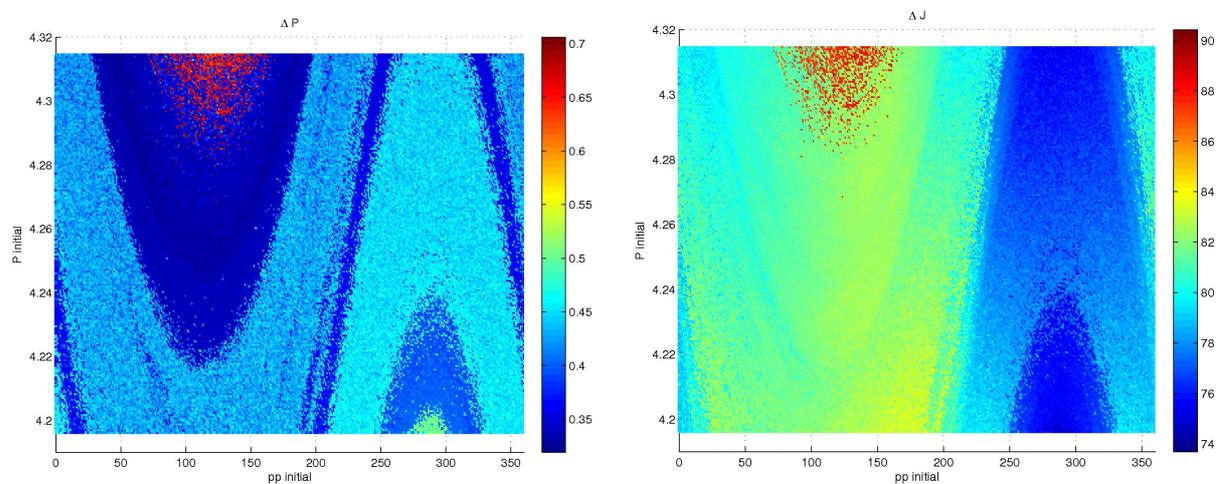


FIGURE 3.14 – Variations de la norme du moment cinétique  $P$  et de l'amplitude du mouvement polaire  $J$  d'Hypérion pour l'observation 3 et le modèle basé sur la forme. On observe une structure, mais qui ne stabilise pas vraiment la dynamique.

Dans un tel cas, un modèle rigide ne suffit plus. En effet, une couche fluide global découple la rotation de la croûte ou du manteau du reste de l'intérieur. C'est pourquoi je présente, dans la suite, les effets d'un noyau fluide (Chap.4), puis d'un océan global (Chap.5).

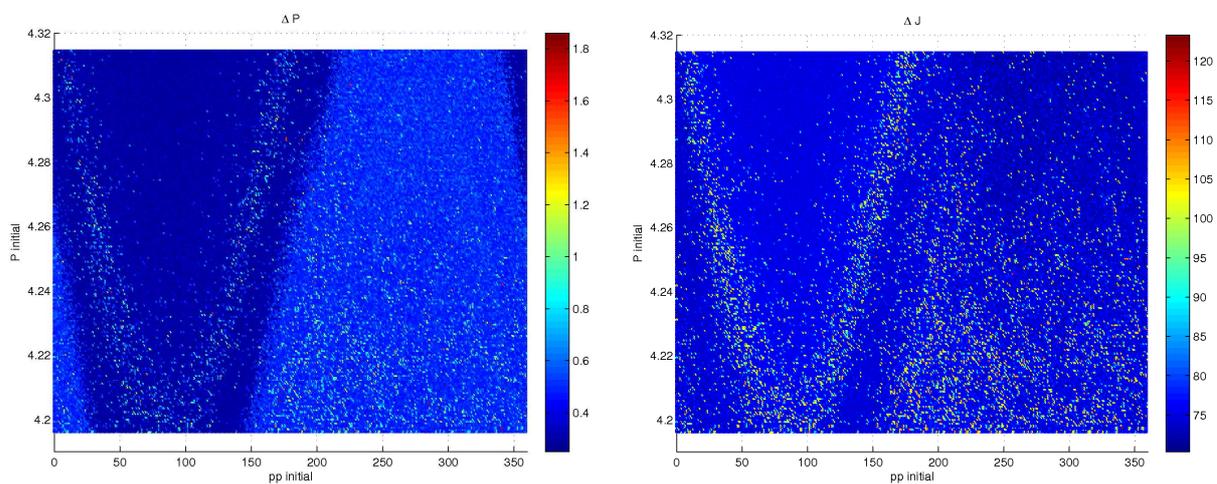


FIGURE 3.15 – Variations de la norme du moment cinétique  $P$  et de l'amplitude du mouvement polaire  $J$  d'Hypériorion pour l'observation 3 et le modèle basé sur la rotation. On n'observe rien de bien intéressant...

## Chapitre 4

# La prise en compte d'un noyau fluide

### 4.1 Introduction

À partir d'une certaine taille, typiquement de l'ordre du millier de kilomètres de rayon, les corps célestes ont une structure différenciée, c'est-à-dire que les éléments les plus lourds comme le fer migrent vers le centre, alors qu'au voisinage de la surface la croûte est un mélange de glace et de roches. Sous l'effet de la pression augmentant avec la profondeur, une partie de ce mélange glacé peut devenir fluide. La présence d'une couche fluide globale altère la réponse rotationnelle du corps à un forçage gravitationnel, en découplant (ou désolidarisant) la croûte solide, ou le manteau, du reste de l'intérieur. Dans ce chapitre nous allons modéliser la rotation des corps composés d'une couche externe rigide et d'une couche interne, que nous appellerons noyau, fluide. En pratique cela revient à négliger l'influence du noyau solide, également appelé graine, s'il existe.

Je vais utiliser le modèle dit de Poincaré-Hough (Poincaré, 1910; Hough, 1895), qui considère un comportement laminaire du fluide, que je présente (Sec.4.2) sous une forme Hamiltonienne inspirée de (Touma & Wisdom, 2001) et revisitée par (Henrard, 2008). J'étudie ensuite le comportement d'un satellite naturel (Sec.4.3), c'est-à-dire un corps en rotation synchrone sur une orbite faiblement excentrique, ayant un tel intérieur (Noyelles, 2012), avant de l'appliquer à Io (Noyelles, 2013) (Sec.4.4). Je discute ensuite des éventuels effets non linéaires du fluide (Sec.4.5), encore très mal connus. Un tel modèle d'intérieur est actuellement utilisé, sous une forme non Hamiltonienne, pour inverser les observations Laser-Lune, avec juste l'ajout des forces de marée (Williams et al., 2001; Rambaux & Williams, 2011).

### 4.2 Le modèle de Poincaré-Hough

Ce modèle a été élaboré indépendamment par Hough (1895) et Poincaré (1910). Il considère le satellite comme un corps triaxial contenant une cavité elle aussi triaxiale, remplie d'un fluide non visqueux de champ de vitesse et de densité uniformes. La surface du satellite et l'interface noyau-manteau sont concentriques et coaxiales. Le fluide exerce un couple de pression à l'interface noyau-manteau.

### 4.2.1 Géométrie du problème

La formulation Hamiltonienne a ceci de frustrant que, si elle est très bien adaptée pour un traitement mathématique précis et efficace des problèmes, elle nécessite un jeu de variables canoniques dont l'interprétation physique n'est pas toujours directe, mais nécessite une transformation mathématique bijective pour passer des calculs à l'interprétation. Dans notre cas, nous souhaitons modéliser l'orientation du manteau, c'est-à-dire de la surface observable, ainsi que du champ de vitesse dans le fluide, nous avons donc besoin pour cela de 2 jeux d'angles d'Euler. Mais au lieu de les utiliser pour le manteau et le noyau, l'un de ces jeux se rapportera au satellite dans son ensemble, et l'autre à un pseudo-noyau, objet virtuel ressemblant mathématiquement au noyau, ceci afin d'avoir des variables canoniques. Cette représentation est celle de (Touma & Wisdom, 2001), à l'origine de la formulation Hamiltonienne du modèle de Poincaré-Hough.

Il ne s'agit pas d'un modèle à 6 degrés de liberté mais à 4. S'il y a bien 3 degrés de liberté régissant l'orientation du manteau rigide comme dans le cas de la rotation rigide (Chap.2), les contraintes physiques que nous imposons (fluide non visqueux, interface noyau-manteau rigide donc indéformable,...) réduisent le mouvement du fluide à un seul degré de liberté indépendant des autres : l'orientation de son moment cinétique. Nous définissons donc 4 repères de référence :

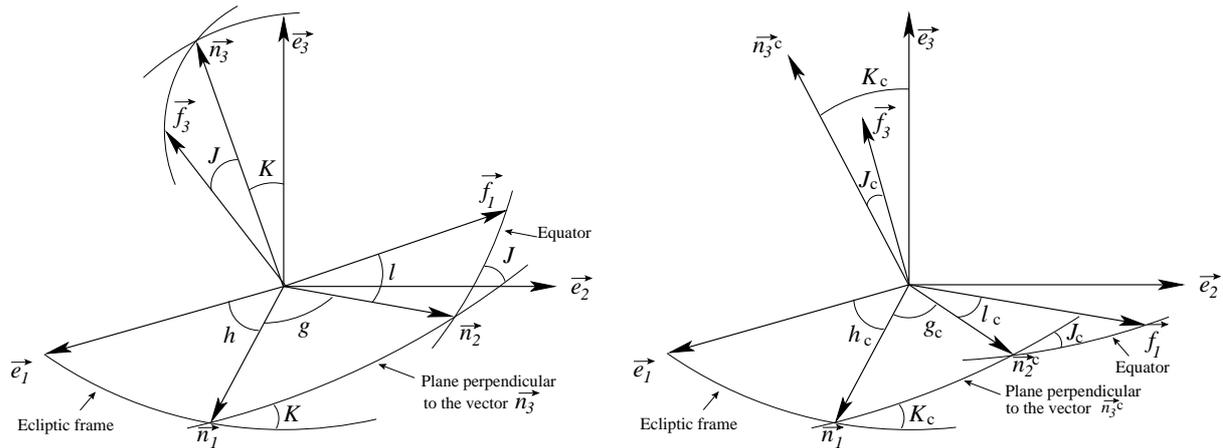


FIGURE 4.1 – Paramétrisation de l'orientation du satellite (gauche) et de son pseudo-noyau (droite). Je remercie Julien Dufey pour avoir réalisé cette figure, à l'origine pour (Noyelles et al., 2010).

- le repère inertiel  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , idéalement le même que les éphémérides orbitales. Il est en général lié au plan équatorial de la planète à la date J2000,
- le repère lié au moment cinétique du satellite  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ . Il est lié au repère inertiel par les angles d'Euler  $h$  et  $K$ , définis comme dans le cas rigide, c'est-à-dire que  $h$  est un nœud et  $K$  une obliquité par rapport à la normale au plan inertiel (cf. Fig.4.1 & 4.2),
- le repère lié au moment cinétique du pseudo-noyau  $(\vec{n}_1^c, \vec{n}_2^c, \vec{n}_3^c)$ . Il est lié au repère inertiel par les angles d'Euler  $h_c$  et  $K_c$ , définis comme précédemment,
- le repère lié aux axes principaux d'inertie du satellite, qui sont aussi ceux de la cavité et du manteau par définition du modèle,  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ . On y passe par le jeu d'angles d'Euler  $(g, J, l)$  où  $g$  est lié au spin du satellite,  $J$  est l'amplitude du mouvement polaire, et  $l$  l'angle de précession associé. On peut aussi définir analogiquement, pour le pseudo-noyau, les angles  $g_c, J_c$  et  $l_c$ .  $J_c$  est défini dans le sens opposé de  $J$ , encore une fois pour des raisons liées à la

formulation Hamiltonienne.

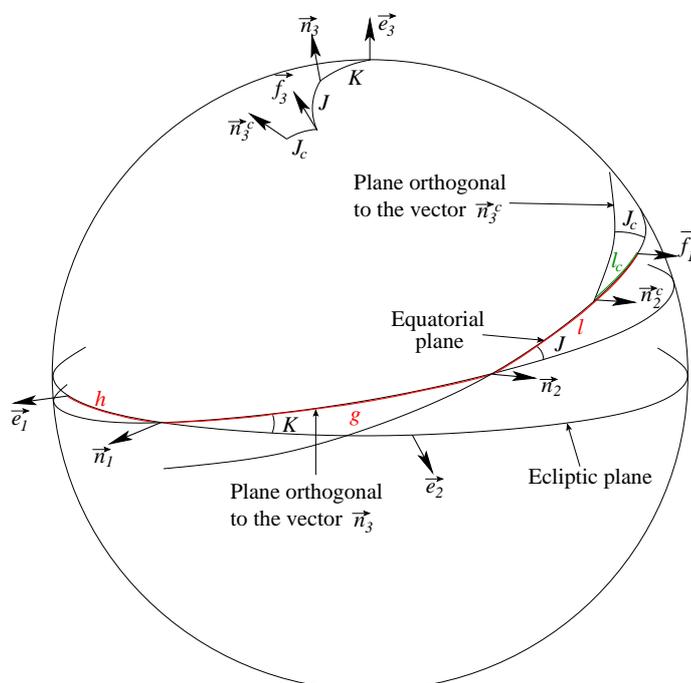


FIGURE 4.2 – Les 2 paramétrisations (cf.Fig.4.1) sur la même figure. Encore merci à Julien D.

Dans le repère des axes principaux d'inertie  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ , la matrice d'inertie du satellite  $I$  est définie ainsi :

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

avec  $0 < A \leq B \leq C$  définis par les Éq.(2.2) à (2.4). De même celle du noyau  $I_c$  est définie par

$$I_c = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

avec

$$A_c = \iiint_{\text{noyau}} (x_2^2 + x_3^2) \rho_c \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \quad (4.3)$$

$$= \frac{M_c}{5} (b_c^2 + c_c^2), \quad (4.4)$$

$$B_c = \iiint_{\text{noyau}} (x_1^2 + x_3^2) \rho_c \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \quad (4.5)$$

$$= \frac{M_c}{5} (a_c^2 + c_c^2), \quad (4.6)$$

$$C_c = \iiint_{\text{noyau}} (x_1^2 + x_2^2) \rho_c \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \quad (4.7)$$

$$= \frac{M_c}{5} (a_c^2 + b_c^2), \quad (4.8)$$

où  $a_c$ ,  $b_c$  et  $c_c$  sont les 3 rayons de l'interface noyau-manteau,  $\rho_c$  est la masse volumique du fluide, et  $M_c = 4\pi/3 \times a_c b_c c_c$  sa masse. Il découle directement de la définition des moments d'inertie, qui sont des sommes continues, et du fait que le noyau et le manteau sont coaxiaux, que les 3 moments d'inertie du manteau sont  $A_m = A - A_c$ ,  $B_m = B - B_c$  et  $C_m = C - C_c$ .

#### 4.2.2 L'énergie cinétique

Soit  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = v_1 \vec{f}_1 + v_2 \vec{f}_2 + v_3 \vec{f}_3$  le vecteur vitesse d'une particule de fluide dans le noyau, où  $(x_1, x_2, x_3)$  sont les coordonnées cartésiennes de la particule dans le repère des axes principaux d'inertie  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ . Une simple équation cinématique donne :

$$v_1(-, x_2, x_3, t) = \left( \omega_2(t) + \frac{a_c}{c_c} \nu_2(t) \right) x_3 - \left( \omega_3(t) + \frac{a_c}{b_c} \nu_3(t) \right) x_2, \quad (4.9)$$

$$v_2(x_1, -, x_3, t) = \left( \omega_3(t) + \frac{b_c}{a_c} \nu_3(t) \right) x_1 - \left( \omega_1(t) + \frac{b_c}{c_c} \nu_1(t) \right) x_3, \quad (4.10)$$

$$v_3(x_1, x_2, -, t) = \left( \omega_1(t) + \frac{c_c}{b_c} \nu_1(t) \right) x_2 - \left( \omega_2(t) + \frac{c_c}{a_c} \nu_2(t) \right) x_1, \quad (4.11)$$

où  $\vec{\omega}(t) = \omega_1(t) \vec{f}_1 + \omega_2(t) \vec{f}_2 + \omega_3(t) \vec{f}_3$  est le vecteur-rotation instantané du manteau, et  $\vec{v}(t) = \nu_1(t) \vec{f}_1 + \nu_2(t) \vec{f}_2 + \nu_3(t) \vec{f}_3$  est le vecteur définissant le champ de vitesse du fluide par rapport au manteau. Nous avons fait l'hypothèse que  $\vec{v}$  était indépendant des coordonnées spatiales (champ de vitesses uniforme).

Le moment cinétique du noyau  $\vec{N}'_c$  s'écrit

$$\vec{N}'_c = \iiint_{\text{noyau}} (\vec{x} \times \vec{v}) \rho_c \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3, \quad (4.12)$$

ce qui donne directement

$$\begin{aligned}
\vec{N}'_c &= \frac{M_c}{5} \left[ \left( \frac{c_c}{b_c} \nu_1 + \omega_1 \right) b_c^2 + \left( \frac{b_c}{c_c} \nu_1 + \omega_1 \right) c_c^2 \right] \vec{f}_1 \\
&+ \frac{M_c}{5} \left[ \left( \frac{c_c}{a_c} \nu_2 + \omega_2 \right) a_c^2 + \left( \frac{a_c}{c_c} \nu_2 + \omega_2 \right) c_c^2 \right] \vec{f}_2 \\
&+ \frac{M_c}{5} \left[ \left( \frac{b_c}{a_c} \nu_3 + \omega_3 \right) a_c^2 + \left( \frac{a_c}{b_c} \nu_3 + \omega_3 \right) b_c^2 \right] \vec{f}_3.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

En posant maintenant

$$D_1 = \frac{2M_c}{5} b_c c_c = \sqrt{(A_c - B_c + C_c)(A_c + B_c - C_c)}, \tag{4.14}$$

$$D_2 = \frac{2M_c}{5} a_c c_c = \sqrt{(-A_c + B_c + C_c)(A_c + B_c - C_c)}, \tag{4.15}$$

$$D_3 = \frac{2M_c}{5} a_c b_c = \sqrt{(-A_c + B_c + C_c)(A_c - B_c + C_c)}, \tag{4.16}$$

nous pouvons écrire le moment cinétique du noyau sous une forme plus compacte :

$$\vec{N}'_c = (A_c \omega_1 + D_1 \nu_1) \vec{f}_1 + (B_c \omega_2 + D_2 \nu_2) \vec{f}_2 + (C_c \omega_3 + D_3 \nu_3) \vec{f}_3. \tag{4.17}$$

Comme le moment cinétique du manteau s'écrit

$$\vec{N}_m = A_m \omega_1 \vec{f}_1 + B_m \omega_2 \vec{f}_2 + C_m \omega_3 \vec{f}_3, \tag{4.18}$$

le moment cinétique total du satellite est

$$\vec{N} = (A \omega_1 + D_1 \nu_1) \vec{f}_1 + (B \omega_2 + D_2 \nu_2) \vec{f}_2 + (C \omega_3 + D_3 \nu_3) \vec{f}_3. \tag{4.19}$$

L'énergie cinétique du noyau est

$$T_c = \iiint_{\text{noyau}} \rho_c v^2 dx_1 dx_2 dx_3, \tag{4.20}$$

c'est-à-dire

$$T_c = \frac{1}{2} \left( A_c (\omega_1^2 + \nu_1^2) + B_c (\omega_2^2 + \nu_2^2) + C_c (\omega_3^2 + \nu_3^2) + 2D_1 \omega_1 \nu_1 + 2D_2 \omega_2 \nu_2 + 2D_3 \omega_3 \nu_3 \right), \tag{4.21}$$

alors que l'énergie cinétique du manteau  $T_m$  est

$$T_m = \frac{1}{2} \vec{N}_m \cdot \vec{\omega} = \frac{A_m \omega_1^2 + B_m \omega_2^2 + C_m \omega_3^2}{2}. \tag{4.22}$$

Nous pouvons ainsi déduire facilement l'énergie cinétique totale du satellite  $T = T_m + T_c$

$$T = \frac{1}{2} \left( A \omega_1^2 + B \omega_2^2 + C \omega_3^2 + A_c \nu_1^2 + B_c \nu_2^2 + C_c \nu_3^2 + 2D_1 \omega_1 \nu_1 + 2D_2 \omega_2 \nu_2 + 2D_3 \omega_3 \nu_3 \right). \tag{4.23}$$

Afin d'appréhender le formalisme Hamiltonien, nous pouvons écrire les dérivées partielles de l'énergie cinétique totale  $T$  :

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_1} = A\omega_1 + D_1\nu_1 = N_1, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_2} = B\omega_2 + D_2\nu_2 = N_2, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_3} = C\omega_3 + D_3\nu_3 = N_3, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu_1} = D_1\omega_1 + A_c\nu_1 = N_1^c, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu_2} = D_2\omega_2 + B_c\nu_2 = N_2^c, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu_3} = D_3\omega_3 + C_c\nu_3 = N_3^c, \quad (4.29)$$

où les  $N_i$  sont les composantes du moment cinétique total  $\vec{N}$ . Les  $N_i^c$  sont proches des composantes du moment cinétique du noyau, on a en fait :

$$N_1 - N_1^c = (A_c - D_1)(\omega_1 - \nu_1) = \frac{M_c}{5}(c_c - b_c)^2(\omega_1 - \nu_1), \quad (4.30)$$

$$N_2 - N_2^c = (B_c - D_2)(\omega_2 - \nu_2) = \frac{M_c}{5}(c_c - a_c)^2(\omega_2 - \nu_2), \quad (4.31)$$

$$N_3 - N_3^c = (C_c - D_3)(\omega_3 - \nu_3) = \frac{M_c}{5}(a_c - b_c)^2(\omega_3 - \nu_3), \quad (4.32)$$

la différence est donc d'ordre 2 en l'asphéricité de la cavité. Appelons moment cinétique du pseudo-noyau la quantité  $\vec{N}^c = N_1^c\vec{e}_1 + N_2^c\vec{e}_2 + N_3^c\vec{e}_3$ .

Avec ces notations, les équations de Poincaré-Hough s'écrivent, en l'absence de forçage externe (Touma & Wisdom, 2001) :

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{N} \times \vec{\nabla}_{\vec{N}}\mathcal{T}, \quad (4.33)$$

$$\frac{d\vec{N}^c}{dt} = \vec{N}^c \times \vec{\nabla}_{-\vec{N}^c}\mathcal{T}, \quad (4.34)$$

avec

$$\vec{\nabla}_{\vec{N}}\mathcal{T} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial N_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial N_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial N_3}\vec{e}_3, \quad (4.35)$$

$$\vec{\nabla}_{-\vec{N}^c}\mathcal{T} = -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial N_1^c}\vec{e}_1 - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial N_2^c}\vec{e}_2 - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial N_3^c}\vec{e}_3. \quad (4.36)$$

Ici  $\mathcal{T}$  désigne l'énergie cinétique du satellite exprimée dans les composantes des moments cinétiques  $\vec{N}$  et  $\vec{N}^c$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2\alpha} \left( A_c N_1^2 + A(N_1^c)^2 - 2D_1 N_1 N_1^c \right) + \frac{1}{2\beta} \left( B_c N_2^2 + B(N_2^c)^2 - 2D_2 N_2 N_2^c \right) \\ &+ \frac{1}{2\gamma} \left( C_c N_3^2 + C(N_3^c)^2 - 2D_3 N_3 N_3^c \right), \end{aligned} \quad (4.37)$$

avec  $\alpha = AA_c - D_1^2$ ,  $\beta = BB_c - D_2^2$  et  $\gamma = CC_c - D_3^2$ .

### 4.2.3 Le Hamiltonien du système

Il est à ce stade commode d'introduire les paramètres d'asphéricité du satellite et du noyau :

$$\epsilon_1 = \frac{2C - A - B}{2C} = J_2 \frac{MR^2}{C}, \quad (4.38)$$

$$\epsilon_2 = \frac{B - A}{2C} = 2C_{22} \frac{MR^2}{C}, \quad (4.39)$$

$$\epsilon_3 = \frac{2C_c - A_c - B_c}{2C_c}, \quad (4.40)$$

$$\epsilon_4 = \frac{B_c - A_c}{2C_c}. \quad (4.41)$$

La surface du satellite et l'interface noyau-manteau étant en général proches de la sphère, les  $\epsilon_i$  sont petits.

### Le Hamiltonien de libre rotation

Introduisons maintenant 2 jeux d'éléments d'Andoyer (Andoyer, 1926)  $(l, g, h, L, G, H)$  pour le satellite, et  $(l_c, g_c, h_c, L_c, G_c, H_c)$  pour le pseudo-noyau. Les angles d'Euler  $l, g, h, l_c, g_c, h_c$  ont déjà été définis. On a de plus, de la même façon que dans le chapitre 2 :  $G = N$ ,  $G^c = N^c$  (les normes des 2 moments cinétiques),  $H = G \cos K$ ,  $H_c = G_c \cos K_c$ ,  $L = G \cos J$ ,  $L_c = G_c \cos J_c$ , où  $K$  et  $K^c$  sont les obliquités mesurées par rapport au vecteur inertiel  $\vec{e}_3$ , et  $J$  et  $J_c$  sont les amplitudes des mouvements polaires. Les composantes des moments cinétiques s'écrivent :

$$\begin{aligned} N_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, & N_1^c &= \sqrt{G_c^2 - L_c^2} \sin l_c, \\ N_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, & N_2^c &= \sqrt{G_c^2 - L_c^2} \cos l_c, \\ N_3 &= L, & N_3^c &= L_c. \end{aligned}$$

Le Hamiltonien de libre rotation  $\mathcal{H}_0$  de notre satellite est son énergie cinétique écrite dans un jeu de variables canoniques. Nous avons, dans les variables d'Andoyer, et après linéarisation par rapport aux paramètres de forme  $\epsilon_i$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2C(1-\delta)} \left( G^2 + \frac{G_c^2}{\delta} + 2\sqrt{(G^2 - L^2)(G_c^2 - L_c^2)} \cos(l - l_c) + 2LL_c \right) \\
&+ \frac{\epsilon_1}{2C(1-\delta)^2} \left( G^2 - L^2 + G_c^2 - L_c^2 + 2\sqrt{(G^2 - L^2)(G_c^2 - L_c^2)} \cos(l - l_c) \right) \\
&- \frac{\epsilon_2}{2C(1-\delta)^2} \left( (G^2 - L^2) \cos(2l) + (G_c^2 - L_c^2) \cos(2l_c) + 2\sqrt{(G^2 - L^2)(G_c^2 - L_c^2)} \cos(l + l_c) \right) \\
&- \frac{\epsilon_3}{2C(1-\delta)^2} \left( \delta(G^2 - L^2) + (G_c^2 - L_c^2)(2 - \frac{1}{\delta}) + 2\delta\sqrt{(G^2 - L^2)(G_c^2 - L_c^2)} \cos(l - l_c) \right) \\
&+ \frac{\epsilon_4}{2C(1-\delta)^2} \times \\
&\quad \left( \delta(G^2 - L^2) \cos(2l) + (G_c^2 - L_c^2)(2 - \frac{1}{\delta}) \cos(2l_c) + 2\delta\sqrt{(G^2 - L^2)(G_c^2 - L_c^2)} \cos(l + l_c) \right), \tag{4.42}
\end{aligned}$$

avec  $\delta = C_c/C$ . Ce paramètre peut être vu comme l'inertie relative du noyau.

Nous introduisons maintenant le changement de variables canoniques suivant, de multiplicité  $1/(nC)$ , proche de celui que nous utilisons pour la rotation rigide (Eq.2.9) :

$$\begin{aligned}
p &= l + g + h, & P &= \frac{G}{nC}, \\
r &= -h, & R &= P(1 - \cos K), \\
\xi_1 &= -\sqrt{2P(1 - \cos J)} \sin l, & \eta_1 &= \sqrt{2P(1 - \cos J)} \cos l, \\
p_c &= -l_c + g_c + h_c, & P_c &= \frac{G_c}{nC}, \\
r_c &= -h_c, & R_c &= P_c(1 - \cos K_c), \\
\xi_2 &= \sqrt{2P_c(1 + \cos J_c)} \sin l_c, & \eta_2 &= \sqrt{2P_c(1 + \cos J_c)} \cos l_c.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Ce changement de variables a l'avantage de ne pas présenter de singularités pour de petites obliquités et de petits mouvements polaires. Comme le précédent, c'est un jeu de variables à 6 degrés de liberté, alors que notre système n'en contient que 4. Cette écriture permet une uniformisation de traitement entre le noyau et le manteau, mais les 2 degrés inutiles ( $p_c/P_c$  et  $r_c/R_c$ ) seront bien identifiés et supprimés dans le Hamiltonien final.

Afin d'être cohérent avec le signe moins dans les équations (4.33)-(4.34) et devant  $l_c$ ,  $J_c$  doit être remplacé par  $\pi - J_c$ . Les composantes des moments cinétiques s'écrivent donc maintenant

$$\begin{aligned}
N_1 &= -nC \sqrt{P^2 - \left(P - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{2}\right)^2} \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2}, & N_1^c &= nC \sqrt{P_c^2 - \left(\frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2} - P_c\right)^2} \frac{\xi_2}{\xi_2^2 + \eta_2^2}, \\
N_2 &= nC \sqrt{P^2 - \left(P - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{2}\right)^2} \frac{\eta_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2}, & N_2^c &= nC \sqrt{P_c^2 - \left(\frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2} - P_c\right)^2} \frac{\eta_2}{\xi_2^2 + \eta_2^2}, \\
N_3 &= nC \left(P - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{2}\right), & N_3^c &= nC \left(\frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2} - P_c\right),
\end{aligned}$$

et le Hamiltonien de libre rotation, devenu  $\mathcal{H}_1$ , est, après division par  $nC$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 = & \frac{n}{2(1-\delta)} \left( P^2 + \frac{P_c^2}{\delta} + 2\sqrt{\left(P - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4}\right) \left(P_c - \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{4}\right)} (\eta_1\eta_2 - \xi_1\xi_2) \right. \\
& \left. + 2\left(P - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{2}\right) \left(\frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2} - P_c\right) \right) \\
& + \frac{n\epsilon_1}{2(1-\delta)^2} \left( P_c^2 - \left(\frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2} - P_c\right)^2 + P^2 - \left(P - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{2}\right)^2 \right. \\
& \left. + 2\sqrt{\left(P - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4}\right) \left(P_c - \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{4}\right)} (\eta_1\eta_2 - \xi_1\xi_2) \right) \\
& + \frac{n\epsilon_2}{2(1-\delta)^2} \left( \frac{1}{4}(4P - \xi_1^2 - \eta_1^2)(\xi_1^2 - \eta_1^2) + \frac{1}{4}(4P_c - \xi_2^2 - \eta_2^2)(\xi_2^2 - \eta_2^2) \right. \\
& \left. - 2\sqrt{\left(P - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4}\right) \left(P_c - \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{4}\right)} (\eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2) \right) \\
& - \frac{n\epsilon_3}{2(1-\delta)^2} \left( \delta \left(P^2 - \left(P - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{2}\right)^2\right) + \left(P_c^2 - \left(\frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2} - P_c\right)^2\right) \left(2 - \frac{1}{\delta}\right) \right. \\
& \left. + 2\delta\sqrt{\left(P - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4}\right) \left(P_c - \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{4}\right)} (\eta_1\eta_2 - \xi_1\xi_2) \right) \\
& + \frac{n\epsilon_4}{2(1-\delta)^2} \left( \frac{\delta}{4}(4P - \xi_1^2 - \eta_1^2)(\eta_1^2 - \xi_1^2) + \left(2 - \frac{1}{\delta}\right) \frac{1}{4}(4P_c - \xi_2^2 - \eta_2^2)(\eta_2^2 - \xi_2^2) \right. \\
& \left. + 2\delta\sqrt{\left(P - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4}\right) \left(P_c - \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{4}\right)} (\eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2) \right). \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Afin d'obtenir une formule plus lisible, on peut développer ce Hamiltonien à l'ordre 2 en  $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 \approx & \frac{n}{2(1-\delta)} \left( P^2 + \frac{P_c^2}{\delta} + 2\sqrt{PP_c} (\eta_1\eta_2 - \xi_1\xi_2) + 2 \left( P \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2} + P_c \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{2} - PP_c \right) \right) \\
& + \frac{n\epsilon_1}{2(1-\delta)^2} \left( P (\xi_1^2 + \eta_1^2) + P_c (\xi_2^2 + \eta_2^2) + 2\sqrt{PP_c} (\eta_1\eta_2 - \xi_1\xi_2) \right) \\
& + \frac{n\epsilon_2}{2(1-\delta)^2} \left( P (\xi_1^2 - \eta_1^2) + P_c (\xi_2^2 - \eta_2^2) - 2\sqrt{PP_c} (\eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2) \right) \tag{4.45} \\
& - \frac{n\epsilon_3}{2(1-\delta)^2} \left( \delta P (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \left(2 - \frac{1}{\delta}\right) P_c (\xi_2^2 + \eta_2^2) + 2\delta\sqrt{PP_c} (\eta_1\eta_2 - \xi_1\xi_2) \right) \\
& + \frac{n\epsilon_4}{2(1-\delta)^2} \left( \delta P (\eta_1^2 - \xi_1^2) + \left(2 - \frac{1}{\delta}\right) P_c (\eta_2^2 - \xi_2^2) + 2\delta\sqrt{PP_c} (\eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_2) \right).
\end{aligned}$$

Il s'agit en fait d'un développement à l'ordre 3, le terme de degré 3 étant nul.

Nous avons maintenant le Hamiltonien de libre rotation, il nous faut exprimer le potentiel gravitationnel de la planète parente.

### Le potentiel gravitationnel du perturbateur

Le perturbateur est la planète parente du satellite (Jupiter pour Io), qui lui applique un couple gravitationnel. Sans surprise, il s'agit du même couple que dans le cas rigide (Eq.2.32). Le potentiel perturbateur s'écrit donc, avec nos notations :

$$V(l, g, h, J, K, t) = -\frac{3}{2}C \frac{\mathcal{G}M_p}{r^3} \left( \epsilon_1 \left( \hat{x}_S^2 + \hat{y}_S^2 \right) + \epsilon_2 \left( \hat{x}_S^2 - \hat{y}_S^2 \right) \right), \quad (4.46)$$

où, comme précédemment,  $(\hat{x}_S, \hat{y}_S, \hat{z}_S)$  sont les coordonnées du vecteur unitaire pointant vers le perturbateur, dans le repère lié aux axes principaux d'inertie du satellite  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ . On en déduit la forme Hamiltonienne, impliquant l'utilisation des variables canoniques et la division par  $nC$  :

$$\mathcal{H}_2(p, P, r, R, \xi_1, \eta_1, t) = -\frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}M_p}{nr^3} \left( \epsilon_1 \left( \hat{x}_S^2 + \hat{y}_S^2 \right) + \epsilon_2 \left( \hat{x}_S^2 - \hat{y}_S^2 \right) \right). \quad (4.47)$$

On en déduit le Hamiltonien total du système  $\mathcal{H}$  à l'aide des formules (4.44) et (4.47) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(-, P_c, -, -, \xi_2, \eta_2, p, P, r, R, \xi_1, \eta_1, t) &= \mathcal{H}_1(-, P_c, -, -, \xi_2, \eta_2, -, P, -, -, \xi_1, \eta_1, -) \\ &+ \mathcal{H}_2(-, -, -, -, -, -, p, P, r, R, \xi_1, \eta_1, t). \end{aligned} \quad (4.48)$$

#### 4.2.4 Seulement 4 degrés de liberté

Notre satellite est composé de 2 couches, un manteau rigide et un noyau fluide, il y a donc a priori 6 degrés de liberté, à savoir 3 pour orienter le manteau et 3 pour orienter le noyau. Par abus de langage, je passe ici sous silence la dépendance en temps, présente dans la position du perturbateur.

Le jeu de variables lié à l'obliquité du champ de vitesses dans le fluide,  $(r_c, R_c)$  n'est pas présent dans le Hamiltonien du problème, on peut donc l'exclure comme degré de liberté. La raison est que la contrainte que la surface du satellite et l'interface noyau-manteau soient coaxiaux donne une liaison entre les obliquités de chacune des 2 couches et leurs mouvements polaires. Ils représentent donc, à eux 4, 3 degrés de liberté indépendants.

La norme du moment cinétique normalisé du noyau,  $P_c$ , apparaît, mais pas la variable associée  $p_c$ .  $P_c$  est donc une constante. Nous poserons

$$P_c = \delta = C_c/C, \quad (4.49)$$

ce qui signifie que la vitesse angulaire du fluide est en moyenne celle du manteau. Cela signifie physiquement que le fluide, visqueux, répond aux sollicitations lentes mais pas aux rapides, comme les librations diurnales. Nous verrons plus tard que cette hypothèse est à la base de l'expérience de Peale (Peale, 1976), visant à détecter la présence d'un noyau fluide pour Mercure. Les récentes observations de la rotation de Mercure (Margot et al., 2007, 2012) tendent à confirmer la validité de cette expérience, donc de l'hypothèse de base.

#### 4.2.5 Retrouver les quantités physiques (Noyelles et al., 2010)

Je donne ici un formulaire permettant de retrouver les quantités de rotation ayant un sens physique à partir des variables canoniques. Il est extrait d'un article sur Mercure, en résonance

spin-orbite 3 :2. Ces formules n'utilisant pas la résonance 3 : 2, elles s'appliquent également aux corps en rotation synchrone.

Les équations (4.24) à (4.29) donnent :

$$\omega_1 = \frac{D_1 N_1^c + A_c N_1}{D_1^2 - A A_c}, \quad (4.50)$$

$$\omega_2 = \frac{D_2 N_2^c + B_c N_2}{D_2^2 - B B_c}, \quad (4.51)$$

$$\omega_3 = \frac{D_3 N_3^c + C_c N_3}{D_3^2 - C C_c}, \quad (4.52)$$

$$\nu_1 = \frac{D_1 N_1 + A N_1^c}{D_1^2 - A A_c}, \quad (4.53)$$

$$\nu_2 = \frac{D_2 N_2 + B N_2^c}{D_2^2 - B B_c}, \quad (4.54)$$

$$\nu_3 = \frac{D_3 N_3 + C N_3^c}{D_3^2 - C C_c}, \quad (4.55)$$

ce qui permet d'écrire

$$\vec{N}_m = A_m \frac{D_1 N_1^c - A_c N_1}{D_1^2 - A A_c} \vec{f}_1 + B_m \frac{D_2 N_2^c - B_c N_2}{D_2^2 - B B_c} \vec{f}_2 + C_m \frac{D_3 N_3^c - C_c N_3}{D_3^2 - C C_c} \vec{f}_3, \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \vec{N}'_c &= \left( A_c \frac{D_1 N_1^c - A_c N_1}{D_1^2 - A A_c} + D_1 \frac{D_1 N_1 + A N_1^c}{D_1^2 - A A_c} \right) \vec{f}_1 + \left( B_c \frac{D_2 N_2^c - B_c N_2}{D_2^2 - B B_c} + D_2 \frac{D_2 N_2 + B N_2^c}{D_2^2 - B B_c} \right) \vec{f}_2 \\ &+ \left( C_c \frac{D_3 N_3^c - C_c N_3}{D_3^2 - C C_c} + D_3 \frac{D_3 N_3 + C N_3^c}{D_3^2 - C C_c} \right) \vec{f}_3. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Par définition de la norme du moment cinétique  $G$ , de l'amplitude du mouvement polaire  $J$  et de l'angle de précession  $l$ , on a

$$\vec{N}_m = G_m \sin J_m \sin l_m \vec{f}_1 + G_m \sin J_m \cos l_m \vec{f}_2 + G_m \cos J_m \vec{f}_3, \quad (4.58)$$

$$\vec{N}'_c = G'_c \sin J'_c \sin l'_c \vec{f}_1 + G'_c \sin J'_c \cos l'_c \vec{f}_2 + G'_c \cos J'_c \vec{f}_3, \quad (4.59)$$

ce qui donne les variables  $G_m$ ,  $J_m$ ,  $l_m$ ,  $G'_c$ ,  $J'_c$  et  $l'_c$  par identification.

La détermination des angles d'Euler liés à l'obliquité et au spin du manteau  $h_m$ ,  $K_m$  et  $g_m$  est un peu plus technique, elle nécessite de considérer les rotations entre les différents repères. En posant

$$\vec{N}_m = T_1 \vec{e}_1 + T_2 \vec{e}_2 + T_3 \vec{e}_3, \quad (4.60)$$

$$\vec{N}'_c = T_1{}^c \vec{e}_1 + T_2{}^c \vec{e}_2 + T_3{}^c \vec{e}_3, \quad (4.61)$$

on a

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = R_3(h_m)R_1(K_m)R_3(g_m) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G^m \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

ce qui donne :

$$T_1 = G^m \sin(K_m) \sin(h_m), \quad (4.63)$$

$$T_2 = -G^m \sin(K_m) \cos(h_m), \quad (4.64)$$

$$T_3 = G^m \cos(K_m). \quad (4.65)$$

On a de plus :

$$\begin{pmatrix} T_1^{lc} \\ T_2^{lc} \\ T_3^{lc} \end{pmatrix} = R_3(h)R_1(K)R_3(g)R_1(J)R_3(l) \begin{pmatrix} N_1^{lc} \\ N_2^{lc} \\ N_3^{lc} \end{pmatrix}, \quad (4.66)$$

ce qui permet d'obtenir, en se rappelant que  $\vec{N} = \vec{N}_m + \vec{N}_c$  :

$$G^m \sin(K_m) \sin(h_m) = G \sin(K) \sin(h) - T_1^{lc}, \quad (4.67)$$

$$G^m \sin(K_m) \cos(h_m) = G \sin(K) \cos(h) + T_2^{lc}, \quad (4.68)$$

$$G^m \cos(K_m) = G \cos(K) - T_3^{lc}, \quad (4.69)$$

et finalement

$$K_m = \arccos\left(\frac{G \cos(K) - T_3^{lc}}{G^m}\right), \quad (4.70)$$

$$h_m = \arctan\left(\frac{G \sin(K) \sin(h) - T_1^{lc}}{G \sin(K) \cos(h) + T_2^{lc}}\right). \quad (4.71)$$

### 4.3 Comportement d'un satellite naturel

Dans cette section je présente le comportement attendu d'un satellite en rotation synchrone assujetti au modèle de Poincaré-Hough. Il s'agit d'une étude numérique que j'ai réalisée (Noyelles, 2012) à la suite d'un travail analytique de Jacques Henrard (Henrard, 2008). Il s'agissait, à ma connaissance, de la première application du modèle de Poincaré-Hough en formulation hamiltonienne à un corps en résonance spin-orbite.

#### 4.3.1 Étude analytique (Henrard, 2008)

Jacques voulait simuler la rotation d'Io à l'aide d'une méthode de perturbations et d'éphémérides sous une forme synthétique, c'est-à-dire quasi-périodique, avec des amplitudes numériques et des angles analytiques, dépendant explicitement des modes propres du système orbital. Il utilisait directement des coordonnées cartésiennes, calculées par Valéry Lainey à partir des éléments orbitaux de sa théorie L1.2 (Lainey et al., 2006).

Cette étude mettait en lumière le fait que le système était à 4 degrés de liberté, et montrait que les 2 degrés de liberté liés aux mouvements polaires, du satellite et du pseudo-noyau, étaient couplés de la même façon que le sont la longitude et l'obliquité. Par contre, 2 modifications étaient faites par rapport à ce que j'ai présenté plus haut :

- Le champ de gravité du fluide était proportionnel à celui du satellite total, ce qui donnait  $\epsilon_1 = \epsilon_3$  et  $\epsilon_2 = \epsilon_4$ . La complexification de l'intérieur fait intervenir de plus en plus de paramètres, il est donc nécessaire de simplifier les choses. Une autre possibilité d'introduire une liaison entre les paramètres d'intérieur est de faire l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique.
- Jacques considérait que le couple du perturbateur ne s'appliquait que sur le manteau. C'est malheureusement une erreur<sup>1</sup>, qui a pour conséquence que la fréquence des librations en longitude, ainsi que l'amplitude des librations diurnes, ne semblent pas être affectées par le noyau.

J. Henrard est décédé en mars 2008 pendant le processus de *reviewing* de son article, et ne l'a pas vu paraître.

### 4.3.2 Étude numérique (Noyelles, 2012)

J'ai pour ma part réalisé une étude numérique du comportement d'un tel satellite. J'ai considéré un satellite fictif, largement inspiré d'Io (Tab. 4.1). Son orbite est une ellipse à excentricité modérée, uniformément précessante sur un plan lui-même précessant uniformément. Son demi-grand axe  $a$ , son excentricité  $e$  et son inclinaison par rapport à l'équateur de la planète à J2000  $I$  sont constantes. On n'a donc pas, dans ce cas fictif, les perturbations gravitationnelles des autres satellites de la planète parente.

L'idée était d'essayer de comprendre dans quelle mesure les paramètres d'intérieur  $\delta$ ,  $\epsilon_3$  et  $\epsilon_4$  influent sur la rotation, avec en arrière-pensée l'idée d'étudier la faisabilité de la détermination de paramètres d'intérieur à partir d'observations de la rotation. J'ai bien trouvé qu'un état de type Cassini 1, c'est-à-dire ressemblant fortement à l'État de Cassini 1 tel qu'il a été défini pour les corps rigides, était stable pour la plupart des modèles d'Io acceptables, avec une rotation synchrone, une obliquité modérée, et un mouvement polaire de faible amplitude, correspondant à une oscillation de l'axe de figure  $\vec{f}_3$  autour de la direction du moment cinétique  $\vec{N}_m$ .

Techniquement, l'étude était essentiellement numérique. Elle consistait, comme d'autres études précédentes, en des simulations numériques de la rotation au voisinage de l'équilibre attendu, pour différents modèles d'intérieur, en fait différents noyaux fluides dans notre cas.

Une bonne façon d'appréhender l'influence des paramètres d'intérieur sur le comportement du système est d'étudier l'évolution des fréquences propres de la dynamique de rotation  $\omega_u$ ,  $\omega_v$ ,  $\omega_w$  et  $\omega_z$ . Je présenterai ensuite un cas nécessitant une révision de la théorie des États de Cassini, où l'axe de figure peut être significativement incliné par rapport au moment cinétique.

### Influence des paramètres d'intérieur

Je me place ici dans les conditions où l'état de type Cassini 1 existe. Ces conditions sont assez générales, car elles supposent que l'aplatissement polaire du noyau n'est pas d'un ordre de grandeur supérieur à celui du satellite. Pour  $\delta = C_c/C = 0.5$ , la limite se situe vers  $\epsilon_3 \approx \epsilon_1$ .

---

1. initialement relevée par Rose-Marie Baland, alors qu'elle commençait sa thèse de doctorat à l'Observatoire Royal de Belgique

TABLE 4.1 – Paramètres physiques et dynamiques de mon pseudo-Io. Le moyen mouvement moyen  $n$  ainsi que les vitesses de précession du nœud  $\dot{\Omega}$  et du péricentre  $\dot{\varpi}$  sont issus des éphémérides L1.2 (Lainey et al., 2006). Les phases, c'est-à-dire les valeurs initiales des angles, sont choisies arbitrairement. Ces quantités étant précessantes et non résonnantes entre elles, les phases initiales ne sont pas critiques.

Paramètres	Valeurs
$\mathcal{G}M_p$ (planète)	$1.26712765 \times 10^8 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
$\mathcal{G}M$ (satellite)	$5955.5 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
$R_p$	71492 km
$J_{2p}$	$1.4736 \times 10^{-2}$
$J_2$	$1.828 \times 10^{-3}$
$C_{22}$	$5.537 \times 10^{-4}$
$C/(MR^2)$	0.376856
$a$	422029.958 km
$e$	$4.15 \times 10^{-3}$
$I$	2.16 arcmin
$n$	1297.2044725279755 rad/an
$\dot{\varpi}$	0.97311853791375 rad/an
$\dot{\Omega}$	-0.8455888497945 rad/an
$\lambda_o(0)$	0
$\varpi_o(0)$	2 rad
$\Omega_o(0)$	0.1 rad
$\epsilon_1 = J_2 \frac{MR^2}{C}$	$4.85066 \times 10^{-3}$
$\epsilon_2 = 2C_{22} \frac{MR^2}{C}$	$2.93852 \times 10^{-3}$

Je présente les dépendances des périodes propres du système  $T_{u,v,w,z} = 2\pi/\omega_{u,v,w,z}$  en les paramètres d'intérieur  $\delta$  (Tab.4.2),  $\epsilon_3$  (Tab.4.3) et  $\epsilon_4$  (Tab.4.4).  $T_u$  est *plus ou moins* la fréquence des oscillations libres en longitude,  $T_v$  est *plus ou moins* celle des oscillations de l'obliquité,  $T_w$  est *plus ou moins* celle des oscillations du mouvement polaire du satellite, et  $T_z$  *plus ou moins* celle des oscillations de l'orientation du champ de vitesses dans le fluide. Je tiens beaucoup à nuancer cette interprétation physique, car en réalité tous ces degrés de liberté sont couplés entre eux, même si le couplage peut être négligeable en pratique. La simulation d'une variable de rotation quelconque peut en théorie faire intervenir les 4 fréquences  $\omega_{u,v,w,z}$ . La prise en compte de ce couplage entre les différents degrés de liberté de la dynamique de rotation constitue l'une des originalités de mes travaux par rapport à ce qui se fait ailleurs. Mon expérience m'indique que les études qui regardent le mouvement en longitude indépendamment des autres mouvements sont en général très précises, et que celles qui ne regardent que l'obliquité donnent de bons résultats.

Je montre également la valeur d'équilibre  $R^*$  de la variable  $R = P(1 - \cos K)$ . Cette valeur est donc liée à l'obliquité d'équilibre. Les quantités obtenues ont été identifiées par analyse en fréquences dans les solutions numériques.

La taille du noyau influe essentiellement sur la période  $T_u$ , ce qui résulte en une conséquence prépondérante sur l'amplitude des oscillations diurnes. Plus le noyau est grand, plus la période de ces oscillations est courte, et plus l'amplitude des oscillations diurnes sera importante. Pour mémoire,  $T_u = 13.25$  jours (Henrard, 2005) lorsque Io est rigide ( $\delta = 0$ ). L'influence sur les autres

TABLE 4.2 – Influence de la taille du noyau  $\delta = C_c/C$ , avec  $\epsilon_3 = \epsilon_1$  et  $\epsilon_4 = \epsilon_2$ .

$\delta$	$T_u$ (j)	$T_v$ (j)	$T_w$ (j)	$T_z$ (j)	$R^*$
0.1	12.650	453.259	208.551	1.745	$2.304 \times 10^{-7}$
0.2	11.926	480.369	185.790	1.741	$2.365 \times 10^{-7}$
0.3	11.156	504.669	163.028	1.736	$2.450 \times 10^{-7}$
0.4	10.328	526.965	140.264	1.729	$2.525 \times 10^{-7}$
0.5	9.428	547.734	117.496	1.720	$2.597 \times 10^{-7}$
0.6	8.433	567.278	94.723	1.706	$2.680 \times 10^{-7}$
0.7	7.303	585.780	71.939	1.685	$2.760 \times 10^{-7}$
0.8	5.963	603.294	49.130	1.645	$2.842 \times 10^{-7}$
0.9	4.216	619.394	26.230	1.540	$2.922 \times 10^{-7}$

degrés de liberté est plus modérée.

TABLE 4.3 – Influence de l'aplatissement polaire du noyau  $\epsilon_3$ , avec  $\delta = 0.5$  et  $\epsilon_4 = \epsilon_2$ .

$\epsilon_3/\epsilon_1$	$T_u$ (j)	$T_v$ (j)	$T_w$ (j)	$T_z$ (j)	$R^*$
0.2	9.428	6414.819	117.118	1.728	$1.040 \times 10^{-6}$
0.3	9.428	2491.673	117.112	1.727	$4.612 \times 10^{-7}$
0.4	9.428	1572.784	117.121	1.726	$3.592 \times 10^{-7}$
0.5	9.428	1163.452	117.147	1.725	$3.177 \times 10^{-7}$
1	9.428	547.734	117.496	1.720	$2.597 \times 10^{-7}$
3	9.428	254.876	122.879	1.695	$2.326 \times 10^{-7}$
5	9.428	210.742	136.657	1.668	$2.277 \times 10^{-7}$
6	9.428	200.875	148.926	1.655	$2.268 \times 10^{-7}$
7	9.428	194.454	168.492	1.641	$2.260 \times 10^{-7}$
8	9.428	189.284	201.639	1.628	$2.256 \times 10^{-7}$
9	9.428	185.621	278.943	1.616	$2.251 \times 10^{-7}$

L'aplatissement polaire du noyau  $\epsilon_3$  semble avoir surtout une influence sur l'obliquité, comme le suggèrent les colonnes  $T_v$  et  $R^*$ . En particulier, l'obliquité semble plus importante lorsque le noyau a une section méridienne proche du cercle. Il faut garder à l'esprit que j'ai imposé au champ de gravité de mon pseudo-Io de conserver les valeurs mesurées par Galileo, tout en faisant varier la forme de son noyau. Un Io réaliste qui aurait un noyau sphérique aurait probablement un autre champ de gravité, donc ce résultat doit être plus considéré comme un comportement mathématique du système dynamique régi par le Hamiltonien (4.48) que comme un résultat planétologique. L'actuel manque de données sur l'intérieur et la rotation des satellites naturels n'exclut pas de bonnes surprises pour le futur.

L'ellipticité équatoriale du noyau  $\epsilon_4$  semble, elle, avoir une influence très limitée. On peut constater numériquement des variations, mais sans réelle influence.

La principale information à retenir est que les librations diurnes en longitude sont une signature de la taille du noyau, mais pas de sa forme. Ainsi, il est pratiquement équivalent, dans des études se focalisant sur le mouvement en longitude, de considérer le noyau comme sphérique. L'étude est dans ce cas plus facile car la résultante du couple de pression à l'interface noyau-manteau est nulle, on peut donc considérer le satellite comme un corps creux, en substituant dans les équations la

TABLE 4.4 – Influence de l'ellipticité équatoriale du noyau  $\epsilon_4$ , avec  $\delta = 0.5$  et  $\epsilon_3 = \epsilon_1$ .

$\epsilon_4/\epsilon_2$	$T_u$ (j)	$T_v$ (j)	$T_w$ (j)	$T_z$ (j)	$R^*$
0	9.428	545.949	117.771	1.7199	$2.5996 \times 10^{-7}$
0.1	9.428	546.128	117.718	1.7199	$2.5998 \times 10^{-7}$
0.5	9.428	546.841	117.563	1.7199	$2.5954 \times 10^{-7}$
1	9.428	547.734	117.496	1.7198	$2.5967 \times 10^{-7}$
3	9.428	551.316	118.652	1.7195	$2.6070 \times 10^{-7}$
5	9.428	554.914	122.283	1.7193	$2.6069 \times 10^{-7}$
10	9.428	564.010	149.248	1.7186	$2.6248 \times 10^{-7}$

rotation rigide le moment d'inertie polaire du manteau  $C_m = C - C_c$  à celui du satellite  $C$ . Dans ce cas, on a

$$T_u \approx \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{C_m/(MR^2)}{3C_{22}}} \propto \sqrt{1-\delta}. \quad (4.72)$$

On peut également remarquer que la période liée aux oscillations libres dans le fluide,  $T_z$ , est proche de la période orbitale 1.769 jour. J'ai longtemps pensé que cela pouvait être une source de phénomènes résonnants, mais n'y ai jamais été confronté dans les simulations. Mon sentiment est que s'il peut y avoir une situation de quasi-résonance entre  $\omega_z$  et la fréquence, elle n'ira pas plus loin que de rendre le mouvement polaire dans le noyau significatif. Ce phénomène serait difficile à observer, une piste pour cela est de mesurer le champ magnétique.

### Une bifurcation ...

La simulation numérique d'une trajectoire proche de l'équilibre dynamique doit donner, en 2 dimensions, une section de forme elliptique, traduisant des petites librations autour de cet équilibre. Pour un noyau très allongé, j'obtiens la Fig.4.3.

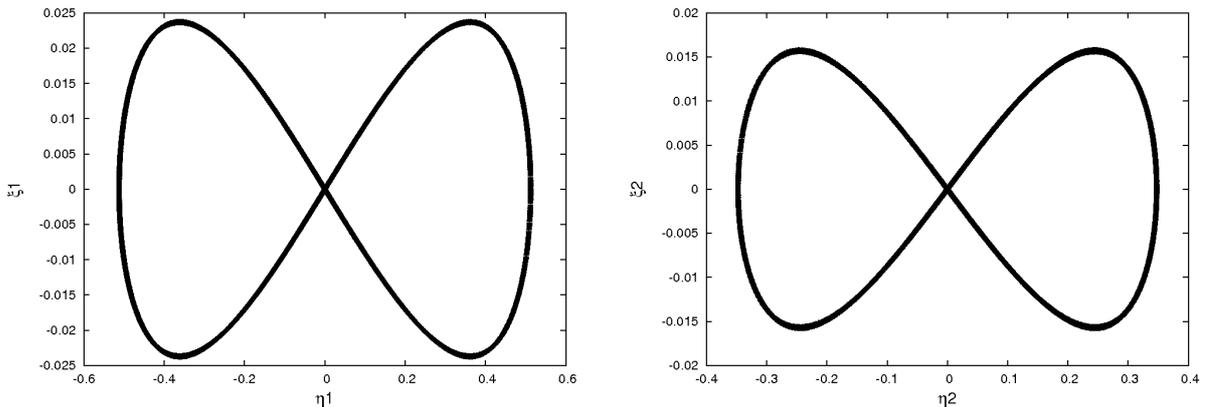


FIGURE 4.3 – Trajectoire passant proche de l'équilibre  $J = J^c = 0$  pour  $\delta = 0.5$ ,  $\epsilon_3 = 10\epsilon_1$  et  $\epsilon_4 = 0$ . La trajectoire en papillon suggère que cet équilibre est instable, mais que 2 équilibres stables sont présents dans les lobes.

Je n'ai compris cette figure que grâce à une discussion avec Nicolas Delsate. Elle suggère en fait que l'équilibre attendu au centre du repère est bien un équilibre, mais qu'il est instable. Par contre, 2 équilibres stables apparaissent, qui impliquent que pour un tel intérieur, l'axe de figure  $\vec{f}_3$  peut être en moyenne significativement désaxé par rapport au moment cinétique. Afin de comprendre et prédire ce phénomène, j'en ai réalisé une étude analytique, en partie à l'aide du logiciel Maple.

Nous partons pour cela du Hamiltonien  $\mathcal{H}$  (Eq.4.48), dans lequel les coordonnées du vecteur unitaire planète-satellite sont, dans le repère inertiel :

$$x_i = -\cos \lambda_o, \quad (4.73)$$

$$y_i = -\sin \lambda_o, \quad (4.74)$$

$$z_i = 0. \quad (4.75)$$

Ici je néglige l'excentricité  $e$ , l'inclinaison  $I$ , les précessions  $\dot{\omega}$  et  $\dot{\Omega}$ . Ceci rend invalide le calcul de l'obliquité, je néglige donc également ce degré de liberté.

Afin de faire apparaître la résonance spin-orbite, j'introduis le changement de variables canonique suivant :

$$\begin{aligned} \sigma &= p - \lambda_o + \pi, & P, \\ \xi_1, & & \eta_1, \\ \xi_2, & & \eta_2, \end{aligned} \quad (4.76)$$

où  $\sigma$  est l'argument résonnant. Ce changement de variable dépendant linéairement du temps, il nécessite d'ajouter  $-nP$  au Hamiltonien du problème.

Après moyennisation des courtes périodes pour faire disparaître  $\lambda_o$ , j'ai exprimé les équations de Hamilton :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}, & \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma}, \\ \frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_1}, & \frac{d\eta_1}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_1}, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_2}, & \frac{d\eta_2}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_2}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Je cherche à étudier la stabilité de l'équilibre défini par  $\xi_1 = \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0$ . Je pose  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  pour simplifier les équations et j'obtiens

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{d\sigma}{dt} &= -1 + \frac{P - P_c}{1 - \delta} + \frac{\eta_1^2}{2(1 - \delta)^2} (\epsilon_1 - \epsilon_2 - \delta\epsilon_3 + \delta\epsilon_4) + \frac{\eta_2^2}{2(1 - \delta)} \\ &+ \frac{\eta_1 \eta_2 (P_c - \eta_2^2/4)}{2(1 - \delta) \sqrt{PP_c - P\eta_2^2/4 - P_c\eta_1^2/4 + \eta_1^2\eta_2^2/16}} \left( 1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \delta\epsilon_3 + \delta\epsilon_4}{1 - \delta} \right), \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{\eta_1 P}{(1-\delta)^2} (\epsilon_1 - \epsilon_2 - \delta\epsilon_3 + \delta\epsilon_4) + \frac{\eta_1 P_c}{1-\delta} + \frac{\eta_1^3}{2(1-\delta)^2} (-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \delta\epsilon_3 - \delta\epsilon_4) - \frac{\eta_1 \eta_2^2}{2(1-\delta)} \\
&+ \frac{\eta_1^2 \eta_2 (\eta_2^2/4 - P_c)}{4(1-\delta) \sqrt{PP_c - P\eta_2^2/4 - P_c\eta_1^2/4 + \eta_1^2 \eta_2^2/16}} \left( 1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \delta\epsilon_3 + \delta\epsilon_4}{1-\delta} \right) \\
&+ \frac{\eta_2}{1-\delta} \sqrt{PP_c - P\eta_2^2/4 - P_c\eta_1^2/4 + \eta_1^2 \eta_2^2/16} \left( 1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \delta\epsilon_3 + \delta\epsilon_4}{1-\delta} \right),
\end{aligned} \tag{4.79}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{\eta_2 P_c}{(1-\delta)^2} \left( \epsilon_1 - \epsilon_2 + \left( \frac{1}{\delta} - 2 \right) \epsilon_3 + \left( 2 - \frac{1}{\delta} \right) \epsilon_4 \right) + \frac{\eta_2 P}{1-\delta} \\
&+ \frac{\eta_2^3}{2(1-\delta)^2} \left( -\epsilon_1 + \epsilon_2 + \left( 2 - \frac{1}{\delta} \right) \epsilon_3 + \left( \frac{1}{\delta} - 2 \right) \epsilon_4 \right) - \frac{\eta_1^2 \eta_2}{2(1-\delta)} \\
&+ \frac{\eta_1 \eta_2^2 (\eta_1^2/4 - P)}{4(1-\delta) \sqrt{PP_c - P\eta_2^2/4 - P_c\eta_1^2/4 + \eta_1^2 \eta_2^2/16}} \left( 1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \delta\epsilon_3 + \delta\epsilon_4}{1-\delta} \right) \\
&+ \frac{\eta_1}{1-\delta} \sqrt{PP_c - P\eta_2^2/4 - P_c\eta_1^2/4 + \eta_1^2 \eta_2^2/16} \left( 1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2 - \delta\epsilon_3 + \delta\epsilon_4}{1-\delta} \right).
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Pour  $\epsilon_3 = 10\epsilon_1$ ,  $\epsilon_4 = 0$  et  $\delta = 0.5$ , les racines réelles de ce système sont

- $P = 1.046772470$ ,  $\eta_1 = 1.446908787$ ,  $\eta_2 = -1.023119016$
- $P = 1.002812138$ ,  $\eta_1 = 0.2502391659$ ,  $\eta_2 = -0.1690724173$
- $P = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$
- $P = 1.002812138$ ,  $\eta_1 = -0.2502391659$ ,  $\eta_2 = 0.1690724173$
- $P = 0.3489241565$ ,  $\eta_1 = 0.8353731582$ ,  $\eta_2 = -0.5606980247$

alors qu'elles sont, pour  $\epsilon_3 = 9\epsilon_1$ ,  $\epsilon_4 = 0$  et  $\delta = 0.5$  :

- $P = 1.041484268$ ,  $\eta_1 = -1.443249317$ ,  $\eta_2 = -1.020531379$
- $P = 0.3471614224$ ,  $\eta_1 = -0.8332603709$ ,  $\eta_2 = -0.5892040580$
- $P = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$
- $P = 0.9978852209$ ,  $\eta_1 = -2.010693353$ ,  $\eta_2 = -1.421011855$ .

On remarque que dans les 2 cas, la position d'équilibre classiquement attendue, ( $P = 1$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ) est présente. Pour  $\epsilon_3 = 10\epsilon_1$ , 2 positions d'équilibre symétriques apparaissent avec  $P$  qui reste très proche de 1. Ces positions sont visibles sur la Fig.4.3.

Pour étudier la stabilité de l'équilibre classique, posons  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ,  $P = 1$  et  $P_c = \delta$  dans le Hamiltonien moyenné, ceci donne la quantité  $\mathcal{S}$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\eta_1, \eta_2) &= \alpha - 1 + \frac{1 - \delta + \eta_1^2 \delta + \eta_2^2 - \eta_1^2 \eta_2^2 / 2}{2(1 - \delta)} \\
&+ \epsilon_1 \left( -\frac{3}{2} + \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 \delta - (\eta_1^4 + \eta_2^4) / 4}{2(1 - \delta)^2} + \frac{\alpha}{1 - \delta} \right) \\
&+ \epsilon_2 \left( -\frac{3}{2} - \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 \delta - (\eta_1^4 + \eta_2^4) / 4}{2(1 - \delta)^2} - \frac{\alpha}{1 - \delta} \right) \\
&+ (\epsilon_3 - \epsilon_4) \left( \frac{-\delta \eta_1^2 + \eta_2^2 (1 - 2\delta) + \delta \eta_1^4 / 4 + \eta_2^4 / 2 (1 - 1/(2\delta))}{2(1 - \delta)^2} - \frac{\delta \alpha}{1 - \delta} \right)
\end{aligned} \tag{4.81}$$

avec

$$\alpha = \frac{\eta_1 \eta_2}{1 - \delta} \sqrt{\delta - \frac{\eta_1^2 \delta + \eta_2^2}{4} + \frac{\eta_1^2 \eta_2^2}{16}}. \tag{4.82}$$

$\mathcal{S}$  n'est pas un Hamiltonien car les variables  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont considérées comme des constantes alors que leurs moments associés  $\eta_1$  et  $\eta_2$  peuvent varier. Pour connaître la stabilité du point  $(\eta_1 = 0, \eta_2 = 0)$ , il faut étudier les dérivées secondes de  $\mathcal{S}$  en ce point. Soit la matrice hessienne

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \eta_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \eta_2^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(\delta - 1)^2} \begin{pmatrix} \epsilon_1 - \epsilon_2 + \delta(\epsilon_4 - \epsilon_3 + 1 - \delta) & \sqrt{\delta}(1 - \delta + \epsilon_1 - \epsilon_2 + \delta(\epsilon_4 - \epsilon_3)) \\ \sqrt{\delta}(1 - \delta + \epsilon_1 - \epsilon_2 + \delta(\epsilon_4 - \epsilon_3)) & 1 - \delta + \delta(\epsilon_1 - \epsilon_2 - 2\epsilon_3 + 2\epsilon_4) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.83}$$

un minimum de  $\mathcal{S}$ , correspondant à un équilibre stable, est atteint lorsque les 2 valeurs propres de  $\mathcal{M}$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , sont réelles et positives. J'ai

$$\lambda_1 = \beta + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \tag{4.84}$$

$$\lambda_2 = \beta - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \tag{4.85}$$

avec

$$\beta = \frac{1 - \delta^2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2)(1 + \delta) + (\epsilon_3 - \epsilon_4)(1 - 3\delta)}{2} \tag{4.86}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1 - \delta^2)^2 - 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)(1 - 7\delta + 7\delta^2 - \delta^3) + 2(\epsilon_3 - \epsilon_4)(1 - 3\delta - \delta^2 + 3\delta^3) \\
&+ (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2(1 + \delta)^2 + 2(\epsilon_1 \epsilon_4 + \epsilon_2 \epsilon_3 - \epsilon_1 \epsilon_3 - \epsilon_2 \epsilon_4)(1 - 2\delta + 5\delta^2) \\
&+ (\epsilon_3 - \epsilon_4)^2(1 - 2\delta + \delta^2 + 4\delta^3).
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Des évaluations numériques montrent que  $\lambda_1$  est toujours positive, et que  $\lambda_2$  l'est en général, sauf si  $\epsilon_3$  est suffisamment grand, c'est-à-dire au delà de  $\approx 9.4\epsilon_1$  pour  $\delta = 0.5$ . Le point défini par  $(\eta_1 = 0, \eta_2 = 0)$  est un point-col, et l'équilibre associé est instable.  $\lambda_2 > 0$  est donc une condition de stabilité de la position d'équilibre pressentie.

Ceci fait penser au début d'un phénomène de cascade de type Feigenbaum (Feigenbaum, 1979), où en augmentant le paramètre incriminé, ici  $\epsilon_3$ , on aurait la création successive d'équilibres stables et instables, de plus en plus nombreux. Il s'agit d'un phénomène relativement classique dans les systèmes dynamiques, un exemple récent en mécanique céleste est la stabilité de la résonance coorbitale lorsque le petit corps piégé au voisinage d'un des points de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$  a une masse supérieure à la limite de Gascheau (Sicardy, 2010). Bien entendu, ceci ne peut être affirmé sans étude préalable, or je n'ai pas exploré cette partie de l'espace des paramètres, un  $\epsilon_3$  modéré me paraissant plus réaliste...

La question de l'application planétologique de cette bifurcation se pose réellement. Si le corps est à l'équilibre hydrostatique, alors la forme de l'interface noyau-manteau dépend de la forme de la surface, de la distribution de masse au sein du satellite, et de sa fréquence orbitale, égale à sa vitesse de rotation. Dans ces conditions, il paraît difficile d'obtenir une interface noyau-manteau aussi allongée. Le modèle de formation des satellites de Saturne de Charnoz et al. (2011) autorise la formation du noyau d'éléments lourds au bord des anneaux, qui sera plus allongé car ayant une vitesse orbitale plus importante, avant enrobage de silicates. Cependant, ce noyau contiendra une graine, c'est-à-dire un noyau interne solide. Pour que notre modèle soit acceptable, il faudrait que la graine soit suffisamment petite pour que son influence puisse être négligée.

Après cette étude théorique du comportement d'un satellite assujéti au modèle de Poincaré-Hough, je l'applique dans le cas réaliste d'Io.

## 4.4 Application à Io

Le passage d'une étude purement mathématique comme celle que je viens de montrer à une application nécessite notamment de modéliser le mouvement orbital et l'intérieur de façon réaliste. Pour le mouvement orbital d'Io autour de Jupiter, j'ai utilisé les éphémérides L1.2 (Lainey et al., 2006). Les modes propres orbitaux sont les mêmes que pour Callisto, cf. Tab.3.8. Il est à noter que Io est dans une résonance de moyen mouvement 4 : 2 : 1 dite laplacienne, ou de Laplace, impliquant également Europe et Ganymède. Cette résonance, d'argument  $\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$ , a une libration d'amplitude de l'ordre du demi-degré, et de période 5.639 ans. De plus, la proximité de la résonance de moyen mouvement 2 : 1 avec Europe implique 2 oscillations significatives dans la longitude d'Io, d'amplitudes respectivement 81 et 40 km, et de périodes 463 et 483 jours.

### 4.4.1 6 modèles d'intérieur

Il faut considérer ici une modélisation réaliste de l'intérieur d'Io. Pour cela, j'ai pris comme contraintes les données observées (Tab.4.5).

D'après la littérature, nous devons considérer un noyau fluide d'éléments lourds, contenant du fer, et peut-être aussi du soufre (Anderson et al., 1996). Ce noyau a une masse volumique  $\rho_c$  comprise entre 8000 kg/m<sup>3</sup> (fer pur) et 5150 kg/m<sup>3</sup> (mélange eutectique<sup>2</sup> de fer et de soufre,

---

2. L'eutectique est la limite entre la phase liquide et la phase solide. Si le noyau contenait plus de soufre, alors il serait solide.

TABLE 4.5 – Paramètres de forme et champ de gravité d’Io.  $I$  n’a pas été mesuré indépendamment des autres paramètres, il est déduit des valeurs mesurées de  $J_2$  et  $C_{22}$  combinées avec l’hypothèse de l’équilibre hydrostatique.

Paramètre	Valeur	Source
Masse volumique moyenne $\bar{\rho}$	$3527.8 \pm 2.9 \text{ kg/m}^3$	Anderson et al. (2001b)
$J_2$	$(1.8459 \pm 0.0042) \times 10^{-3}$	Anderson et al. (2001b)
$C_{22}$	$(5.537 \pm 0.012) \times 10^{-4}$	Anderson et al. (2001b)
$I/(MR^2)$	$0.37685 \pm 0.00035$	Anderson et al. (2001b)
Rayon moyen R	1821.49 km	Archinal et al. (2011)
Rayons $a \times b \times c$	$1829.4 \times 1819.4 \times 1815.7 \text{ km}$	Archinal et al. (2011)

Usselman (1975)). Pour le manteau, Anderson et al. (2001b) ont considéré 2 possibilités : soit une croûte fine (<50 km) de faible densité (<2600 kg/m<sup>3</sup>), ou une croûte très fine (négligeable) surmontant une asthénosphère plus épaisse (de 100 à 200 km) d’une masse volumique comprise entre 3000 et 3200 kg/m<sup>3</sup>.

Afin d’intégrer ces différentes possibilités, j’ai considéré 6 modèles d’intérieur pour Io :

- *Modèle 1* : noyau de fer pur et manteau homogène,
- *Modèle 2* : noyau eutectique de fer et soufre, manteau homogène,
- *Modèle 3* : noyau de fer pur, croûte de 30 km,
- *Modèle 4* : noyau eutectique de fer et soufre, croûte de 30 km,
- *Modèle 5* : noyau de fer pur, asthénosphère de 150 km,
- *Modèle 6* : noyau eutectique de fer et soufre, asthénosphère de 150 km.

Pour cela, nous avons besoin de 8 ou 12 paramètres d’intérieur :

- $\rho_c, \rho_m, \rho_s$  : masses volumiques du noyau, du manteau, et éventuellement de la couche externe (croûte ou asthénosphère),
- $a_c \times b_c \times c_c$  : rayons de l’interface noyau-manteau,
- $a_m \times b_m \times c_m$  : rayons de l’interface manteau-couche externe, si elle existe.

Les contraintes que j’ai imposées permettent de trouver de façon unique les paramètres manquants, sans utiliser l’hypothèse de l’équilibre hydrostatique. Un autre choix possible aurait pu être d’autoriser des variations des paramètres d’intérieur, par exemple permettre à la masse volumique du noyau  $\rho_c$  de prendre n’importe quelle valeur entre les 2 extrêmes que constituent le noyau de fer pur et le mélange eutectique fer-soufre, autrement dit permettre au noyau de contenir un peu de soufre, sans atteindre la limite eutectique, d’imposer l’équilibre hydrostatique, et de conserver ensuite uniquement les modèles d’Io qui satisfont les contraintes observationnelles (Tab.4.5).

Les contraintes observationnelles donnent directement

$$A = 1.11149 \times 10^{20} \text{ kg.km}^2, \quad (4.88)$$

$$B = 1.11805 \times 10^{20} \text{ kg.km}^2, \quad (4.89)$$

$$C = 1.12024 \times 10^{20} \text{ kg.km}^2, \quad (4.90)$$

$$\epsilon_1 = 4.88230 \times 10^{-3}, \quad (4.91)$$

$$\epsilon_2 = 2.92901 \times 10^{-3}. \quad (4.92)$$

À partir des définitions de la masse et des moments d’inertie (Eq. 2.2-2.4 & 4.3-4.8) on obtient

$$R_c = \left( \frac{R^3 (\bar{\rho} - \rho_s) + R_m^3 (\rho_s - \rho_m)}{\rho_c - \rho_m} \right)^{1/3}, \quad (4.93)$$

$$\frac{I}{MR^2} = \frac{2 \rho_c R_c^5 + \rho_m (R_m^5 - R_c^5) + \rho_s (R^5 - R_m^5)}{5 \bar{\rho} R^2}, \quad (4.94)$$

$$A = \frac{4\pi}{15} \left( \rho_c a_c b_c c_c (b_c^2 + c_c^2) + \rho_m (a_m b_m c_m (b_m^2 + c_m^2) - a_c b_c c_c (b_c^2 + c_c^2)) + \rho_s (abc (b^2 + c^2) - a_m b_m c_m (b_m^2 + c_m^2)) \right), \quad (4.95)$$

$$B = \frac{4\pi}{15} \left( \rho_c a_c b_c c_c (a_c^2 + c_c^2) + \rho_m (a_m b_m c_m (a_m^2 + c_m^2) - a_c b_c c_c (a_c^2 + c_c^2)) + \rho_s (abc (a^2 + c^2) - a_m b_m c_m (a_m^2 + c_m^2)) \right), \quad (4.96)$$

$$C = \frac{4\pi}{15} \left( \rho_c a_c b_c c_c (a_c^2 + b_c^2) + \rho_m (a_m b_m c_m (a_m^2 + b_m^2) - a_c b_c c_c (a_c^2 + b_c^2)) + \rho_s (abc (a^2 + b^2) - a_m b_m c_m (a_m^2 + b_m^2)) \right), \quad (4.97)$$

ce qui permet de retrouver de façon unique les paramètres manquants, à savoir  $R_c$  (rayon moyen du noyau),  $\rho_m$ ,  $a_c$ ,  $b_c$  et  $c_c$  (Tab.4.6). Les paramètres requis par le modèle de rotation de Poincaré-Hough sont donnés dans la Tab.4.7.

TABLE 4.6 – Paramètres physiques de nos 6 modèles d'Io. 2 extrema sont considérés pour le noyau : fer pur (modèles 1, 3 & 5), et mélange eutectique de fer et soufre (modèles 2, 4, & 6).  $d_s$  est l'épaisseur constante de la croûte ou de l'asthénosphère.

Modèles	$\rho_c$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_m$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	$d_s$ (km)	$a_c$ (km)	$b_c$ (km)	$c_c$ (km)	$R_c$ (km)
1	8000	3291.465	–	0	690.411	660.545	663.908	671.904
3	8000	3377.242	2400	30	657.994	623.714	629.205	635.355
5	8000	3409.044	3100	150	650.283	614.596	620.705	628.935
2	5150	3243.815	–	0	978.846	958.372	959.124	965.144
4	5150	3337.988	2400	30	936.963	913.946	915.956	922.517
6	5150	3351.865	3100	150	936.495	913.320	915.379	921.963

TABLE 4.7 – Les paramètres du modèle de Poincaré-Hough. Pour chacun d'entre eux, on a  $\epsilon_1 = 4.88230 \times 10^{-3}$  et  $\epsilon_2 = 2.92901 \times 10^{-3}$ .

Modèles	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\delta$	$\epsilon_3/\epsilon_1$	$\epsilon_4/\epsilon_2$
1	$1.722 \times 10^{-2}$	$2.210 \times 10^{-2}$	$1.654 \times 10^{-2}$	3.527	7.544
3	$1.836 \times 10^{-2}$	$2.673 \times 10^{-2}$	$1.270 \times 10^{-2}$	3.760	9.125
5	$1.877 \times 10^{-2}$	$2.819 \times 10^{-2}$	$1.188 \times 10^{-2}$	3.844	9.625
2	$0.980 \times 10^{-2}$	$1.057 \times 10^{-2}$	$6.503 \times 10^{-2}$	2.007	3.608
4	$1.029 \times 10^{-2}$	$1.243 \times 10^{-2}$	$5.175 \times 10^{-2}$	2.107	4.245
6	$1.033 \times 10^{-2}$	$1.253 \times 10^{-2}$	$5.160 \times 10^{-2}$	2.115	4.277

On peut remarquer la faible valeur du paramètre  $\delta = C_c/C$ . Il faut garder à l'esprit que le

moment d'inertie est sensible à la puissance 5 de la distance au centre. Une masse importante proche du centre aura une influence négligeable sur les moments d'inertie. Ceci permet d'anticiper que l'amplitude des librations en longitude sera dans tous les cas relativement proche de l'amplitude donnée par le modèle rigide.

#### 4.4.2 Les variables de rotation

Comme dans mes études précédentes, j'ai réalisé, pour chacun des 6 modèles d'intérieur, des simulations numériques en propageant des conditions initiales correspondant à l'équilibre dynamique qui s'apparente à l'État de Cassini 1. Les périodes des oscillations propres sont données Tab.4.8.

TABLE 4.8 – Périodes des oscillations propres autour de la rotation d'équilibre.

Modèles	$T_u$ (j)	$T_v$ (j)	$T_w$ (j)	$T_z$ (j)
1	13.2322	166.3520	225.0927	1.7382
3	13.2580	164.5679	225.7442	1.7368
5	13.2634	164.2023	225.8303	1.7362
2	12.9018	127.7468	213.9738	1.7545
4	12.9931	121.0550	216.9747	1.7537
6	12.9942	120.8621	217.0118	1.7536

On distingue clairement 2 groupes, selon la présence ou non de soufre dans le noyau. On peut donc imaginer au mieux 2 types de comportement, chacun associé à un de ces groupes. On peut notamment remarquer que la période des oscillations libres dans le fluide,  $T_z$ , est bien plus proche de la période de rotation (1.769 jour) avec du soufre que sans. On peut donc anticiper que, dans ce cas, le désaxage du champ de vitesses dans le fluide est bien plus important.

Pour représenter la rotation à l'aide de quantités ayant un sens physique direct, j'ai considéré les variables suivantes :

- librations physiques du manteau  $\gamma_m$ ,
- obliquité du manteau  $\epsilon_m$  par rapport à la normale instantanée à l'orbite,
- amplitude du mouvement polaire  $J_m$ ,
- désaxage du champ de vitesses dans le fluide  $J_c$ .

L'évolution temporelle de ces variables est donnée dans la Fig.4.4 pour le Modèle 1 et dans la Fig.4.5 pour le Modèle 2.

On remarque effectivement que le désaxage du fluide  $J_c$  est bien plus important quand le noyau contient du soufre, mais les quantités restent très faibles (25 secondes d'arc contre 9), et donc leur implication planétologique est probablement très limitée. Le mouvement polaire du manteau est au maximum de  $\approx 4$  mètres, ce qui est négligeable, et l'obliquité est au maximum de l'ordre de 10 secondes d'arc dans les 2 cas. Les librations physiques présentent des termes à longue période, c'est pourquoi j'en propose une décomposition quasi-périodique, obtenue par analyse en fréquence (Tab.4.9).

On peut voir que ces librations sont très fortement affectées par les perturbations Européennes (indice 2), ce qui illustre l'importance de la résonance laplacienne et de la quasi-résonance 2 : 1 associée. Le deuxième terme, de période 1.76276 jour, sera celui susceptible de donner des informations planétologiques. D'une part, sa période est la plus proche de la période des oscillations

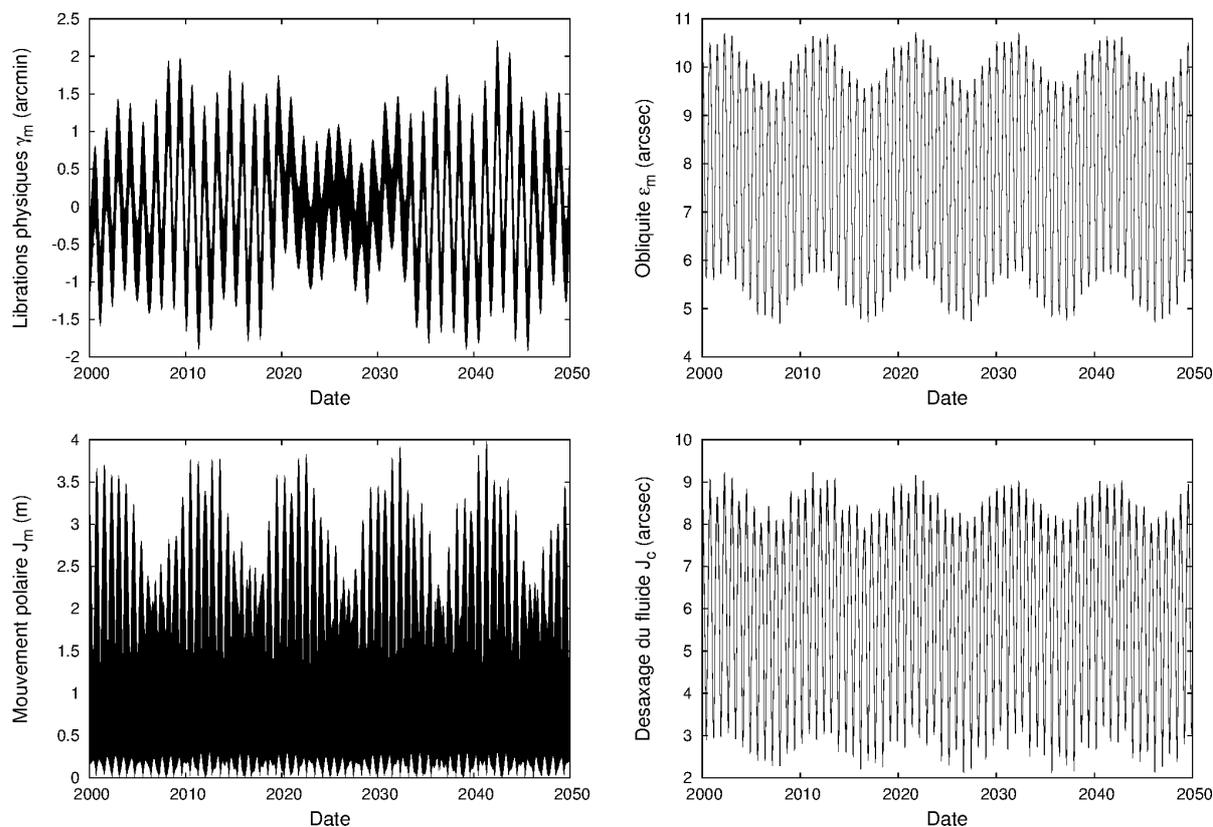


FIGURE 4.4 – La rotation du modèle 1 (noyau composé uniquement de fer).

propres  $T_u$ , donc son amplitude est la plus sensible à l'intérieur, plus précisément à la taille du noyau (paramètre  $\delta = C_c/C$ ). D'autre part, sa courte période en facilite la détection.

La Tab. 4.10 donne la décomposition quasi-périodique de l'obliquité du manteau  $\epsilon_m$ . Il s'agit d'un petit signal, mais qui présente des variations significatives de sa valeur moyenne. La Tab.4.11 rassemble les quantités de rotation simulées pour les 6 différents modèles.

Ce dernier tableau confirme que le paramètre d'intérieur le plus discriminant est bien la masse volumique du noyau  $\rho_c$ . Cependant, la variation dans l'amplitude du terme à 1.76 jour dans les librations est inférieure à 2 secondes d'arc, soit  $\approx 18$  mètres. Les mesurer avec une telle précision n'est pas envisagé pour l'instant, leur détection étant en soi un défi.

On peut, pour cette étude, parler de résultat négatif. C'est pourquoi il a fait l'objet d'une note. Je tiens à remercier Alessandro Morbidelli qui, agissant en sa qualité d'éditeur associé d'*Icarus*, en a accepté la publication. L'un des reviewers en avait en effet proposé le rejet, estimant qu'un résultat négatif avait plutôt sa place dans une revue plus spécialisée.

## 4.5 Vers une modélisation non linéaire du fluide ...

Pour l'instant nous avons considéré que le fluide avait le comportement le plus simple possible, c'est-à-dire que son champ de vitesse était uniforme et que son moment cinétique était de norme  $P_c n C$  constante. Nous avons en fait négligé l'influence de comportements non linéaires. Nous allons

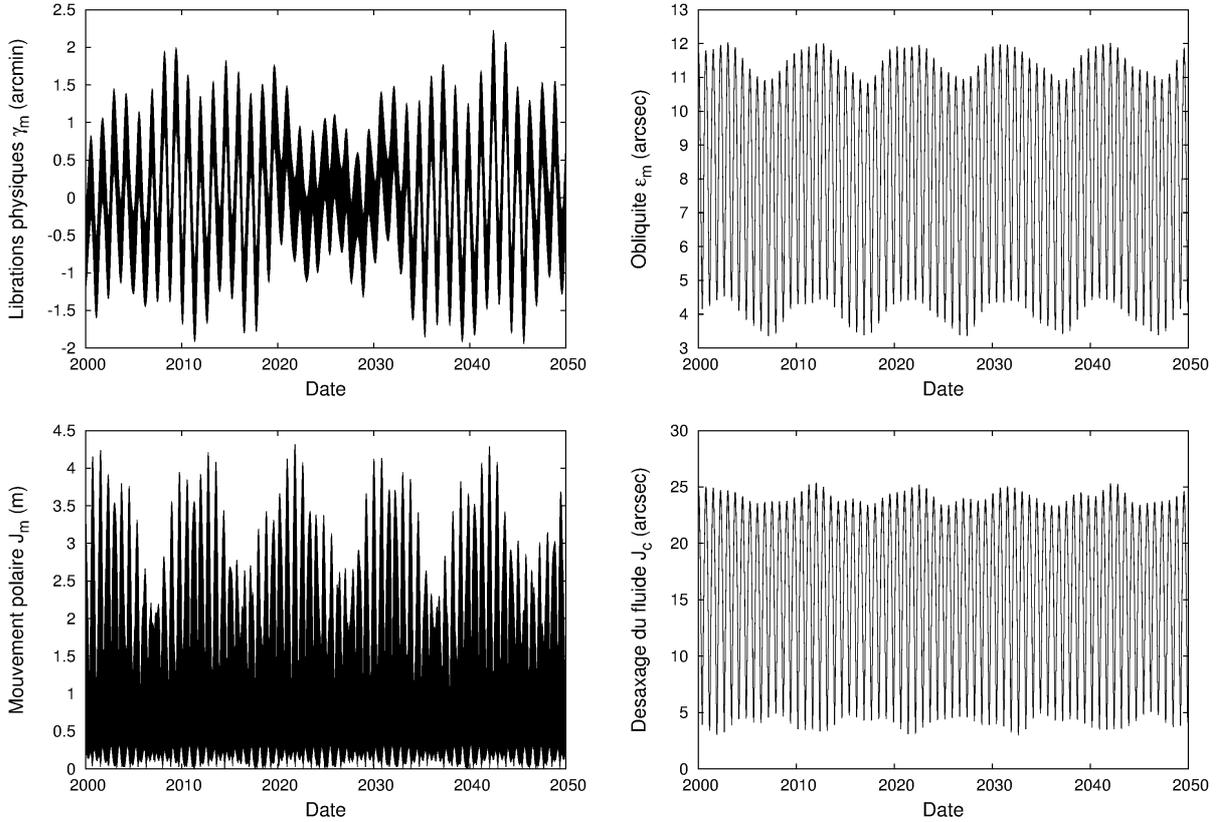


FIGURE 4.5 – La rotation du modèle 2 (le noyau est un mélange eutectique de fer et de soufre).

ici en discuter.

#### 4.5.1 Pourquoi considérer $P_c$ comme constant

C'est l'hypothèse de  $P_c = \delta n C$  constant qui permet d'obtenir une amplitude de librations diurnes qui dépend de la taille du noyau. Ceci semble confirmé par les observations des librations de la Lune (Koziel, 1967; Williams et al., 1973) et de Mercure (Margot et al., 2007, 2012). Poser  $P_c(t) = \delta P(t)$  revient à dire que le noyau suit rigidement le manteau, on aurait ainsi le même comportement que si Io était rigide.

La condition de non-glissement indique qu'à l'interface noyau-manteau, le fluide doit suivre le mouvement du manteau. Il y a donc une fine couche turbulente, dite couche d'Ekman, à la limite externe du fluide, qui sert de zone de transition entre le manteau et la zone où la norme du moment cinétique est constante. L'épaisseur typique de la couche d'Ekman est  $d = \sqrt{\nu/\Omega}$  (Greenspan, 1968), où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide et  $\Omega = n$  est sa fréquence de rotation. Pour Io, Kerswell & Malkus (1998) utilisent  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , ce qui est compatible avec mélange de fer et de soufre, ce qui donne  $d = 0.16 \text{ m}$ . Pour obtenir une couche d'Ekman d'un kilomètre, il faut  $\nu = 36 \text{ m}^2/\text{s}$ . En fait, la viscosité ne devrait pas être constante mais devrait augmenter à mesure qu'on se rapproche du centre du satellite (Rutter et al., 2002). Pour l'anecdote, l'extremum de viscosité qui ait été mesuré est  $\nu = (2.09 \times 10^5 \pm 4.6 \times 10^4) \text{ m}^2/\text{s}$  pour le bitume, lors de l'expérience dite de la

TABLE 4.9 – Décomposition quasi-périodique des librations physiques du manteau  $\gamma_m$ . Les séries sont en sinus.

	Amplitude (arcsec)	Fréquence (rad/an)	Phase (J2000.0)	Période (j)	Identification
1	-39.792	4.96186	-172.463°	462.514	$\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_2$
2	-30.731	1301.919	60.879°	1.76273	$2\lambda_1 - 2\lambda_2$
3	-20.139	4.76032	-66.209°	482.097	$\lambda_1 - 2\lambda_2 + \varpi_3$
4	-17.601	1.11413	151.694°	2059.835	$\psi$

TABLE 4.10 – Décomposition quasi-périodique de l'obliquité du manteau  $\epsilon_m$  dans le Modèle 1. Les séries sont en cosinus.

	Amplitude (arcsec)	Fréquence (rad/an)	Phase (J2000.0)	Période (j)	Identification
1	7.88143	0	0°	$\infty$	cst
2	2.35206	8.374973	-15.890°	274.023	$2\lambda_1 - 4\lambda_2 + \Omega_1 + \Omega_2$
3	0.50730	0.637684	-73.351°	3598.855	$\Omega_2 - \Omega_1$
4	0.17966	16.74995	148.219°	137.011	$3\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\Omega_1 + 2\Omega_2$
5	0.07709	7.737289	-122.540°	296.607	$\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\Omega_1$
6	0.06353	1.904935	35.863°	1204.731	$2\lambda_{\star} - \Omega_1 - \Omega_{\star}$

goutte de poix (Edgeworth et al., 1984). Cette expérience est en cours depuis 1927 à l'Université du Queensland à Brisbane, QLD, Australie. Elle consiste à observer la formation et chute des gouttes de bitume. La neuvième goutte est tombée le 24 avril 2014. Cette expérience a reçu le prix Ig Nobel de physique en 2005.

#### 4.5.2 Lien avec l'équation de Navier-Stokes

La dynamique d'un fluide est en fait régie par l'équation de Navier-Stokes. Cette équation est une référence d'équation aux dérivées partielles non linéaires. Je la présente ici sous la forme donnée par Greenspan (1968) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{q} + \left( \vec{q} \cdot \overrightarrow{grad} \right) \vec{q} + 2\vec{\omega} \times \vec{q} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad}(p) - \nu \overrightarrow{rot} \left( \overrightarrow{rot}(\vec{q}) \right) - \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (4.98)$$

où elle s'applique à une particule de fluide, avec

- $\vec{q}$  : vitesse de la particule dans un repère tournant,
- $\vec{\omega}$  : vecteur rotation instantanée du système tournant, ses coordonnées étant  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ,
- $\rho$  : masse volumique du fluide,
- $\vec{r}$  : vecteur position de la particule dans le repère tournant,
- $p = P + \rho\mathcal{U} - \rho/2(\vec{\omega} \times \vec{r})$  où  $P$  est la pression du fluide, et  $\mathcal{U}$  un potentiel externe.  $p$  est homogène à une pression, on l'appelle *pression réduite*,
- $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

Nous avons, dans notre cas :

TABLE 4.11 – Les variables de rotation pour les différents modèles.

Modèles	$\gamma_m$	$\gamma_m$	$\langle J_m \rangle$	$\langle J_c \rangle$	$\langle \epsilon_m \rangle$	$\epsilon_m$
	(462 j) (arcsec)	(1.76 j) (arcsec)	(mas)	(arcsec)	(arcsec)	(274 j) (arcsec)
1	39.82462	30.73077	136.592	5.89884	7.88443	2.35306
3	39.82475	30.60912	135.689	5.52936	7.87640	2.33113
5	39.82475	30.58332	138.148	5.41307	7.87537	2.32659
2	39.82303	32.35491	139.912	15.82812	8.14896	3.60967
4	39.82346	31.89343	140.550	13.13468	8.06166	3.08910
6	39.82345	31.88809	136.018	12.78276	8.04716	3.07908

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} (a/c)\nu_2x_3 - (a/b)\nu_3x_2 \\ (b/a)\nu_3x_1 - (b/c)\nu_1x_3 \\ (c/b)\nu_1x_2 - (c/a)\nu_2x_1 \end{pmatrix}. \quad (4.99)$$

Dans un cas extrêmement simplifié où on néglige la viscosité  $\nu$ , l'accélération convective ( $\vec{q} \cdot \overrightarrow{grad}$ )  $\vec{q}$  et la pression réduite  $p$ , la formule (4.98) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{q} + 2\vec{\omega} \times \vec{q} = \vec{0}, \quad (4.100)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_1}{dt} + 2(\omega_2\nu_3 - \omega_3\nu_2) &= 0, \\ \frac{d\nu_2}{dt} + 2(\omega_3\nu_1 - \omega_1\nu_3) &= 0, \\ \frac{d\nu_3}{dt} + 2(\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Pour comparaison, la formule (4.33) s'écrit :

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} + D_1 \frac{d\nu_1}{dt} &= (B\omega_2 + D_2\nu_2)\omega_3 - (C\omega_3 + D_3\nu_3)\omega_2, \\ B \frac{d\omega_2}{dt} + D_2 \frac{d\nu_2}{dt} &= (C\omega_3 + D_3\nu_3)\omega_1 - (A\omega_1 + D_1\nu_1)\omega_3, \\ C \frac{d\omega_3}{dt} + D_3 \frac{d\nu_3}{dt} &= (A\omega_1 + D_1\nu_1)\omega_2 - (B\omega_2 + D_2\nu_2)\omega_1. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Les systèmes d'équations (4.101) et (4.102) présentent des similarités, la principale différence étant que les moments d'inertie apparaissent dans le système (4.102). Ces dernières équations doivent être considérées comme globales, c'est-à-dire qu'elles considèrent le noyau fluide dans son ensemble, tandis que le système (4.101) se rapporte à une particule de fluide.

### 4.5.3 L'instabilité elliptique

L'instabilité elliptique est un phénomène observé expérimentalement par Pierrehumbert (1986) et expliqué pour la première fois par Bayly (1986), il s'agit d'un phénomène résonnant dans le fluide, provoqué par un forçage périodique, qui produit des ondes inertielles dont l'amplitude peut croître exponentiellement. Il en résulte des turbulences dans le fluide. Nous pouvons étudier la stabilité du champ de vitesses dans le fluide à partir de la vitesse de croissance  $\sigma$  pour une perturbation arbitraire  $\vec{v}$  (Kerswell & Malkus, 1998) :

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} \frac{d \ln \langle \vec{v}^2 / 2 \rangle}{dt} = - \frac{\langle \vec{v} \cdot \vec{\nabla} U \cdot \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}^2 \rangle}, \quad (4.103)$$

où  $\vec{U}$  est le champ de vitesses dans le fluide, a priori supposé laminaire, et  $\langle \rangle$  est une moyennisation sur le volume. Le flux est stable pour  $\sigma < 0$ , et instable sinon. Cebbron et al. (2012) ont récemment proposé la formule suivante, dans le contexte d'un corps triaxial perturbé par un primaire, en négligeant l'obliquité et le mouvement polaire, et sous l'influence d'un champ magnétique :

$$\sigma = n \left( \frac{17}{64} \epsilon \beta - 2.62(1 - \eta) \frac{1 + \eta^4}{1 - \eta^5} \sqrt{E} - \frac{\Lambda}{16} \right), \quad (4.104)$$

avec

- $\epsilon$  : amplitude des librations physiques diurnes (cf. Tab.4.11),
- $\beta = (a_c^2 - b_c^2)/(a_c^2 + b_c^2)$  est un paramètre d'élongation équatoriale du noyau,
- $\eta$  : rapport entre les rayons interne et externe de la couche liquide.  $\eta = 0$  dans notre cas puisque nous n'avons pas de graine,
- $E = \nu/(nR_c^2)$  : nombre d'Ekman, une sorte de viscosité adimensionnée,
- $\Lambda = \sigma_e B_0^2/(n\rho_c)$ , où  $\sigma_e$  est la conductivité électrique du fluide et  $B_0$  l'intensité du champ magnétique : nombre d'Elsasser. Cette contribution du champ magnétique vient de la généralisation par Cebbron et al. (2012) d'un résultat de Herreman et al. (2009).

TABLE 4.12 – Vitesse de croissance  $\sigma$ , et le temps associé.

Modèles	$\sigma$ (/an)	$1/\sigma$ (ans)
1	$1.142 \times 10^{-3}$	875
3	$1.561 \times 10^{-3}$	640
5	$1.700 \times 10^{-3}$	588
2	$3.325 \times 10^{-4}$	3008
4	$2.260 \times 10^{-4}$	4425
6	$2.353 \times 10^{-4}$	4250

Les résultats sont donnés dans la Tab.4.12, et indiquent que  $\sigma$  est toujours positif, autrement dit que le noyau d'Io doit être sujet à l'instabilité elliptique. Néanmoins, il est "moins instable" lorsque le noyau contient du soufre. Cette instabilité pour Io a été pour la première fois suggérée par Kerswell & Malkus (1998), et confirmée par Herreman et al. (2009) en incluant l'effet du champ magnétique. Ces derniers auteurs obtiennent un temps caractéristique  $1/\sigma$  d'environ 63 ans, donc leur Io est bien plus instable que les miens. Cebbron et al. (2012) trouvent en revanche un Io stable, c'est-à-dire  $\sigma < 0$ . La différence entre leur étude et la mienne réside principalement dans l'élongation équatoriale de l'interface noyau-manteau. Les miennes sont plus allongées que la leur, ce qui résulte d'hypothèses différentes sur la construction des modèles d'intérieur.

Ces désaccords entre auteurs montrent que la question est toujours ouverte. D'ailleurs des travaux expérimentaux (Noir et al., 2009) ainsi que théoriques (Baruteau & Rieutord, 2013; Van- tieghem, 2014) sont toujours d'actualité.

Cette instabilité du champ de vitesses dans le fluide visqueux est source de dissipation d'énergie. En régime continu, Le Bars et al. (2010) proposent la formule suivante :

$$\dot{E} = -\frac{8\pi}{3}\rho_c R_c^4 \sqrt{\nu} |\Omega^s - \Omega^o|^{5/2} |\omega_{SO}|^{5/2}, \quad (4.105)$$

où  $\Omega^s = nP$  est la fréquence de rotation du manteau, et  $\omega_{SO} = 1/P$  une fréquence normalisée du mode dit de *spin-over*, qui apparaît en cas d'instabilité. Avec  $|\Omega^s - \Omega^o| = 2e|\cos nt|$  et  $e \approx 0.004$ , j'obtiens une dissipation d'énergie de  $8.47 \times 10^8$  W pour le Modèle 1, et  $2.32 \times 10^9$  W pour le Modèle 2. Le Bars et al. (2010) l'estiment au maximum à  $\approx 4 \times 10^9$  W. Ces chiffres sont très faibles par rapport à ce que les marées dissipent, soit  $(9.33 \pm 1.84) \times 10^{13}$  W (Lainey et al., 2009). Un bilan énergétique est présenté dans la Tab.4.13.

TABLE 4.13 – Bilan énergétique d'Io. Les marées sont la seule source d'énergie significative et elles expliquent à elles seules le flux de chaleur observé

Source de dissipation	$\dot{E}$	Référence
Flux de chaleur à la surface	$8.33 - 10.83 \times 10^{13}$ W	Rathbun et al. (2004)
Dissipation de marée	$(9.33 \pm 1.84) \times 10^{13}$ W	Lainey et al. (2009)
Chauffage radiogénique	$3.08 - 5.14 \times 10^{11}$ W	Husmann et al. (2010)
Instabilité elliptique	$8.47 \times 10^8 - 2.32 \times 10^9$ W	Noyelles (2013)

Le problème des non linéarités dans le fluide est pour l'instant très mal maîtrisé. On ne sait pas si le flux dans le noyau d'Io est laminaire ou turbulent. Par contre, il apparaît clair qu'en régime continu, ce phénomène ne peut pas contribuer significativement à la dissipation d'énergie.

## 4.6 Conclusion

J'ai présenté ici le modèle de Poincaré-Hough, qui permet de modéliser la rotation d'un corps constitué d'un manteau rigide et d'un noyau fluide, qui a un comportement laminaire. Il faut voir ce modèle comme une approximation. S'il y a une graine, c'est-à-dire un noyau interne solide, elle doit être suffisamment petite pour que son influence soit négligeable. Il est préférable dans ce cas d'avoir un manteau assez épais, donc d'inertie importante. Dans ce cas, son élasticité n'aura que très peu d'influence. Un tel modèle semble valide pour Io et la Lune, et peut-être aussi pour Mercure, en résonance 3 : 2.

Ce modèle permet de poser la question des effets des non-linéarités dans le fluide. Il s'agit d'un problème hautement complexe, sur le plan mathématique il consiste ni plus ni moins à résoudre l'équation de Navier-Stokes. Plusieurs pistes existent, comme les expérimentations, les simulations numériques par éléments finis, ou encore l'étude analytique d'équations simplifiées au voisinage d'un phénomène précis.

La communauté scientifique est de plus en plus priée de s'intéresser aux lieux potentiellement habitables, comme le sont les océans sous-surfaciques. C'est par exemple une priorité de la prospective Cosmic Vision. Plusieurs d'entre eux ont été détectés ou suggérés, pour Titan, Europe, Ganymède, ou encore Callisto ... Le modèle de Poincaré-Hough est devenu insuffisant pour ces

corps, soumis notamment à un couplage gravitationnel entre la graine et la croûte. Nous nous y intéressons dans le chapitre qui arrive.

# Chapitre 5

## La présence d'un océan global

### 5.1 Introduction

Plusieurs grands satellites naturels dans le Système Solaire sont soupçonnés d'abriter un océan global sous-surfacique. La principale raison est leur taille, qui implique une certaine différenciation. Ici, les éléments lourds migrent vers le centre, et la surface est essentiellement composée d'eau glacée. Le gradient de pression dans le satellite implique qu'à une certaine profondeur, l'eau subsiste sous forme liquide. Le chauffage de marée peut contribuer à maintenir cet état liquide, comme il semblerait que ce soit le cas pour Europe (Ross & Schubert, 1987; Hussmann et al., 2002) et pour Encelade (Roberts & Nimmo, 2008; Tyler, 2011; McKinnon, 2013). Dans le cas de Titan, l'océan global sous-surfacique a été prédit par de nombreuses études théoriques (Lunine & Stevenson, 1987; Grasset & Sotin, 1996; Grasset et al., 2000; Tobie et al., 2005; Fortes et al., 2007) et pourrait avoir été détecté indirectement par sa signature dans le champ électromagnétique de l'atmosphère (Simões et al., 2007; Béghin et al., 2010, 2012), ainsi que par un nombre de Love  $k_2$  de l'ordre de 0.6 (Iess et al., 2012). Les océans internes font des corps concernés des cibles prioritaires pour les futurs programmes spatiaux, car ils sont susceptibles d'abriter des formes de vie bactériologique (Lammer et al., 2009; Grasset et al., 2013).

D'un point de vue purement dynamique, une couche fluide globale située entre 2 couches solides tend à les découpler l'une de l'autre. Il est donc nécessaire de construire un modèle dynamique tenant compte de cet océan. Je considère ici le satellite comme un ellipsoïde triaxial, constitué de 3 couches concentriques : un noyau rigide interne, un océan global fluide non visqueux, et une croûte rigide (Fig.5.1). Le cas où la croûte est déformable est abordé à la Sect.5.4. Chacune de ces couches a une densité constante.

### 5.2 Mise en équations du problème

Je présente ici des équations publiées dans (Noyelles & Nimmo, 2014). Elles sont inspirées de (Szeto & Xu, 1997) et de (Baland et al., 2011). Le modèle d'intérieur utilise 12 paramètres, c'est-à-dire 3 rayons et une masse volumique pour chaque couche. Ils sont :

- $\rho_c, \rho_o, \rho_s$  : masses volumiques du noyau (*core*), de l'océan et de la croûte (*shell*),
- $a_c, b_c, c_c$  : rayons de l'interface noyau-océan
- $a_o, b_o, c_o$  : rayons de l'interface océan-croûte,
- $a, b, c$  : rayons de la surface du satellite.

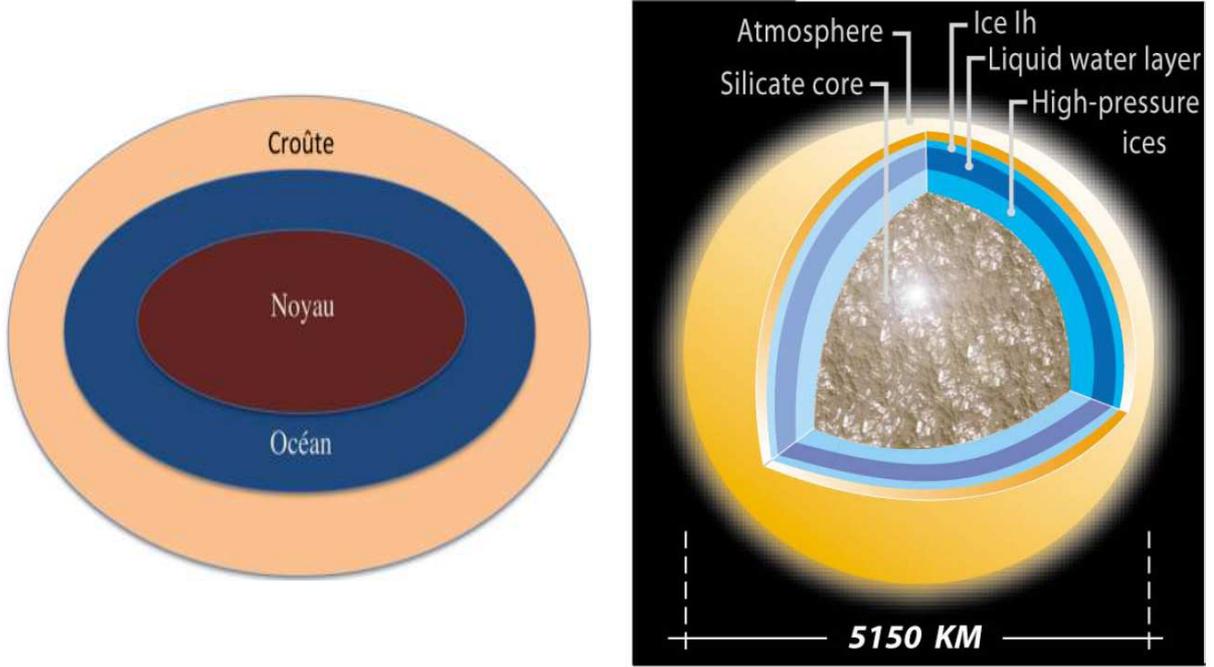


FIGURE 5.1 – Modèles d'intérieur de Titan. À gauche : notre modèle. À droite : l'intérieur de Titan vu par Tobie et al. (2005).

Contrairement à précédemment, le formalisme Hamiltonien n'est pas utilisé. L'objectif était d'écrire un système d'équations approprié à la description du comportement du système. Le passage en formalisme Hamiltonien sera pour une prochaine étape.

### 5.2.1 Paramétrisation du problème

Baland et al. (2011) ont montré que le bilan des forces sur l'océan était nul, si on faisait l'approximation qu'il était à l'équilibre hydrostatique. On doit donc modéliser l'orientation des 2 couches rigides, à savoir le noyau et la croûte. Pour ça, on a besoin de 2 jeux d'angles d'Euler,  $(h^c, \epsilon^c, \theta^c)$  et  $(h^s, \epsilon^s, \theta^s)$  qui vont repérer respectivement l'orientation des axes principaux d'inertie du noyau  $(\vec{f}_1^c, \vec{f}_2^c, \vec{f}_3^c)$  et de la croûte  $(\vec{f}_1^s, \vec{f}_2^s, \vec{f}_3^s)$  par rapport au repère inertiel  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  (Fig.5.2).

Ces angles d'Euler présentent une singularité virtuelle : lorsque l'obliquité  $\epsilon$  est nulle, on ne peut pas distinguer de façon unique les angles  $h$  et  $\theta$ , alors que la somme  $h + \theta$  est toujours définie. Pour contourner ce problème, nous introduisons des coordonnées régularisées :

$$\begin{aligned}\xi^{s,c} &= 2 \sin \frac{\epsilon^{s,c}}{2} \sin h^{s,c}, \\ \eta^{s,c} &= 2 \sin \frac{\epsilon^{s,c}}{2} \cos h^{s,c}, \\ p^{s,c} &= h^{s,c} + \theta^{s,c}.\end{aligned}$$

Lorsque l'obliquité  $\epsilon$  est nulle, alors  $\eta$  et  $\xi$  sont nuls aussi. Ils restent donc définis et ne présentent plus de singularité.

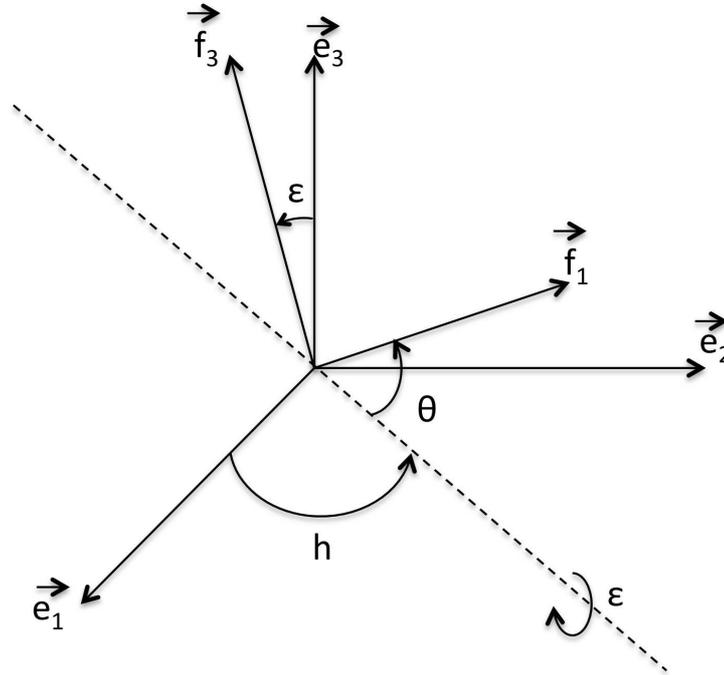


FIGURE 5.2 – Les angles d’Euler utilisés dans notre problème.

Pour représenter le moment cinétique  $\vec{G}$  de chacune de ces couches, nous utiliserons comme variables les 3 composantes du vecteur rotation de la couche considérée  $\vec{\omega}$  dans le repère des axes principaux d’inertie de cette même couche. On a ainsi

$$\vec{G}^s = A^s \omega_1^s \vec{f}_1^s + B^s \omega_2^s \vec{f}_2^s + C^s \omega_3^s \vec{f}_3^s \quad (5.1)$$

pour la croûte et

$$\vec{G}^c = A^c \omega_1^c \vec{f}_1^c + B^c \omega_2^c \vec{f}_2^c + C^c \omega_3^c \vec{f}_3^c \quad (5.2)$$

pour le noyau.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les moments principaux d’inertie de la couche considérée, définis comme précédemment (Eq.2.2 à 2.4).

### 5.2.2 Les équations cinématiques

Pour déterminer les équations régissant la variation des angles d’Euler en fonction des composantes des vecteurs rotation  $\vec{\omega}^s$  et  $\vec{\omega}^c$ , nous partons de la géométrie du problème, en nous inspirant de (Fowles & Cassiday, 1999).

Le vecteur rotation  $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{f}_1 + \omega_2 \vec{f}_2 + \omega_3 \vec{f}_3$  représente 3 rotations successives du repère inertiel  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  au repère de figure  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$  (cf. Fig.5.2) :

1. une rotation d’axe  $z$  (ici  $\vec{e}_3$ ) d’angle  $h$ ,
2. une rotation autour de l’axe  $x$  provisoire,
3. une rotation autour de l’axe  $z$  final, c’est-à-dire l’axe de figure  $\vec{f}_3$ , d’angle  $\theta$ .

Ceci s'écrit mathématiquement

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + R_3(-\theta) \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_3(-\theta)R_1(-\epsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{h} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

les matrices de rotation  $R_1$  et  $R_3$  ayant été précédemment définies (Eq. 2.37 & 2.36). Ceci donne

$$\omega_1 = \dot{\epsilon} \cos \theta + \dot{h} \sin \epsilon \sin \theta, \quad (5.4)$$

$$\omega_2 = -\dot{\epsilon} \sin \theta + \dot{h} \sin \epsilon \cos \theta, \quad (5.5)$$

$$\omega_3 = \dot{\theta} + \dot{h} \cos \epsilon, \quad (5.6)$$

et donc

$$\dot{h} = \frac{\omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta}{\sin \epsilon}, \quad (5.7)$$

$$\dot{\epsilon} = \omega_1 \cos \theta - \omega_2 \sin \theta, \quad (5.8)$$

$$\dot{\theta} = \omega_3 - \frac{\omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta}{\tan \epsilon}. \quad (5.9)$$

Les équations (5.7) et (5.9) illustrent la singularité virtuelle induite par les angles d'Euler. Ces formules sont les mêmes que dans (Black et al., 1995; Harbison et al., 2011) mais sont présentées avec un signe opposé dans d'autres études comme (Williams et al., 2001). En variables régulières, ceci donne

$$\dot{\xi} = \omega_1 \left( \cos \theta \cos \frac{\epsilon}{2} \sin h + \frac{\sin \theta \cos h}{\cos(\epsilon/2)} \right) + \omega_2 \left( \frac{\cos \theta \cos h}{\cos(\epsilon/2)} - \sin \theta \cos \frac{\epsilon}{2} \sin h \right), \quad (5.10)$$

$$\dot{\eta} = \omega_1 \left( \cos \theta \cos \frac{\epsilon}{2} \cos h - \frac{\sin \theta \sin h}{\cos(\epsilon/2)} \right) - \omega_2 \left( \sin \theta \cos \frac{\epsilon}{2} \cos h + \frac{\cos \theta \sin h}{\cos(\epsilon/2)} \right), \quad (5.11)$$

$$\dot{p} = \omega_3 + (\omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta) \tan \frac{\epsilon}{2}, \quad (5.12)$$

et la singularité virtuelle a disparu.

### 5.2.3 Les forces intervenant

Les forces que nous considérons sont :

- la force gravitationnelle de Saturne sur chacune des couches,
- les forces de pression aux 2 interfaces fluide-solide,
- le couplage gravitationnel entre le noyau et la croûte, qui tend à aligner les axes de ces 2 couches rigides.

Le modèle pourrait être encore complexifié. Notamment, comme précédemment (Chap.4) nous ne tenons pas compte d'effets non linéaires dus à la viscosité du fluide. Notre étude doit donc être considérée comme préliminaire à d'autres études plus complètes sur le sujet. Détaillons maintenant ces différentes forces.

### Le forçage gravitationnel de Saturne

Pour un corps rigide de moments principaux d'inertie  $A$ ,  $B$  et  $C$ , le couple gravitationnel dû à la perturbation de Saturne s'écrit classiquement

$$\vec{\Gamma}_{\mathfrak{h}} = \frac{3\mathcal{G}M_{\mathfrak{h}}}{\|\vec{r}_{\mathfrak{h}}\|^5} \left( (C - B)y_{\mathfrak{h}}z_{\mathfrak{h}}\vec{f}_1 + (A - C)x_{\mathfrak{h}}z_{\mathfrak{h}}\vec{f}_2 + (B - A)x_{\mathfrak{h}}y_{\mathfrak{h}}\vec{f}_3 \right), \quad (5.13)$$

où le vecteur  $\vec{r}_{\mathfrak{h}} = x_{\mathfrak{h}}\vec{f}_1 + y_{\mathfrak{h}}\vec{f}_2 + z_{\mathfrak{h}}\vec{f}_3$  représente la position du perturbateur dans le repère de figure du corps dont on étudie la rotation. Dans notre cas, les couples de Saturne s'appliquant sur le noyau et la croûte s'écrivent

$$\vec{\Gamma}_{\mathfrak{h}}^c = \frac{3\mathcal{G}M_{\mathfrak{h}}}{\|\vec{r}_{\mathfrak{h}}^c\|^5} \left( (C^c - B^c)y_{\mathfrak{h}}^c z_{\mathfrak{h}}^c \vec{f}_1^c + (A^c - C^c)x_{\mathfrak{h}}^c z_{\mathfrak{h}}^c \vec{f}_2^c + (B^c - A^c)x_{\mathfrak{h}}^c y_{\mathfrak{h}}^c \vec{f}_3^c \right), \quad (5.14)$$

$$\vec{\Gamma}_{\mathfrak{h}}^s = \frac{3\mathcal{G}M_{\mathfrak{h}}}{\|\vec{r}_{\mathfrak{h}}^s\|^5} \left( (C^s - B^s)y_{\mathfrak{h}}^s z_{\mathfrak{h}}^s \vec{f}_1^s + (A^s - C^s)x_{\mathfrak{h}}^s z_{\mathfrak{h}}^s \vec{f}_2^s + (B^s - A^s)x_{\mathfrak{h}}^s y_{\mathfrak{h}}^s \vec{f}_3^s \right). \quad (5.15)$$

### Le couplage gravitationnel entre les 2 couches rigides

Nous nous basons ici sur l'étude de Szeto & Xu (1997) qui modélisait, pour la Terre, le couplage entre la croûte et le noyau, en négligeant toute influence du fluide remplissant l'espace entre ces 2 couches. La triaxialité était prise en compte dans cette étude.

Le couple gravitationnel de la croûte agissant sur le noyau s'écrit

$$\vec{\Gamma}_{sh}^c = \iiint_{\text{noyau}} \rho_c \vec{r} \times \vec{\nabla} \Phi \, dV, \quad (5.16)$$

où  $\vec{r}$  pointe vers un élément de masse du noyau, et  $\Phi$  est le potentiel gravitationnel de la croûte donné par

$$\Phi = \alpha + \beta r^2 P_2(\cos \psi) + \gamma r^2 P_2^2(\cos \psi) \cos 2\phi + \mathcal{O}(f_{1,2}^2, \kappa_{1,2}^2), \quad (5.17)$$

où

- $\alpha$  est une constante qui n'affectera pas le résultat,
- $\beta = \frac{4\pi}{15} \mathcal{G} \rho_s (\kappa_2 - \kappa_1 - 2(f_2 - f_1))$ ,
- $\gamma = \frac{2\pi}{15} \mathcal{G} \rho_s (\kappa_2 - \kappa_1)$ ,
- $f_1 = (a_o - c_o)/a_o$  est l'aplatissement polaire de l'interface croûte-océan,
- $f_2 = (a - c)/a$  est l'aplatissement polaire de la surface du satellite,
- $\kappa_1 = (a_o - b_o)/a_o$  est l'ellipticité équatoriale de l'interface croûte-océan,
- $\kappa_2 = (a - b)/a$  est l'ellipticité équatoriale de la surface de Titan,
- $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$  est le polynôme de Legendre d'ordre 2,
- $P_2^2(x) = 3(1 - x^2)$  est une fonction associée de Legendre,
- $\psi$  et  $\phi$  sont respectivement la colatititude et la longitude comptée positivement vers l'est de l'élément de masse considéré, dans le repère de figure de la croûte  $(\vec{f}_1^s, \vec{f}_2^s, \vec{f}_3^s)$ .

On a

$$\begin{aligned}\vec{r} &= X\vec{f}_1^s + Y\vec{f}_2^s + Z\vec{f}_3^s \\ &= x\vec{f}_1^c + y\vec{f}_2^c + z\vec{f}_3^c\end{aligned}$$

avec

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

et

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = R_3(-\theta^s)R_1(-\epsilon^s)R_3(h^c - h^s)R_1(\epsilon^c)R_3(\theta^c). \quad (5.19)$$

Ici,  $(X, Y, Z)$  et  $(x, y, z)$  sont les coordonnées cartésiennes de l'élément de masse exprimé respectivement dans les repères de figure de la croûte et du noyau. À partir de

$$\begin{aligned}r^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2, \\ \cos \psi &= Z/\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ \sin^2 \psi \cos 2\phi &= (X^2 - Y^2)/(X^2 + Y^2 + Z^2), \\ P_2(\cos \psi) &= (2Z^2 - X^2 - Y^2)/(2(X^2 + Y^2 + Z^2)), \\ P_2^2(\cos \psi) \cos 2\phi &= 3(X^2 - Y^2)/(X^2 + Y^2 + Z^2),\end{aligned}$$

on obtient

$$\Phi = \beta(2Z^2 - X^2 - Y^2)/2 + 3\gamma(X^2 - Y^2). \quad (5.20)$$

Après expression du potentiel  $\Phi$  dans le repère du noyau, dérivation pour obtenir le gradient  $\vec{\nabla}\Phi$  et le produit vectoriel  $\vec{r} \times \vec{\nabla}\Phi$ , et élimination des termes croisés par sommation, on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{sh}^c &= \beta \begin{bmatrix} (-2n_2n_3 + m_2m_3 + l_2l_3) \iiint_{\text{noyau}} \rho_c (z^2 - y^2) dx dy dz \vec{f}_1^c \\ (2n_1n_3 - m_1m_3 - l_1l_3) \iiint_{\text{noyau}} \rho_c (z^2 - x^2) dx dy dz \vec{f}_2^c \\ (-2n_1n_2 + m_1m_2 + l_1l_2) \iiint_{\text{noyau}} \rho_c (y^2 - x^2) dx dy dz \vec{f}_3^c \end{bmatrix} \\ &+ 6\gamma \begin{bmatrix} (m_2m_3 - l_2l_3) \iiint_{\text{noyau}} \rho_c (z^2 - y^2) dx dy dz \vec{f}_1^c \\ (l_1l_3 - m_1m_3) \iiint_{\text{noyau}} \rho_c (z^2 - x^2) dx dy dz \vec{f}_2^c \\ (m_1m_2 - l_1l_2) \iiint_{\text{noyau}} \rho_c (y^2 - x^2) dx dy dz \vec{f}_3^c \end{bmatrix}. \quad (5.21)\end{aligned}$$

Le passage de  $(\vec{f}_1^s, \vec{f}_2^s, \vec{f}_3^s)$  à  $(\vec{f}_1^c, \vec{f}_2^c, \vec{f}_3^c)$  étant une transformation orthonormale, on a

$$\begin{aligned}
l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0, \\
l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0, \\
l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0.
\end{aligned}$$

En utilisant aussi

$$\begin{aligned}
\iiint_{\text{noyau}} \rho_c (z^2 - y^2) \, dx \, dy \, dz &= B^c - C^c, \\
\iiint_{\text{noyau}} \rho_c (z^2 - x^2) \, dx \, dy \, dz &= A^c - C^c, \\
\iiint_{\text{noyau}} \rho_c (y^2 - x^2) \, dx \, dy \, dz &= A^c - B^c,
\end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\vec{\Gamma}_{sh}^c = 3\beta \begin{bmatrix} n_2 n_3 (C^c - B^c) \vec{f}_1^c \\ -n_1 n_3 (C^c - A^c) \vec{f}_2^c \\ n_1 n_2 (B^c - A^c) \vec{f}_3^c \end{bmatrix} + 6\gamma \begin{bmatrix} (l_2 l_3 - m_2 m_3) (C^c - B^c) \vec{f}_1^c \\ -(l_1 l_3 - m_1 m_3) (C^c - A^c) \vec{f}_2^c \\ (l_1 l_2 - m_1 m_2) (B^c - A^c) \vec{f}_3^c \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

on retrouve ainsi (Szeto & Xu, 1997, Eq.7). En l'absence d'océan, le couple dû au noyau agissant sur la croûte  $\vec{\Gamma}_{co}^s$  doit être l'opposé de  $\vec{\Gamma}_{sh}^c$ , on a donc

$$\vec{\Gamma}_{co}^s = -3\beta \begin{bmatrix} n_2 n_3 (C^c - B^c) \vec{f}_1^c \\ -n_1 n_3 (C^c - A^c) \vec{f}_2^c \\ n_1 n_2 (B^c - A^c) \vec{f}_3^c \end{bmatrix} - 6\gamma \begin{bmatrix} (l_2 l_3 - m_2 m_3) (C^c - B^c) \vec{f}_1^c \\ -(l_1 l_3 - m_1 m_3) (C^c - A^c) \vec{f}_2^c \\ (l_1 l_2 - m_1 m_2) (B^c - A^c) \vec{f}_3^c \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

### L'influence de l'océan

Cette section est largement inspirée de (Baland et al., 2011). Ici nous négligeons les effets non linéaires dans le fluide. L'océan agit sur les interfaces fluide-solide par le biais d'un couplage de pression. Lorsque l'océan est à l'équilibre hydrostatique<sup>1</sup>, alors la pression  $P_{ext}$  appliquée sur l'océan par Saturne vérifie  $\vec{\nabla} P_{ext} = -\rho_o \vec{\nabla} W$  où  $W$  est le potentiel gravitationnel dû au perturbateur Saturne. Il en résulte des termes additionnels, liés à l'océan, dans les couples précédemment donnés.

Pour cela nous avons besoin de scinder l'océan en 2 parties : une partie haute *top ocean* de moments d'inertie  $A_t^o$ ,  $B_t^o$  et  $C_t^o$  dans le repère de la croûte  $(\vec{f}_1^s, \vec{f}_2^s, \vec{f}_3^s)$ , et une partie basse *bottom ocean* de moments  $A_b^o$ ,  $B_b^o$  et  $C_b^o$  dans le repère du noyau  $(\vec{f}_1^c, \vec{f}_2^c, \vec{f}_3^c)$ . La limite entre ces 2 océans est sphérique et de rayon arbitraire. La résultante des couplages s'appliquant sur une limite sphérique est nulle, ce qui simplifie les calculs.

Le plus commode est de réécrire les couples externes  $\vec{\Gamma}_{\tilde{h}}^c$  et  $\vec{\Gamma}_{\tilde{h}}^s$  et internes  $\vec{\Gamma}_{sh}^c$  et  $\vec{\Gamma}_{co}^s$  du satellite sans océan en ajoutant les termes dus à l'océan, les couples deviennent donc

1. Dans le cas particulier de Titan, l'écart à l'équilibre hydrostatique est en général considéré comme dû essentiellement à la croûte.

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{\hbar}^{c,o} = \frac{3\mathcal{G}M_{\hbar}}{\|\vec{r}_{\hbar}^c\|^5} & ((C^c - B^c + C_b^o - B_b^o)y_{\hbar}^c z_{\hbar}^c \vec{f}_1^c + (A^c - C^c + A_b^o - C_b^o)x_{\hbar}^c z_{\hbar}^c \vec{f}_2^c \\ & + (B^c - A^c + B_b^o - A_b^o)x_{\hbar}^c y_{\hbar}^c \vec{f}_3^c), \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{\hbar}^{s,o} = \frac{3\mathcal{G}M_{\hbar}}{\|\vec{r}_{\hbar}^s\|^5} & ((C^s - B^s + C_t^o - B_t^o)y_{\hbar}^s z_{\hbar}^s \vec{f}_1^s + (A^s - C^s + A_t^o - C_t^o)x_{\hbar}^s z_{\hbar}^s \vec{f}_2^s \\ & + (B^s - A^s + B_t^o - A_t^o)x_{\hbar}^s y_{\hbar}^s \vec{f}_3^s), \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\vec{\Gamma}_{sh}^{c,o} = \begin{bmatrix} (3\beta^o n_2 n_3 + 6\gamma^o (l_2 l_3 - m_2 m_3)) (C^c - B^c + C_b^o - B_b^o) \vec{f}_1^c \\ -(3\beta^o n_1 n_3 + 6\gamma^o (l_1 l_3 - m_1 m_3)) (C^c - A^c + C_b^o - A_b^o) \vec{f}_2^c \\ (3\beta^o n_1 n_2 + 6\gamma^o (l_1 l_2 - m_1 m_2)) (B^c - A^c + B_b^o - A_b^o) \vec{f}_3^c \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

et

$$\vec{\Gamma}_{co}^{s,o} = \begin{bmatrix} -(3\beta^o n_2 n_3 + 6\gamma^o (l_2 l_3 - m_2 m_3)) (C^c - B^c + C_b^o - B_b^o) \vec{f}_1^c \\ (3\beta^o n_1 n_3 + 6\gamma^o (l_1 l_3 - m_1 m_3)) (C^c - A^c + C_b^o - A_b^o) \vec{f}_2^c \\ -(3\beta^o n_1 n_2 + 6\gamma^o (l_1 l_2 - m_1 m_2)) (B^c - A^c + B_b^o - A_b^o) \vec{f}_3^c \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

avec

$$\beta^o = \frac{4\pi}{15} \mathcal{G} (\rho_s (\kappa_2 - \kappa_1 - 2(f_2 - f_1)) + \rho_o (\kappa_1 - 2f_1)), \quad (5.28)$$

$$\gamma^o = \frac{2\pi}{15} \mathcal{G} (\rho_s (\kappa_2 - \kappa_1) + \rho_o \kappa_1). \quad (5.29)$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour écrire le système d'équations complet.

#### 5.2.4 Le système d'équations

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^c}{dt} &= \omega_1^c \left( \cos \theta^c \cos \frac{\epsilon^c}{2} \sin h^c + \frac{\sin \theta^c \cos h^c}{\cos(\epsilon^c/2)} \right) \\ &+ \omega_2^c \left( \frac{\cos \theta^c \cos h^c}{\cos(\epsilon^c/2)} - \sin \theta^c \cos \frac{\epsilon^c}{2} \sin h^c \right), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta^c}{dt} &= \omega_1^c \left( \cos \theta^c \cos \frac{\epsilon^c}{2} \cos h^c - \frac{\sin \theta^c \sin h^c}{\cos(\epsilon^c/2)} \right) \\ &- \omega_2^c \left( \sin \theta^c \cos \frac{\epsilon^c}{2} \cos h^c + \frac{\cos \theta^c \sin h^c}{\cos(\epsilon^c/2)} \right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\frac{dp^c}{dt} = \omega_3^c + (\omega_1^c \sin \theta^c + \omega_2^c \cos \theta^c) \tan \frac{\epsilon^c}{2}, \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1^c}{dt} &= (3\beta^o n_2 n_3 + 6\gamma^o (l_2 l_3 - m_2 m_3)) \frac{\Delta_1}{A^c} \\ &+ 3 \frac{\mathcal{G}M_{\ddot{\eta}}}{\|\vec{r}_{\ddot{\eta}}^c\|^5} \frac{C^c - B^c + C_b^o - B_b^o}{A^c} y_{\ddot{\eta}}^c z_{\ddot{\eta}}^c - \frac{(\vec{\omega}^c \times \vec{G}^c) \cdot \vec{f}_1^c}{A^c}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2^c}{dt} &= -(3\beta^o n_1 n_3 + 6\gamma^o (l_1 l_3 - m_1 m_3)) \frac{\Delta_2}{B^c} \\ &+ 3 \frac{\mathcal{G}M_{\ddot{\eta}}}{\|\vec{r}_{\ddot{\eta}}^c\|^5} \frac{A^c - C^c + A_b^o - C_b^o}{B^c} x_{\ddot{\eta}}^c z_{\ddot{\eta}}^c - \frac{(\vec{\omega}^c \times \vec{G}^c) \cdot \vec{f}_2^c}{B^c}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_3^c}{dt} &= (3\beta^o n_1 n_2 + 6\gamma^o (l_1 l_2 - m_1 m_2)) \frac{\Delta_3}{C^c} \\ &+ 3 \frac{\mathcal{G}M_{\ddot{\eta}}}{\|\vec{r}_{\ddot{\eta}}^c\|^5} \frac{B^c - A^c + B_b^o - A_b^o}{C^c} x_{\ddot{\eta}}^c y_{\ddot{\eta}}^c - \frac{(\vec{\omega}^c \times \vec{G}^c) \cdot \vec{f}_3^c}{C^c} \end{aligned} \quad (5.35)$$

pour le noyau, et

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^s}{dt} &= \omega_1^s \left( \cos \theta^s \cos \frac{\epsilon^s}{2} \sin h^s + \frac{\sin \theta^s \cos h^s}{\cos(\epsilon^s/2)} \right) \\ &+ \omega_2^s \left( \frac{\cos \theta^s \cos h^s}{\cos(\epsilon^s/2)} - \sin \theta^s \cos \frac{\epsilon^s}{2} \sin h^s \right), \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta^s}{dt} &= \omega_1^s \left( \cos \theta^s \cos \frac{\epsilon^s}{2} \cos h^s - \frac{\sin \theta^s \sin h^s}{\cos(\epsilon^s/2)} \right) \\ &- \omega_2^s \left( \sin \theta^s \cos \frac{\epsilon^s}{2} \cos h^s + \frac{\cos \theta^s \sin h^s}{\cos(\epsilon^s/2)} \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\frac{dp^s}{dt} = \omega_3^s + (\omega_1^s \sin \theta^s + \omega_2^s \cos \theta^s) \tan \frac{\epsilon^s}{2}, \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1^s}{dt} &= -\frac{3\beta^o n_2 n_3 + 6\gamma^o (l_2 l_3 - m_2 m_3)}{A^s} \left( \Delta_1 \vec{f}_1^c \cdot \vec{f}_1^s + \Delta_2 \vec{f}_2^c \cdot \vec{f}_1^s + \Delta_3 \vec{f}_3^c \cdot \vec{f}_1^s \right) \\ &+ 3 \frac{\mathcal{G}M_{\ddagger}}{\|\vec{r}_{\ddagger}^s\|^5} \frac{C^s - B^s + C_t^o - B_t^o}{A^s} y_{\ddagger}^s z_{\ddagger}^s - \frac{(\vec{\omega}^s \times \vec{G}^s) \cdot \vec{f}_1^s}{A^s}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2^s}{dt} &= \frac{3\beta^o n_1 n_3 + 6\gamma^o (l_1 l_3 - m_1 m_3)}{B^s} \left( \Delta_1 \vec{f}_1^c \cdot \vec{f}_2^s + \Delta_2 \vec{f}_2^c \cdot \vec{f}_2^s + \Delta_3 \vec{f}_3^c \cdot \vec{f}_2^s \right) \\ &+ 3 \frac{\mathcal{G}M_{\ddagger}}{\|\vec{r}_{\ddagger}^s\|^5} \frac{A^s - C^s + A_t^o - C_t^o}{B^s} x_{\ddagger}^s z_{\ddagger}^s - \frac{(\vec{\omega}^s \times \vec{G}^s) \cdot \vec{f}_2^s}{B^s}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_3^s}{dt} &= -\frac{3\beta^o n_1 n_2 + 6\gamma^o (l_1 l_2 - m_1 m_2)}{C^s} \left( \Delta_1 \vec{f}_1^c \cdot \vec{f}_3^s + \Delta_2 \vec{f}_2^c \cdot \vec{f}_3^s + \Delta_3 \vec{f}_3^c \cdot \vec{f}_3^s \right) \\ &+ 3 \frac{\mathcal{G}M_{\ddagger}}{\|\vec{r}_{\ddagger}^s\|^5} \frac{B^s - A^s + B_t^o - A_t^o}{C^s} x_{\ddagger}^s y_{\ddagger}^s - \frac{(\vec{\omega}^s \times \vec{G}^s) \cdot \vec{f}_3^s}{C^s} \end{aligned} \quad (5.41)$$

pour la croûte, avec

$$\Delta_1 = C^c - B^c + C_b^o - B_b^o, \quad (5.42)$$

$$\Delta_2 = C^c - A^c + C_b^o - A_b^o, \quad (5.43)$$

$$\Delta_3 = B^c - A^c + B_b^o - A_b^o. \quad (5.44)$$

On peut remarquer que le couple gravitationnel entre les couches rigides étant initialement écrit dans le repère de figure du noyau, une projection supplémentaire est nécessaire pour l'écrire dans le repère de figure de la croûte.

### 5.3 Application à Titan

Le but de cette étude est de l'appliquer à Titan. Depuis mes études précédentes (Noyelles et al., 2008; Noyelles, 2008), la mission *Cassini* a donné de nombreuses informations sur Titan. Sa forme est connue  $((2575.15 \pm 0.02) \times (2574.78 \pm 0.06) \times (2574.47 \pm 0.06))$  km avec un rayon moyen de  $2574.73 \pm 0.09$  km (Zebker et al., 2009). Par contre, 2 solutions (Tab.5.1) ont été publiées pour

son champ de gravité (Iess et al., 2010). L'une, SOL1, vient des données de 4 survols de Titan par *Cassini* dédiés à la gravitation (T11, T22, T33 et T45), alors que SOL2 utilise plus de données de *Cassini*, ainsi que de *Voyager* et *Pioneer*. Ces 2 solutions ne sont pas parfaitement compatibles. Notamment, si Titan est à l'équilibre hydrostatique, on devrait avoir  $J_2/C_{22} \approx 10/3$ , ce qui est le cas pour SOL2, mais pas pour SOL1. Par contre, la forme de Titan est trop aplatie par rapport à sa vitesse de rotation, Titan n'est donc pas à l'équilibre hydrostatique.

TABLE 5.1 – Les 2 solutions du champ de gravité de Titan (Iess et al., 2010).

	SOL1	SOL2
$\mathcal{G}M_6$	–	8978.1394 km <sup>3</sup> .s <sup>-2</sup>
$J_2$	$(3.1808 \pm 0.0404) \times 10^{-5}$	$(3.3462 \pm 0.0632) \times 10^{-5}$
$C_{21}$	$(3.38 \pm 3.50) \times 10^{-7}$	$(4.8 \pm 11.5) \times 10^{-8}$
$S_{21}$	$(-3.52 \pm 4.38) \times 10^{-7}$	$(6.20 \pm 4.96) \times 10^{-7}$
$C_{22}$	$(9.983 \pm 0.039) \times 10^{-6}$	$(1.0022 \pm 0.0071) \times 10^{-5}$
$S_{22}$	$(2.17 \pm 0.41) \times 10^{-7}$	$(2.56 \pm 0.72) \times 10^{-7}$
$J_3$	$(-1.879 \pm 1.019) \times 10^{-6}$	$(-7.4 \pm 105.1) \times 10^{-8}$
$C_{31}$	$(1.058 \pm 0.260) \times 10^{-6}$	$(1.805 \pm 0.297) \times 10^{-6}$
$S_{31}$	$(5.09 \pm 2.02) \times 10^{-7}$	$(2.83 \pm 3.54) \times 10^{-7}$
$C_{32}$	$(3.64 \pm 1.13) \times 10^{-7}$	$(1.36 \pm 1.58) \times 10^{-7}$
$S_{32}$	$(3.47 \pm 0.80) \times 10^{-7}$	$(1.59 \pm 1.05) \times 10^{-7}$
$C_{33}$	$(-1.99 \pm 0.09) \times 10^{-7}$	$(-1.85 \pm 0.12) \times 10^{-7}$
$S_{33}$	$(-1.71 \pm 0.15) \times 10^{-7}$	$(-1.49 \pm 0.16) \times 10^{-7}$
$J_2/C_{22}$	3.186 ± 0.042	3.339 ± 0.067

Plusieurs études suggèrent que la non-hydrostaticité de Titan réside essentiellement dans la croûte. Cette croûte flotte sur un océan et aurait des anomalies de masse partiellement compensées par isostasie. Cette compensation se traduirait par des variations latérales soit de l'épaisseur de la croûte (isostasie d'Airy, Nimmo & Bills (2010)), soit de sa masse volumique (isostasie de Pratt, Choukroun & Sotin (2012)). Une récente étude de la topographie de Titan au degré 3 (Hemingway et al., 2013) plaide en faveur de variations latérales.

La rotation de Titan a été observée par *Cassini*. Stiles et al. (2008) ont annoncé une obliquité importante, de l'ordre de 0.3° ou 18 minutes d'arc, ainsi qu'une rotation légèrement super-synchrone (+0.36° par an). 2 ans plus tard, un erratum (Stiles et al., 2010) maintient qu'il y a un écart à la synchronicité, mais 3 fois plus faible. Plus récemment, Meriggiola & Iess (2012) ont suggéré que Titan était en fait synchrone, et confirment une obliquité de  $(18.6 \pm 3)$  minutes d'arc à la date moyenne du 11 mars 2007, soit  $\approx 2007.2$ . Une telle obliquité, si elle correspond à un équilibre dynamique, ne peut pas être atteinte si Titan est entièrement rigide (Bills & Nimmo, 2008). La première explication satisfaisante présente dans la littérature a été publiée par Baland et al. (2011) dans le cadre d'un modèle avec océan global, moyenné sur les courtes périodes, et ne représentant pas les autres degrés de liberté. Dans cette étude, l'obliquité est forcée par une résonance entre une fréquence d'oscillations libres et une fréquence de forçage. En général, la communauté accueille froidement ce genre d'explications, car une résonance est vue comme un phénomène exceptionnel, nécessitant d'être chanceux que les paramètres du modèle, c'est-à-dire les paramètres d'intérieur, permettent au système d'être en résonance. J'espère convaincre le lecteur, dans les pages qui suivent, que cette explication est en fait tout-à-fait acceptable.

### 5.3.1 Vers un modèle d'intérieur réaliste

Nous cherchons à élaborer des modèles de Titan qui soient les plus réalistes possibles, c'est-à-dire compatibles avec la forme observée (Zebker et al., 2009) et l'un ou l'autre des champs de gravité mesurés (Iess et al., 2010). Nous construisons un ensemble de Titans en 3 étapes :

1. Élaboration de Titans hydrostatiques. Le choix de ce point de départ vient de l'idée que l'écart à l'hydrostaticité du vrai Titan est suffisamment petit pour être considéré comme une correction,
2. Application d'une anomalie de masse en surface (*top loading*) ou à l'interface croûte-océan (*bottom loading*), partiellement compensée par des variations latérales de l'épaisseur de la croûte,
3. Comparaison avec le champ de gravité. Les modèles incompatibles avec les mesures de Iess et al. (2010) ne sont pas conservés.

Pour chacun de ces modèles de Titan, on fixe au départ les masses volumiques de la croûte  $\rho_s$  et de l'océan  $\rho_o$ , ainsi que les épaisseurs de la croûte  $d_s$  et de l'océan  $d_o$ . De ces paramètres on peut déduire la taille et la masse volumique du noyau, la masse volumique de Titan  $\rho_6 = 1881 \text{ kg/m}^3$  étant connue (Iess et al., 2010). Les intervalles de variation que nous considérons comme admissibles pour nos paramètres d'intérieur sont :

- épaisseur de la croûte  $d_s$  entre 50 et 200 km,
- épaisseur de l'océan  $d_o$  entre 50 et  $400 - d_s$  km,
- masse volumique de la croûte  $\rho_s$  entre 900 et  $950 \text{ kg/m}^3$ ,
- masse volumique de l'océan  $\rho_o$  entre 950 et  $1200 \text{ kg/m}^3$ .

Le choix des masses volumiques possibles de l'océan vient de (Fortes, 2012).  $\rho_o = 950 \text{ kg/m}^3$  est proche de la masse volumique d'une solution péritectique<sup>2</sup> d'eau et de méthanol (Yergovich et al., 1971), alors que  $\rho_o = 1200 \text{ kg/m}^3$  correspond à la masse d'un mélange eutectique d'eau et de sulfate d'ammonium (Novotný & Söhnle, 1988). Les épaisseurs de croûte admissibles viennent de (Hemingway et al., 2013), et la limite de 400 km pour la profondeur de l'interface noyau-océan vient du fait qu'un océan liquide ne peut pas subsister au-delà de cette profondeur, les valeurs de pression et de température ne le permettant pas, comme le montrent les diagrammes de phase d'un océan d'eau (Sotin et al., 2010) et d'ammoniaque (Sohl et al., 2003). Même pour un océan à 270 K, ce qui est trop chaud si de l'ammoniaque est présent, la pression à la base de l'océan doit être inférieure à 0.6 GPa, ce qui correspond à une profondeur de 450 km. Ainsi 400 km semble être une limite raisonnable.

Nos Titans hydrostatiques (Étape 1) sont construits suivant la méthode donnée dans (Van Hoolst et al., 2008). Nous considérons connus le rayon moyen  $R = 2574.73 \text{ km}$  et le rayon  $b = 2574.78 \text{ km}$ . L'équation de Radau donne (cf. e.g. Jeffreys (1952)) :

---

2. D'après Wikipédia, un péritectique est un mélange de 2 corps purs dans des proportions définies, et qui fond de manière particulière : il se décompose en un liquide et en un solide, le nouveau solide étant d'une phase différente de celle du péritectique.

$$h_2 = \frac{5}{1 + \left(\frac{5}{2} - \frac{15}{4} \frac{C}{M_6 R^2}\right)^2}, \quad (5.45)$$

$$q = \frac{n_6^2 R^3}{\mathcal{G} M_6}, \quad (5.46)$$

$$\tilde{c} = b - \frac{h_2}{2} q R, \quad (5.47)$$

$$\tilde{a} = b + \frac{3}{2} q h_2 R, \quad (5.48)$$

où  $h_2$  est le nombre de Love de déplacement radial.  $\tilde{a}$  et  $\tilde{c}$  sont les rayons du Titan hydrostatique, ils doivent être très proches de  $a$  et  $c$ .  $C = C^s + C^o + C^c$  est le moment d'inertie polaire total de Titan. Les 3 rayons de chacune des 2 interfaces solide-fluide sont déterminés en propageant l'équation de Clairaut :

$$\frac{d^2 \alpha}{dr^2} + \frac{6 \rho}{r \bar{\rho}} \frac{d\alpha}{dr} - \frac{6}{r^2} \left(1 - \frac{\rho}{\bar{\rho}}\right) \alpha = 0, \quad (5.49)$$

$$\frac{d\alpha}{dr}(R) = \frac{1}{R} \left[ \frac{25}{4} q - 2\alpha(R) \right], \quad (5.50)$$

$$\alpha(R) = \frac{\tilde{a} + b - 2\tilde{c}}{\tilde{a} + b}. \quad (5.51)$$

La condition initiale (5.50) n'est pas celle donnée dans la théorie de Clairaut où un coefficient 5/2 remplace 25/4. L'origine de ce changement de coefficient est la prise en compte des marées dans le cas particulier d'un corps en rotation synchrone. De plus, on a  $\beta = 6\alpha/5 = (\tilde{a} - \tilde{b})/\tilde{a}$  à n'importe quelle distance radiale  $r$  (Van Hoolst et al., 2008).

Nous modifions ensuite (Étape 2) ces Titans hydrostatiques en introduisant une anomalie topographique  $h_t$  à la surface :

$$h_t(\psi, \phi) = h_{t1} Y_{20}(\psi) + h_{t2} Y_{22}(\psi, \phi) \quad (5.52)$$

où  $Y_{20}$  et  $Y_{22}$  sont les harmoniques sphériques du second ordre définies par

$$Y_{lm}(\psi, \phi) = \sqrt{(2 - \delta_{0m})(2l + 1) \frac{(l - m)!}{(l + m)!}} P_l^m(\cos \psi) \cos m\phi \quad (5.53)$$

pour  $m \geq 0$ .  $P_l^0 = P_l$  sont les polynômes de Legendre et  $P_l^m$  les fonctions de Legendre associées pour  $m \neq 0$  (Eq.2.20).  $\psi$  et  $\phi$  sont, comme précédemment, la colatitute et la longitude. L'équation (5.52) devient ainsi :

$$h_t(\psi, \phi) = \frac{\sqrt{5}}{2} h_{t1} (3 \cos^2 \psi - 1) + 3 \sqrt{\frac{5}{12}} h_{t2} \sin^2 \psi \cos 2\phi. \quad (5.54)$$

Soient  $\Delta a = a - \tilde{a}$ ,  $\Delta b = b - \tilde{b}$  et  $\Delta c = c - \tilde{c}$  les corrections radiales correspondant respectivement à  $(\phi = k\pi, \psi = \frac{\pi}{2} + k'\pi)$ ,  $(\phi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \psi = \frac{\pi}{2} + k'\pi)$  et  $(\psi = k'\pi)$  où  $k$  et  $k'$  sont des entiers. On a

$$\Delta c = \sqrt{5}h_{t1}, \quad (5.55)$$

$$\Delta a = -\frac{\sqrt{5}}{2}h_{t1} + 3\sqrt{\frac{5}{12}}h_{t2}, \quad (5.56)$$

dont on déduit  $h_{t1}$  et  $h_{t2}$ . Dans ce cas le rayon  $b$ , initialement choisi égal à l'observation, est modifié ainsi :

$$\Delta b = -\frac{\sqrt{5}}{2}h_{t1}. \quad (5.57)$$

Ceci nécessite d'itérer le processus jusqu'à convergence. Notre critère d'arrêt est  $|\Delta b| < 0.5$  mètre.

La compensation par isostasie implique une anomalie topographique  $h_b$  à l'interface océan-croûte, elle aussi d'ordre 2 :

$$h_b(\psi, \phi) = h_{b1}Y_{20}(\psi) + h_{b2}Y_{22}(\psi, \phi). \quad (5.58)$$

Une anomalie de masse à la surface de Titan résulte en une anomalie topographique

$$h_b = fh_t \left( \frac{R}{R - d_s} \right)^2 \frac{\rho_s}{\rho_o - \rho_s}, \quad (5.59)$$

alors qu'une anomalie de masse à l'interface océan-croûte donnera

$$h_t = fh_b \left( \frac{R - d_s}{R} \right)^2 \frac{\rho_o - \rho_s}{\rho_s}. \quad (5.60)$$

Ici,  $f \in [0 : 1]$  est le facteur de compensation isostatique.  $f = 0$  veut dire qu'il n'y a pas de compensation, la croûte est parfaitement rigide, et une seule de ses interfaces est déformée. Par contre,  $f = 1$  signifie que la compensation est totale, dans ce cas le champ de gravité n'est pas modifié.

Une fois ces modèles élaborés, ne sont conservés que ceux qui sont compatibles avec les champs de gravité publiés par Iess et al. (2010). En pratique, nous n'avons de bons résultats qu'avec une anomalie de masse sous la croûte (*bottom loading*). Nous obtenons un facteur de compensation isostatique entre 75 et 96% (Fig.5.3), ce qui est compatible avec l'analyse de la topographie d'ordre 3 de Hemingway et al. (2013).

Une fois ces modèles d'intérieur obtenus, nous simulons leur rotation, comme précédemment. Le mouvement de Titan autour de Saturne est issu de TASS1.6 (Vienne & Duriez, 1995), le plan inertiel ( $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ) est le plan moyen de l'orbite de Titan comme suggéré Sect.3.3.3, et les conditions initiales sont choisies proches de l'État de Cassini.

Nous avons obtenu 71046 modèles d'intérieur. 20546 d'entre eux sont compatibles avec SOL1 à  $3\sigma$  dont 2237 à  $1\sigma$ , et les 50500 autres sont compatibles avec SOL2 à  $3\sigma$ , dont 2665 à  $1\sigma$ . Les simulations numériques ont été faites sur 2300 ans.

### 5.3.2 Une obliquité résonnante

Nous avons obtenu des quantités de rotation concernant les 3 degrés de liberté de chacune des couches rigides. Nos librations physiques en longitude de la croûte à la fréquence orbitale varient entre 12 secondes d'arc soit 150 mètres pour une croûte de 200 km d'épaisseur, et 50 secondes

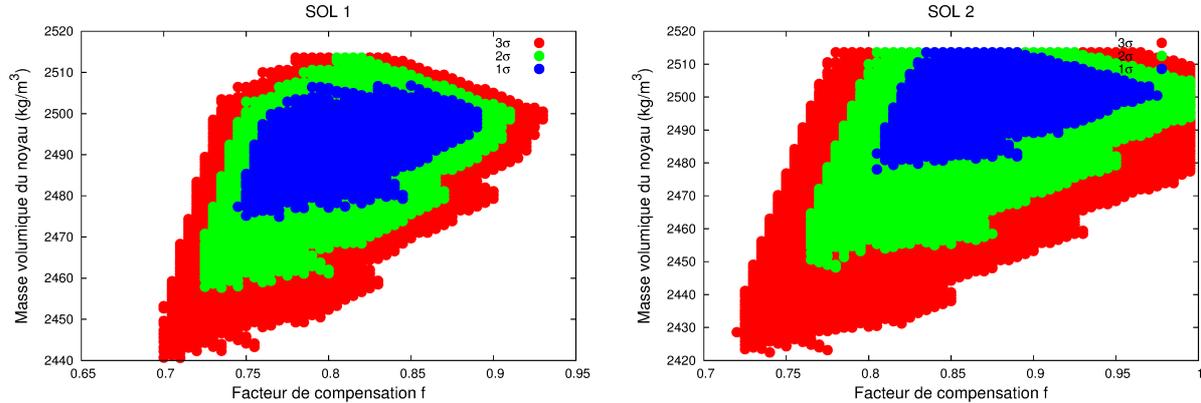


FIGURE 5.3 – Propriétés de nos Titans, en considérant une anomalie de masse à l’interface croûte-océan. Ici ne sont conservés que les modèles compatibles avec les solutions du champ de gravité publiées SOL1 et SOL2, à  $1\sigma$  en bleu,  $2\sigma$  en vert et  $3\sigma$  en rouge. On voit en particulier que SOL1 suggère entre 75 et 88% de compensation, alors que SOL2 suggère entre 80 et 96%.

d’arc soit 600 mètres pour une croûte de 50 km. Cependant, ces chiffres doivent être accueillis avec beaucoup de prudence car notre croûte n’est pas déformable. Les librations du noyau ont une amplitude entre 2.1 et 2.6 secondes d’arc.

Le mouvement polaire, habituellement négligé, se révèle culminer à 3.5 km pour la croûte et 4.5 km pour le noyau. L’obliquité moyenne du noyau, obtenue par moyenne arithmétique sur les 2300 ans couverts par chacune des simulations numériques, va de 8 à 11.5 minutes d’arc.

Le plus intéressant concerne l’obliquité de la croûte. Nous voyons (Fig.5.4 & Fig.5.5) en fait 2 régimes. L’obliquité a généralement une valeur entre 3 et 4 minutes d’arc, sauf pour certaines valeurs des paramètres d’intérieur où elle peut dépasser 20 minutes d’arc, ce qui peut expliquer les observations. Dans ce cas, on a une contrainte sur l’épaisseur de la croûte, de l’ordre de 130 km pour SOL1 et 140 km pour SOL2, ainsi que sur l’épaisseur de l’océan, de l’ordre de 260 km.

Nous avons voulu vérifier l’explication du forçage résonnant. Il s’est avéré impossible, dans la plupart des cas, d’extraire numériquement la fréquence propre quasi-résonnante des simulations numériques, d’une part car l’amplitude associée était faible, ce qui est une conséquence de la proximité de l’équilibre dynamique, et aussi car elle était très proche d’une fréquence de forçage, ce qui plaide en faveur de l’explication de la résonance. Nous avons cherché à déterminer analytiquement les fréquences des petites oscillations susceptibles d’entrer en résonance.

Notre dynamique de rotation a 6 degrés de liberté, 3 par couche rigide. Autrement dit, il existe, pour chaque simulation, 6 fréquences de petites oscillations linéairement indépendantes. Cependant, en limitant notre étude aux obliquités des 2 couches rigides, nous pouvons nous restreindre à 2 fréquences.

La détermination analytique de ces 2 fréquences, appelées dans (Noyelles & Nimmo, 2014)  $\sigma_3$  et  $\sigma_4$ , les indices 1 et 2 étant réservés au mouvement en longitude, est proposée dans (Baland et al., 2011). En adaptant leurs calculs à nos notations, nous obtenons

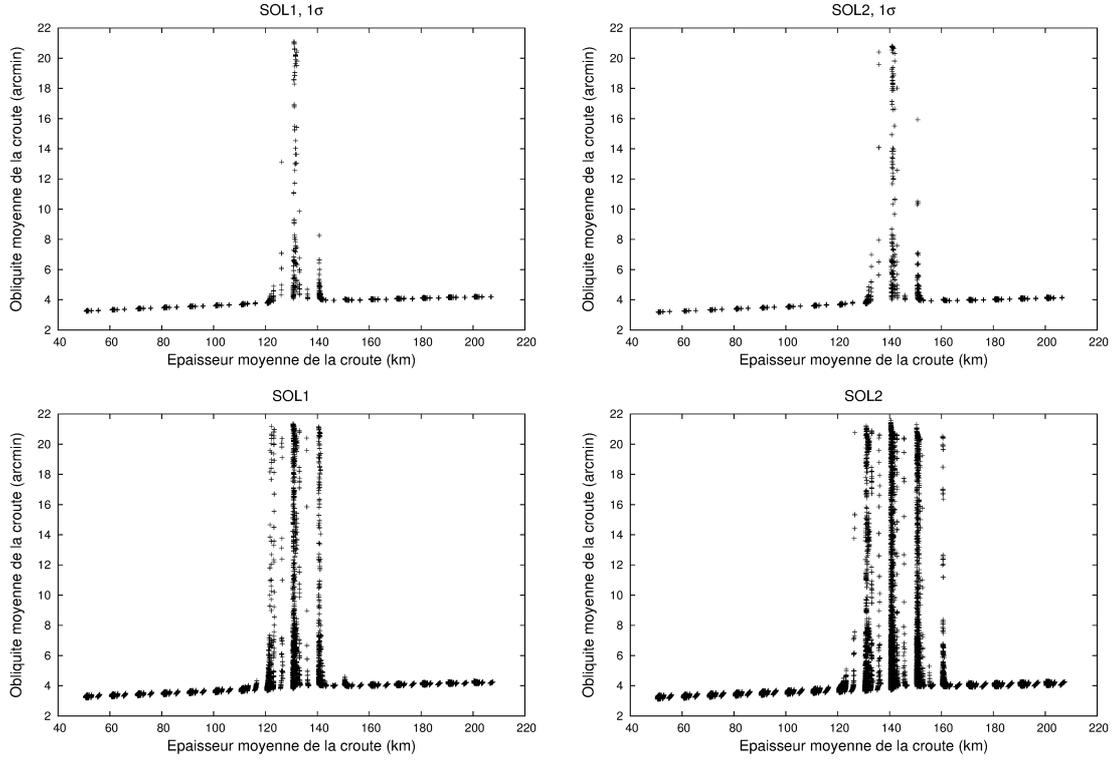


FIGURE 5.4 – Influence de l'épaisseur de la croûte sur son obliquité moyenne.

$$\sigma_3 = -\frac{Z + \sqrt{\Delta}}{2C^c C^s}, \quad (5.61)$$

$$\sigma_4 = -\frac{Z - \sqrt{\Delta}}{2C^c C^s}, \quad (5.62)$$

avec

$$Z = K(C^c + C^s) - C^s \kappa^c - C^c \kappa^s, \quad (5.63)$$

$$\Delta = -4C^c C^s (\kappa^c \kappa^s - K (\kappa^c + \kappa^s)) + Z^2, \quad (5.64)$$

$$K = \frac{3\beta^o}{n_6} (C^c - A^c + C_b^o - A_b^o), \quad (5.65)$$

$$\kappa^s = \frac{3n_6}{2} (C^s - A^s + C_t^o - A_t^o), \quad (5.66)$$

$$\kappa^c = \frac{3n_6}{2} (C^c - A^c + C_b^o - A_b^o). \quad (5.67)$$

Les périodes associées, c'est-à-dire  $T_3 = 2\pi/\sigma_3$  et  $T_4 = 2\pi/\sigma_4$ , sont respectivement entre 200 et 260 ans, et entre 10 et 55 ans. Si l'intervalle 200-260 ans ne correspond à aucun forçage évident, le forçage annuel, de période 29.46 ans, peut résonner avec  $\sigma_4$ .

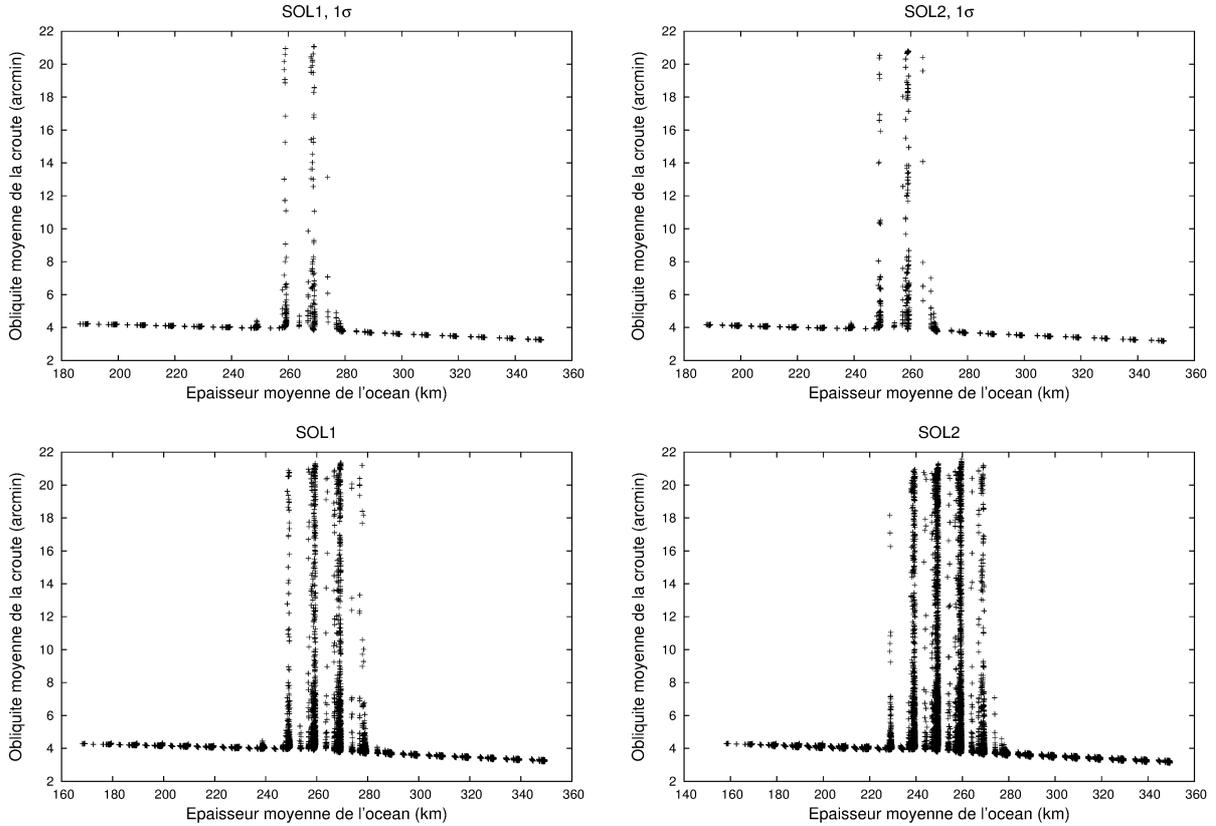


FIGURE 5.5 – Influence de l'épaisseur de l'océan sur l'obliquité de la croûte.

La Fig.5.6, dont l'axe des abscisses a été obtenu avec la formule (5.62), et l'axe des ordonnées contient les moyennes arithmétiques de l'obliquité de la croûte sur chaque simulation, confirme ce forçage résonnant.

Il apparaît que pour SOL1, 2202 de nos Titans sur 20546 tombent dans la résonance, soit 10.72%. Pour SOL2, il s'agit de 6540 Titans sur 50500, soit 12.95%. Si on se limite à  $1\sigma$ , les chiffres deviennent 234 sur 2237 pour SOL1, soit 10.46%, et 354 sur 2665 Titans pour SOL2, soit 13.28%. Ainsi, en construisant des modèles d'intérieur de Titan basés uniquement sur des considérations géophysiques, des mesures du champ de gravité et de la forme, on a entre 10 et 13% de chances d'avoir une obliquité résonnante. C'est donc une explication tout-à-fait acceptable. À cette date, la littérature n'en propose pas d'autre.

### 5.3.3 La variation temporelle de l'obliquité

Le but est ici de simuler l'évolution future de l'obliquité de Titan, afin de faire une prédiction qui pourrait être vérifiable par les observations. Nous cherchons à écrire l'obliquité de la croûte sous la forme

$$K^s(t) = A_0 + \sum_i A_i \cos \phi_i(t), \quad (5.68)$$

TABLE 5.2 – Décomposition quasi-périodique des variables liées à l'inclinaison orbitale de Titan  $I_6 \exp i\Omega_6$ , issue de TASS1.6 (Vienne & Duriez, 1995). Le 1er terme est le terme constant qui donnera le plan inertiel de référence ( $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ), le 5ème donnera la résonance (Fig.5.6).

N	Amplitude (arcmin)	Période (ans)	Cause
1	38.52	$\infty$	Soleil
2	19.18	-703.51	Aplatissement de Saturne
3	0.90	-3263.07	Précession de Japet
4	0.77	14.73	Forçage semi-annuel
5	0.13	-29.46	Forçage annuel
6	0.10	9.82	Forçage tri-annuel

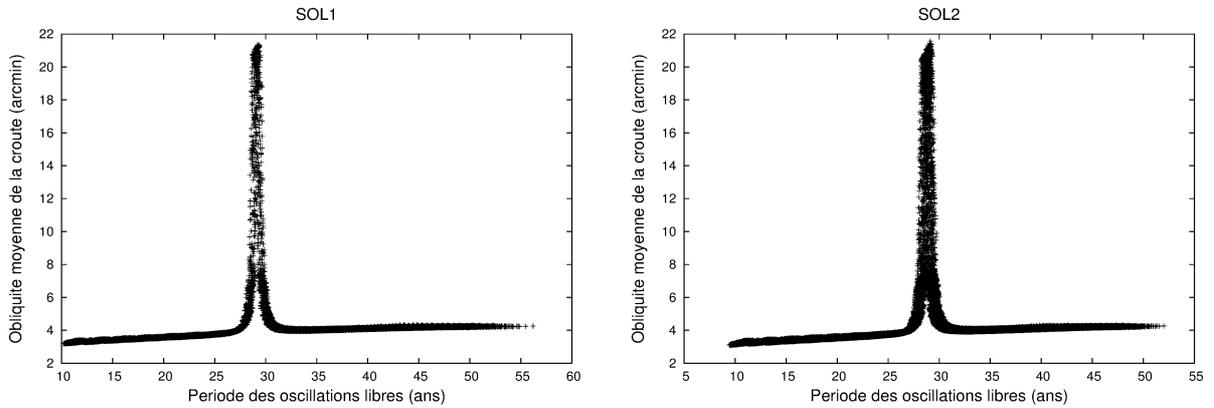


FIGURE 5.6 – Forçage résonnant de l'obliquité de Titan.

où les  $A_i$  sont des amplitudes réelles et les  $\phi_i(t)$  des fonctions linéaires du temps. Pour obtenir ces coefficients nous utilisons notre système d'équations pour simuler avec précision l'obliquité de la croûte pour 13 de nos Titans, dont l'obliquité a un comportement résonnant. Simuler avec précision veut notamment dire affiner les conditions initiales avec NAFFO (Chap.10) pour être le plus près possible de l'équilibre, qui est difficile à localiser du fait du comportement résonnant<sup>3</sup>. Nous avons dû simuler ce comportement sur 40000 ans.

Après obtention des trajectoires à l'équilibre et analyse en fréquence des obliquités, nous obtenons

$$K^s(t, \sigma_4) \approx A_0(\sigma_4) + A_1(\sigma_4) \cos \phi_1(t) + A_2(\sigma_4) \cos \phi_2(t), \quad (5.69)$$

avec

$$\phi_1(t) = 0.20436788t - 1.08611, \quad (5.70)$$

$$\phi_2(t) = 0.63989736t + 1.22080, \quad (5.71)$$

3. 2 fréquences très proches sont présentes dans le système, l'une,  $\sigma_4$ , qu'il faut enlever, et l'autre, le forçage annuel, qui restera.

l'origine des temps étant J2000. Le temps  $t$  est en années, et les angles sont en radians. Les périodes de ces oscillations forcées sont respectivement 30.74475 et 9.81906 ans. Les termes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  peuvent être reconstruits à partir de la décomposition quasi-périodique de l'inclinaison de Titan donnée par TASS1.6 (Tab.5.2), on a en effet  $\phi_1 \equiv (2) - (5)$  et  $\phi_2 \equiv (4) - (5)$ . À partir des résultats obtenus, qui sont donnés de façon exhaustive dans (Noyelles & Nimmo, 2014), on obtient après ajustement par moindres carrés :

$$A_0 = \frac{\alpha}{|\sigma_4 - \sigma|}, \quad (5.72)$$

$$A_1 = \beta \operatorname{sgn}(\sigma_4 - \sigma), \quad (5.73)$$

$$A_2 = \gamma \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_4), \quad (5.74)$$

avec

$$\alpha = (0.0176084 \pm 0.0002901) \text{ arcmin}, \quad (5.75)$$

$$\beta = (3.69780 \pm 0.01442) \text{ arcmin}, \quad (5.76)$$

$$\gamma = (0.573225 \pm 0.003937) \text{ arcmin}, \quad (5.77)$$

où  $\sigma = 2\pi/29.45716 = 0.2132991 \text{ rad/y}$  est la fréquence du forçage annuel (terme (5) dans la Tab.5.2). Le changement de signe à la traversée de la résonance exacte est révélateur d'une discontinuité topologique induite par la résonance.

$A_0$  peut être vu comme la valeur moyenne de l'obliquité (Fig.5.7, gauche). Pour obtenir la valeur de l'obliquité à J2007.2, à comparer avec la mesure de *Cassini*, nous utilisons la formule (5.69), ce qui donne la Fig.5.7, droite.

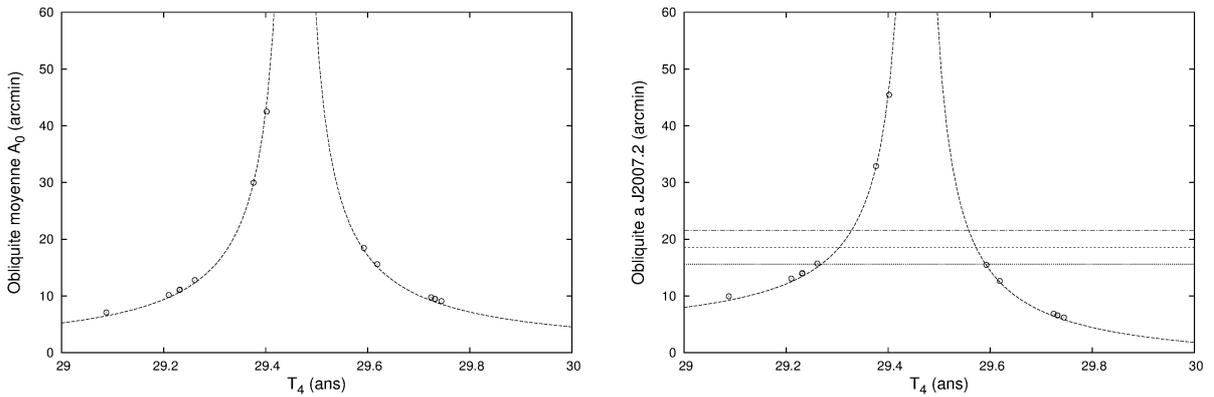


FIGURE 5.7 – Obliquités moyenne (gauche) et instantanée à J2007.2 (droite), donnée par la formule (5.69). Les ronds indiquent les 13 trajectoires que nous avons simulées, et les lignes horizontales représentent la mesure et ses barres d'erreur.

Cette figure 5.7 montre qu'il y a 2 intersections entre l'obliquité théorique et celle mesurée à J2007.2, une à gauche et une à droite de la résonance exacte. Les périodes des oscillations libres  $T_4$  correspondantes sont respectivement  $T_4 = 29.3 \pm 0.03$  pour la solution dite de gauche et  $T_4 =$

$29.572^{+0.019}_{-0.015}$  ans pour la solution dite de droite. Nous simulons l'évolution temporelle de l'obliquité dans chacun des 2 cas (Fig.5.8) et constatons 2 comportements différents : si  $T_4 < 29.46$  ans, alors l'obliquité de la croûte de Titan est décroissante sur la durée de la mission *Cassini*, et si  $T_4 > 29.46$  ans alors elle est croissante.

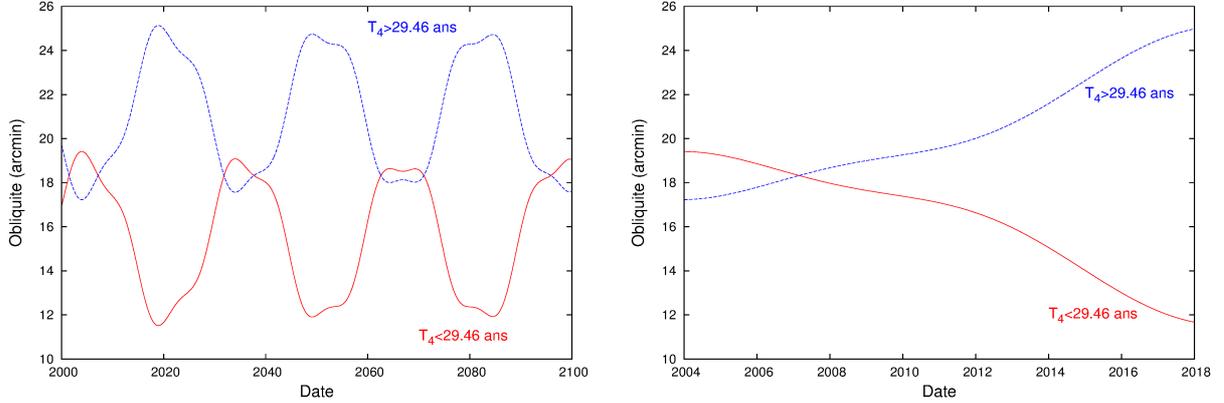


FIGURE 5.8 – Simulation de l'obliquité de Titan sur 100 ans (à gauche) et sur la durée de la mission *Cassini* (à droite).

Nous nous attendons à une variation de l'obliquité de Titan de 7 minutes d'arc. La mesure de Meriggiola & Iess (2012) suggère une incertitude de 3 minutes d'arc, a priori cette détection est donc possible. Elle permettrait dans un premier temps de vérifier la validité de la théorie, et dans un deuxième temps de déterminer si Titan est à gauche ou à droite de la résonance. On aurait ainsi de nouvelles informations sur l'intérieur.

## 5.4 Et si la croûte est élastique...

En 2010, un article de Goldreich & Mitchell (2010) a alerté la communauté scientifique sur l'importance de la prise en compte de l'élasticité de la croûte des satellites naturels. En effet, elle induit un couple de rappel significatif. Ceci a motivé sa prise en compte dans le calcul des librations en longitude (Van Hoolst et al., 2013; Jara-Orué & Vermeersen, 2014; Richard et al., 2014). Ces études ont montré que les librations en longitude pouvaient être réduites d'un facteur 5 si l'élasticité était considérée. À notre connaissance, il n'existe pas d'étude traitant la question de l'obliquité d'une croûte élastique. Dans cette Section, nous étendons 2 études existantes, (Goldreich & Mitchell, 2010) et (Richard et al., 2014), à ce problème.

### 5.4.1 Par le formalisme de Goldreich & Mitchell (2010)

L'idée de cette étude était d'estimer le déplacement de l'axe le plus long de la croûte élastique, en libration en longitude, sous l'effet de la perturbation gravitationnelle du perturbateur, écrite comme un couple de marée. Il s'agit donc d'un couple de rappel qui s'oppose à la libration en longitude. Nous allons dans un premier temps retrouver le résultat de Goldreich & Mitchell (2010) afin de valider la méthode pour l'appliquer au mouvement latitudinal.

**Couple élastique dû à un déplacement radial en longitude**

Comme précédemment on utilise une paramétrisation sphérique  $(r, \psi, \phi)$  de la croûte de Titan, où  $\phi$  est la longitude et  $\psi$  la colatitude. En considérant une libration en longitude  $\phi_T$  comme une réorientation de l'axe de marée, le tenseur des contraintes  $(\sigma)$  nous est donné par Matsuyama & Nimmo (2008) :

$$\sigma_{\psi\psi} = 3 \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu f \sin \phi_T \sin (2\phi - \phi_T) [\cos 2\psi - 5], \quad (5.78)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = 3 \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu f \sin \phi_T \sin (2\phi - \phi_T) [3 \cos 2\psi + 1], \quad (5.79)$$

$$\sigma_{\psi\phi} = 12 \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu f \sin \phi_T \cos \psi \cos (2\phi - \phi_T), \quad (5.80)$$

$$\sigma_{\phi\psi} = \sigma_{\psi\phi}, \quad (5.81)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson,  $\mu$  est la rigidité, et  $f$  l'aplatissement de la croûte. En considérant que l'angle de libration  $\phi_T$  est petit, on a

$$\begin{aligned} \sin \phi_T \sin (2\phi - \phi_T) &= \frac{1}{2} (\cos 2\phi - \cos 2\phi \cos 2\phi_T + \sin 2\phi \sin 2\phi_T) \\ &\approx \phi_T \sin 2\phi, \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} \sin \phi_T \sin (2\phi - \phi_T) &= \frac{1}{2} (\sin 2\phi - \sin 2\phi \cos 2\phi_T + \cos 2\phi \sin 2\phi_T) \\ &\approx \phi_T \cos 2\phi, \end{aligned} \quad (5.83)$$

et de plus

$$\cos 2\psi - 5 = -2 (2 + \sin^2 \psi), \quad (5.84)$$

$$3 \cos 2\psi + 1 = 2 (2 - 3 \sin^2 \psi), \quad (5.85)$$

$$f = (1 + k_f) \frac{q}{2}, \quad (5.86)$$

$$q = \frac{n_6^2 R^3}{\mathcal{G} M_6}, \quad (5.87)$$

on obtient

$$\sigma_{\psi\psi} = -3 \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu (1 + k_f) q \phi_T (2 + \sin^2 \psi) \sin 2\phi, \quad (5.88)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = 3 \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu (1 + k_f) q \phi_T (2 - 3 \sin^2 \psi) \sin 2\phi, \quad (5.89)$$

$$\sigma_{\psi\phi} = 6 \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu (1 + k_f) q \phi_T \cos \psi \cos 2\phi, \quad (5.90)$$

où  $k_f$  est le nombre de Love séculaire.

Pour calculer la dissipation d'énergie, nous avons besoin du tenseur des déformations ( $u$ ). La quantité  $u_{\psi\psi}$  est composée d'une contrainte normale  $\sigma_{\psi\psi}/E$  et d'une contrainte tangentielle  $-\nu\sigma_{\phi\phi}/E$  où  $E = 2\mu(1 + \nu)$  est le module d'Young (voir par exemple Lowrie (2011)). On obtient  $u_{\phi\phi}$  de la même façon. Le cisaillement  $u_{\psi\phi} = u_{\phi\psi}$  est proportionnel à la contrainte  $\sigma_{\psi\phi}$ , et on obtient :

$$u_{\psi\psi} = \frac{\sigma_{\psi\psi} - \nu\sigma_{\phi\phi}}{2\mu(1 + \nu)}, \quad (5.91)$$

$$u_{\phi\phi} = \frac{\sigma_{\phi\phi} - \nu\sigma_{\psi\psi}}{2\mu(1 + \nu)}, \quad (5.92)$$

$$u_{\psi\phi} = \frac{\sigma_{\psi\phi}}{2\mu}, \quad (5.93)$$

$$u_{\phi\psi} = u_{\psi\phi}. \quad (5.94)$$

L'énergie  $\mathcal{E}$  associée à un élément de la croûte est ainsi

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\sigma_{\psi\psi}u_{\psi\psi} + \sigma_{\phi\phi}u_{\phi\phi} + \sigma_{\psi\phi}u_{\psi\phi} + \sigma_{\phi\psi}u_{\phi\psi}), \quad (5.95)$$

et l'énergie élastique totale  $E_{el}$  est obtenue par intégration sur la croûte de Titan, de faible épaisseur  $d_s$  :

$$E_{el} = \int_{r=R-d_s}^{r=R} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} \mathcal{E} R^2 \sin \psi \, dr \, d\psi \, d\phi, \quad (5.96)$$

ce qui donne la formule 9 de Goldreich & Mitchell (2010) :

$$E_{el} = \frac{48\pi}{5} \left( \frac{1 + \nu}{5 + \nu} \right) (1 + k_f)^2 q^2 \mu d_s R_6^2 \phi_T^2. \quad (5.97)$$

Le couple de marée qui en résulte  $\vec{T}_{el}$  est donc :

$$\begin{aligned} \vec{T}_{el} &= - \left. \frac{\partial E_{el}}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_T} \vec{e}_\phi \\ &= - \frac{96\pi}{5} \left( \frac{1 + \nu}{5 + \nu} \right) (1 + k_f)^2 q^2 \mu d_s R^2 \phi_T \vec{e}_\phi. \end{aligned} \quad (5.98)$$

### Couple de marée s'appliquant en longitude sur la croûte

À partir de l'Éq.5.78 on obtient :

$$\sigma_{\psi\psi} = -6 \left( \frac{1 + \nu}{5 + \nu} \right) \mu f \sin \phi_T \sin (2\phi - \phi_T) (2 + \sin^2 \psi). \quad (5.99)$$

On a

$$f = h_2 \frac{R^3}{\mathcal{G}M_6} \left( \frac{\mathcal{G}M_{\uparrow}}{r^3} \right) = \frac{h_2}{2} \frac{R^3}{\mathcal{G}M_6} \left( \frac{\mathcal{G}M_{\uparrow}}{a^3} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^3 = \frac{h_2}{2} q \left( \frac{a}{r} \right)^3, \quad (5.100)$$

ce qui donne

$$\sigma_{\psi\psi} = -3 \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu h_2 q \left( 2 + \sin^2 \psi \right) \left( \frac{a}{r} \right)^3 \sin \phi_T \sin (2\phi - \phi_T), \quad (5.101)$$

$$= -\frac{3}{2} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu h_2 q \left( 2 + \sin^2 \psi \right) \left( \frac{a}{r} \right)^3 (\cos 2\phi - \cos (2(\phi - \phi_T))). \quad (5.102)$$

La libration en longitude est très proche de la libration optique, on peut donc écrire  $\phi_T = \nu_6 - \mathcal{M}_6$  où  $\nu_6$  est l'anomalie vraie et  $\mathcal{M}_6 = n_1 t = (n_6 - \dot{\omega}_6) t$  l'anomalie moyenne. On obtient directement

$$\begin{aligned} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \cos (2(\phi - \phi_T)) &= \left( \frac{a}{r} \right)^3 \cos (2(\phi + \mathcal{M}_6 - \nu_6)) \\ &= \cos (2(\phi + \mathcal{M}_6)) \left( \frac{a}{r} \right)^3 \cos 2\nu_6 \\ &+ \sin (2(\phi + \mathcal{M}_6)) \left( \frac{a}{r} \right)^3 \sin 2\nu_6. \end{aligned} \quad (5.103)$$

À partir de (Cayley, 1861; Kaula, 1966)

$$\left( \frac{a}{r} \right)^3 \cos 2\nu_6 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G_{20i}(e) \cos ((2+i)\mathcal{M}_6), \quad (5.104)$$

$$\left( \frac{a}{r} \right)^3 \sin 2\nu_6 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G_{20i}(e) \sin ((2+i)\mathcal{M}_6), \quad (5.105)$$

on obtient  $\sigma_{\psi\psi}$  développé au degré 1 en excentricité :

$$\sigma_{\psi\psi} = -\frac{3}{4} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu h_2 e q \left( 2 + \sin^2 \psi \right) (\cos(2\phi + n_1 t) - 7 \cos(2\phi - n_1 t)), \quad (5.106)$$

et de la même façon :

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{3}{4} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu h_2 e q \left( 2 - 3 \sin^2 \psi \right) (\cos(2\phi + n_1 t) - 7 \cos(2\phi - n_1 t)). \quad (5.107)$$

2 modes de marée sont impliqués, comme le montrent les termes  $\cos(2\phi - n_1 t) = \cos(2(\phi - n_1 t/2))$  et  $\cos(2\phi + n_1 t) = \cos(2(\phi + n_1 t/2))$  qui correspondent respectivement aux modes  $n_1/2$  et  $3n_1/2$ . De la même façon, on a

$$\sigma_{\psi\phi} = \frac{3}{2} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu h_2 q e \cos \psi (7 \sin(2\phi - n_1 t) - \sin(2\phi + n_1 t)) \quad (5.108)$$

et  $\sigma_{\psi\phi} = \sigma_{\phi\psi}$ . Maintenant calculons l'énergie associée à chacun de ces 2 modes de marée.

On a, pour le mode  $n_1/2$  :

$$\sigma_{\psi\psi} = -\frac{3}{4} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu h_2 e q \left( 2 + \sin^2 \psi \right) \cos(2\phi + n_1 t), \quad (5.109)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{3}{4} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu h_2 e q \left( 2 - 3 \sin^2 \psi \right) \cos(2\phi + n_1 t), \quad (5.110)$$

$$\sigma_{\psi\phi} = -\frac{3}{2} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu h_2 e q \cos \psi \sin(2\phi + n_1 t), \quad (5.111)$$

et pour le mode  $3n_1/2$  :

$$\sigma_{\psi\psi} = \frac{21}{4} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu h_2 e q (2 + \sin^2 \psi) \cos(2\phi - n_1 t), \quad (5.112)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = -\frac{21}{4} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu h_2 e q (2 - 3 \sin^2 \psi) \cos(2\phi - n_1 t), \quad (5.113)$$

$$\sigma_{\psi\phi} = \frac{21}{2} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu h_2 e q \cos \psi \sin(2\phi - n_1 t). \quad (5.114)$$

Ces formules se retrouvent dans (Goldreich & Mitchell, 2010) à l'exception de (5.114), probablement à cause d'une erreur typographique. Les énergies associées sont

$$E_{n_1/2} = \frac{3}{5} \pi \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) (h_2 e q)^2 \mu d_s R^2, \quad (5.115)$$

$$E_{3n_1/2} = \frac{147}{5} \pi \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) (h_2 e q)^2 \mu d_s R^2 = 49 E_{n_1/2}, \quad (5.116)$$

là encore je retrouve les formules de Goldreich & Mitchell (2010). Le facteur 49 entre ces 2 énergies vient du fait qu'à chaque fréquence d'excitation correspond un aplatissement  $f$  différent du corps considéré, ici la croûte de Titan, donc une réponse différente. Sans cela, l'énergie totale de marée serait nulle car la somme de ses 2 composantes s'annulerait. Le couple de marée à la fréquence  $\omega$  est  $\vec{T}_\omega = -2n_1 E_\omega / Q_\omega (\omega - n_1) \vec{e}_\phi$ , c'est-à-dire

$$\vec{T}_{n_1/2} = \frac{12\pi}{5Q_{n_1/2}} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) (h_2 e q)^2 \mu d_s R^2 \vec{e}_\phi, \quad (5.117)$$

$$\vec{T}_{3n_1/2} = -\frac{588\pi}{5Q_{3n_1/2}} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) (h_2 e q)^2 \mu d_s R^2 \vec{e}_\phi, \quad (5.118)$$

et le couple total est

$$\vec{T} = \frac{12\pi}{5} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) (h_2 e q)^2 \mu d_s R^2 \left( \frac{1}{Q_{n_1/2}} - \frac{49}{Q_{3n_1/2}} \right) \vec{e}_\phi. \quad (5.119)$$

Goldreich & Mitchell (2010) ont supposé que les 2 coefficients de dissipation  $Q_{n_1/2}$  et  $Q_{3n_1/2}$  étaient égaux.

Une fois le couple externe total  $\vec{T}_{ext}$  obtenu, composé du couple de la marée de Saturne et éventuellement du couple atmosphérique, on obtient la réponse de la croûte  $\lambda_{ext}$  avec  $\vec{T}_{ext} = \vec{T}_{el}$  (Éq.5.98), ce qui donne

$$\lambda_{ext} = \frac{5}{96\pi} \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} \right) \frac{T_{ext}}{(1+k_f)^2 q^2 \mu d_s R^2}, \quad (5.120)$$

et là encore on retrouve une formule de Goldreich & Mitchell (2010), en l'occurrence la (17).

### Les marées en latitude

Je propose ici une extension du raisonnement de Goldreich & Mitchell (2010) au mouvement en latitude. Il s'agit donc d'une contribution originale.

L'obliquité provoque une réorientation en latitude, d'angle  $\psi_R$ , donc orthogonale à l'axe de rotation. Dans ce cas le tenseur des contraintes ( $\sigma$ ) s'écrit (Matsuyama & Nimmo, 2008) :

$$\begin{aligned} \sigma_{\psi\psi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu f \sin \psi_R \\ &\times \left( 4 \cos \psi_R \sin(2\psi) \cos \phi - \sin \psi_R \left( \cos(2\psi) (3 + \cos(2\phi)) + 10 \sin^2 \phi \right) \right), \end{aligned} \quad (5.121)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu f \sin \psi_R \\ &\times \left( 2 \sin \psi_R \sin^2 \phi + 12 \cos \psi_R \sin(2\psi) \cos \phi - 3 \sin \psi_R \cos(2\psi) (3 + \cos(2\phi)) \right), \end{aligned} \quad (5.122)$$

$$\sigma_{\psi\phi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu f \sin \psi_R \sin \phi (\sin \psi_R \cos \psi \cos \phi - \cos \psi_R \sin \psi), \quad (5.123)$$

et nous incluons les librations en latitude de la façon suivante :

$$\psi_R = K^s \sin n_2 t, \quad (5.124)$$

où  $K^s$  est l'obliquité de la croûte de Titan, constante dans cette Section.  $n_2 = n_6 - \dot{\Omega}_6$  est la période des librations en latitude lorsque l'obliquité est constante. On peut déjà voir une différence fondamentale entre l'amplitude des librations en longitude, associée à une période qui est aussi celle du couple de marée, alors que l'obliquité est une déviation constante de l'axe de rotation par rapport à la normale à l'orbite, son mouvement de précession est à longue période ( $\approx 700$  ans pour un Titan non résonnant,  $\approx 29.5$  ans pour un Titan résonnant), mais le couple de marée, susceptible de provoquer une déviation de la croûte si elle est élastique, a une période très proche de la période diurnale, légèrement inférieure à 16 jours. On peut donc s'attendre à ce que l'effet de l'élasticité de la croûte sur l'obliquité soit une oscillation à courte période qui s'ajouterait au mouvement rigide à longue période. Une autre différence est que le paramètre donnant l'amplitude des librations en latitude est l'obliquité, qui n'induit pas de variation de la distance Titan-Saturne, donc de l'aplatissement  $f$  et du couple de marée, alors que l'excentricité, principale cause des librations en longitude, est associée à des variations de ce couple.

Le tenseur de contraintes ( $\sigma$ ) s'écrit ainsi :

$$\sigma_{\psi\psi} = \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu f K^s \cos \phi (\cos(2\psi - n_2 t) - \cos(2\psi + n_2 t)), \quad (5.125)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = 3 \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu f K^s \cos \phi (\cos(2\psi - n_2 t) - \cos(2\psi + n_2 t)), \quad (5.126)$$

$$\sigma_{\psi\phi} = -2 \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right) \mu f K^s \sin \phi (\cos(\psi - n_2 t) - \cos(\psi + n_2 t)). \quad (5.127)$$

En gardant à l'esprit que l'angle  $\psi$  est en moyenne constant puisqu'il correspond à une direction orthogonale à l'axe de rotation, nous voyons 4 modes apparaître :  $-n_2$ ,  $-n_2/2$ ,  $n_2/2$  et  $n_2$ . Nous calculons l'énergie comme précédemment, ce qui donne :

$$E_{-n_2} = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right)^2 \mu K^{s2} f^2 (3 - \cos 2n_2 t), \quad (5.128)$$

$$E_{-n_2/2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right)^2 \left( \frac{5-3\nu}{1+\nu} \right) \mu K^{s2} f^2 \left( 1 - \frac{\cos 2n_2 t}{15} \right), \quad (5.129)$$

$$E_{n_2/2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right)^2 \left( \frac{5-3\nu}{1+\nu} \right) \mu K^{s2} f^2 \left( 1 - \frac{\cos 2n_2 t}{15} \right) = E_{-n_2/2}, \quad (5.130)$$

$$E_{n_2} = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{1+\nu}{5+\nu} \right)^2 \mu K^{s2} f^2 (3 - \cos 2n_2 t) = E_{-n_2}. \quad (5.131)$$

Une conséquence de la symétrie de ces 4 énergies est que le couple résultant est nul. En effet, toutes les théories de marée s'accordent à dire que la dissipation de marée ne dépend pas du signe de la fréquence d'excitation, autrement dit, pour toute fréquence de marée  $\omega$ , on a  $Q_\omega = Q_{-\omega}$ .

Cette méthode ne permet donc pas de mettre en évidence un éventuel impact de l'élasticité de la croûte sur son obliquité.

#### 5.4.2 Par le formalisme de Richard et al. (2014)

Dans (Richard et al., 2014), les auteurs étudient l'impact de l'élasticité sur les librations en longitude par le biais d'une composante variable dans le tenseur d'inertie.

Le potentiel de marée de Saturne agissant sur Titan s'écrit (Kaula, 1964, Eq.1)

$$U = \frac{\mathcal{G}M_{\uparrow}}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{R}{a} \right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_l^m(\cos \psi) \sum_{p,q} F_{lmp}(K^s) G_{lpq}(e) \quad (5.132)$$

$$\times \left( \begin{array}{l} \cos m\phi \left( \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right)_{l-m \text{ pair}}^{l-m \text{ pair}} \\ \sin m\phi \left( \begin{array}{l} \sin \\ -\cos \end{array} \right)_{l-m \text{ impair}}^{l-m \text{ pair}} \end{array} \left( (l-2p)\omega_6 + (l-2p+q)\mathcal{M}_6 + m(\delta\Omega_6 - \theta^*) \right) \right),$$

où  $\omega_6 = \varpi_6 - \Omega_6$  est l'argument du péricentre de Titan.  $\theta^*$  est le temps sidéral du méridien de référence, il découle de la rotation synchrone  $\theta^* = \lambda_6 = \mathcal{M}_6 + \omega_6 + \delta\Omega_6$ . Les fonctions  $G$  ont déjà été présentées, et les fonctions  $F$  sont les fonctions en inclinaison de Kaula (1964). Nous faisons les approximations suivantes :

- $l=2$ ,
- nous nous limitons au degré 1 en excentricité  $e$  et en obliquité  $K^s$ ,

ce qui donne

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\mathcal{G}M_{\tilde{h}}}{a} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \sum_{m=0}^2 \frac{(2-m)!}{(2+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_2^m(\cos \psi) \sum_{p,q} F_{2mp}(K^s) G_{2pq}(e) \\
&\times \left( \begin{array}{l} \cos m\phi \left(\frac{\cos}{\sin}\right)_{2-m \text{ pair}}^{2-m \text{ pair}} \\ \sin m\phi \left(\frac{\sin}{-\cos}\right)_{2-m \text{ impair}}^{2-m \text{ pair}} \end{array} \left( (2-2p-m)\omega_6 + (2-2p+q-m)\mathcal{M}_6 \right) \right), \quad (5.133)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
U &= n^2 R^2 \left( P_2^0(\cos \psi) F_{201}(K^s) (G_{210}(e) + (G_{21-1}(e) + G_{211}(e)) \cos \mathcal{M}_6) \right. \\
&+ \frac{P_2^1(\cos \psi)}{3} (F_{210}(K^s) G_{200}(e) \sin(\mathcal{M}_6 + \omega_6 - \phi) + F_{211}(K^s) G_{210}(e) \sin(-\mathcal{M}_6 - \omega_6 - \phi)) \\
&\left. + \frac{P_2^2(\cos \psi)}{12} F_{220}(K^s) (G_{20-1}(e) \cos(2\phi + \mathcal{M}_6) + G_{200}(e) \cos 2\phi + G_{201}(e) \cos(2\phi - \mathcal{M}_6)) \right), \quad (5.134)
\end{aligned}$$

avec

$$F_{201}(K^s) = \frac{3 \sin^2 K^s}{4} - \frac{1}{2}, \quad (5.135)$$

$$F_{210}(K^s) = \frac{3}{4} \sin K^s (1 + \cos K^s), \quad (5.136)$$

$$F_{211}(K^s) = -\frac{3}{2} \sin K^s \cos K^s, \quad (5.137)$$

$$F_{220}(K^s) = \frac{3}{4} (1 + \cos K^s)^2, \quad (5.138)$$

$$G_{20-1}(e) = -\frac{1}{2}e + \frac{1}{16}e^3 + \mathcal{O}(e^4), \quad (5.139)$$

$$G_{200}(e) = 1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4 + \mathcal{O}(e^6), \quad (5.140)$$

$$G_{201}(e) = \frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 + \mathcal{O}(e^5), \quad (5.141)$$

$$G_{21-1}(e) = \frac{3}{2}e + \frac{27}{16}e^3 + \mathcal{O}(e^5), \quad (5.142)$$

$$G_{210}(e) = (1 - e^2)^{-3/2}, \quad (5.143)$$

$$G_{211}(e) = \frac{3}{2}e + \frac{27}{16}e^3 + \mathcal{O}(e^5), \quad (5.144)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
U &= n^2 R^2 \left( -\frac{P_2^0(\cos \psi)}{2} (1 + 3e \cos \mathcal{M}_6) + P_2^1(\cos \psi) K^s \cos \phi \sin(\mathcal{M}_6 + \omega_6) \right. \\
&\left. + P_2^2(\cos \psi) \left( \frac{\cos 2\phi}{4} + e \left( \frac{3}{4} \cos 2\phi \cos \mathcal{M}_6 + \sin 2\phi \sin \mathcal{M}_6 \right) \right) \right). \quad (5.145)
\end{aligned}$$

ce potentiel étant compatible au degré 1 avec celui donné par (Jara-Orué & Vermeersen, 2011, Éq.2) avec l'exception que cette dernière référence considère une rotation légèrement super-synchrone, et avec celui donné par (Giampieri, 2004, Éq.9), qui ne considèrerait pas l'obliquité. On considère que la déformation de la croûte est due au potentiel de marée et au potentiel centrifuge  $U_r$  :

$$U_r = \frac{\mathcal{G}M_6 q}{R} \frac{1}{3} \left(1 - P_2^0(\cos \psi)\right), \quad (5.146)$$

avec

$$q = \frac{n_6^2 R^3}{\mathcal{G}M_6}. \quad (5.147)$$

Richard et al. (2014) ont considéré une décomposition d'ordre 2 en harmoniques sphériques du rayon de Titan, suivant Hinderer et al. (1982). Ils ont posé

$$r(r_0, \psi, \phi) = r_0 + u_r(r_0, \psi, \phi) \quad (5.148)$$

avec

$$u_r(r_0, \psi, \phi) = r_0 \left( \sum_{j=0}^2 P_2^j(\cos \psi) (d_{2,j} \cos j\phi + e_{2,j} \sin j\phi) \right). \quad (5.149)$$

On a

$$u_r(r_0, \psi, \phi) = \frac{H(r_0)}{g(R)} V_2, \quad (5.150)$$

où  $g(R)$  représente la gravité de surface de Titan ( $1.35 \text{ m/s}^2$ ) et  $V_2 = U + U_r$  est le potentiel perturbateur.  $H$  est une fonction radiale adimensionnée correspondant au nombre de Love  $h_2$  à la surface. On peut la considérer constante sur la fine épaisseur de la croûte. Nous obtenons directement :

$$d_{2,0} = -n_6^2 R^2 \left( \frac{5}{6} + \frac{3}{2} e \cos \mathcal{M}_6 \right) \frac{h_2}{r_0 g(R)}, \quad (5.151)$$

$$d_{2,1} = n_6^2 R^2 \frac{h_2}{r_0 g(R)} K^s \sin(\mathcal{M}_6 + \omega_6), \quad (5.152)$$

$$d_{2,2} = \frac{n_6^2 R^2}{4} \frac{h_2}{r_0 g(R)} (1 + 3e \cos \mathcal{M}_6), \quad (5.153)$$

$$e_{2,1} = 0, \quad (5.154)$$

$$e_{2,2} = \frac{3n_6^2 R^2}{4} \frac{h_2}{r_0 g(R)} e \sin \mathcal{M}_6. \quad (5.155)$$

Les composantes du tenseur d'inertie de la croûte s'écrivent

$$I_{11} = \iiint \rho(r)r^4(\sin^2 \psi \sin^2 \phi + \cos^2 \psi) \sin \psi \, dr \, d\psi \, d\phi, \quad (5.156)$$

$$I_{22} = \iiint \rho(r)r^4(\sin^2 \psi \cos^2 \phi + \cos^2 \psi) \sin \psi \, dr \, d\psi \, d\phi, \quad (5.157)$$

$$I_{33} = \iiint \rho(r)r^4 \sin^3 \psi \, dr \, d\psi \, d\phi, \quad (5.158)$$

$$I_{12} = \frac{1}{2} \iiint \rho(r)r^4 \sin^3 \psi \sin 2\phi \, dr \, d\psi \, d\phi, \quad (5.159)$$

$$I_{13} = \iiint \rho(r)r^4 \sin^2 \psi \cos \psi \cos \phi \, dr \, d\psi \, d\phi, \quad (5.160)$$

$$I_{23} = \iiint \rho(r)r^4 \sin^2 \psi \cos \psi \sin \phi \, dr \, d\psi \, d\phi. \quad (5.161)$$

Pour inclure les déformations radiales de la croûte dans le tenseur d'inertie, faisons le changement de variables suivant :

$$r = r_0 \left( 1 + \sum_{j=0}^2 P_2^j(\cos \psi) (d_{2,j} \cos j\phi + e_{2,j} \sin j\phi) \right), \quad (5.162)$$

$$\frac{dr}{dr_0} = \frac{r}{r_0} + r_0 \sum_{j=0}^2 P_2^j(\cos \psi) \left( \frac{dd_{2,j}}{dr_0} \cos j\phi + \frac{de_{2,j}}{dr_0} \sin j\phi \right), \quad (5.163)$$

et avec

$$\rho(r) \approx \rho(r_0), \quad (5.164)$$

$$\frac{d}{dr_0} \left( r_0^5 (1 + u_r)^5 \right) = 5r_0^4 (1 + u_r)^4 \left( 1 + u_r + r_0 \frac{du_r}{dr_0} \right), \quad (5.165)$$

$$(5.166)$$

nous avons, pour chacune des intégrales (5.156) à (5.161), la forme suivante

$$I_{\alpha\beta} = \int_{r_0=R-d_s}^{r_0=R} \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \rho(r_0) \left[ r_0^4 + \frac{d(d_{20}r_0^5)}{dr_0} P_2^0(\cos \psi) + \frac{d(d_{21}r_0^5)}{dr_0} P_2^1(\cos \psi) \cos \phi \right. \\ \left. + \frac{d(d_{22}r_0^5)}{dr_0} P_2^2(\cos \psi) \cos 2\phi + \frac{d(e_{22}r_0^5)}{dr_0} P_2^2(\cos \psi) \sin 2\phi \right] \mathcal{F}_{\alpha\beta}(\psi, \phi) \, dr_0 \, d\psi \, d\phi \quad (5.167)$$

avec

$$\mathcal{F}_{11}(\psi, \phi) = (\sin^2 \psi \sin^2 \phi + \cos^2 \psi) \sin \psi, \quad (5.168)$$

$$\mathcal{F}_{22}(\psi, \phi) = (\sin^2 \psi \cos^2 \phi + \cos^2 \psi) \sin \psi, \quad (5.169)$$

$$\mathcal{F}_{33}(\psi, \phi) = \sin^3 \psi, \quad (5.170)$$

$$\mathcal{F}_{12}(\psi, \phi) = \frac{1}{2} \sin^3 \psi \sin 2\phi, \quad (5.171)$$

$$\mathcal{F}_{13}(\psi, \phi) = \sin^2 \psi \cos \psi \cos \phi, \quad (5.172)$$

$$\mathcal{F}_{23}(\psi, \phi) = \sin^2 \psi \cos \psi \sin \phi, \quad (5.173)$$

ce qui donne

$$I_{11} = \frac{8\pi}{3} \int_{R-d_s}^R \rho_s \left( r_0^4 + \frac{1}{10} \frac{d(d_{2,0}r_0^5)}{dr_0} - \frac{3}{5} \frac{d(d_{2,2}r_0^5)}{dr_0} \right) dr_0, \quad (5.174)$$

$$I_{22} = \frac{8\pi}{3} \int_{R-d_s}^R \rho_s \left( r_0^4 + \frac{1}{10} \frac{d(d_{2,0}r_0^5)}{dr_0} + \frac{3}{5} \frac{d(d_{2,2}r_0^5)}{dr_0} \right) dr_0, \quad (5.175)$$

$$I_{33} = \frac{8\pi}{3} \int_{R-d_s}^R \rho_s \left( r_0^4 - \frac{1}{5} \frac{d(d_{2,0}r_0^5)}{dr_0} \right) dr_0, \quad (5.176)$$

$$I_{12} = \frac{8\pi}{5} \int_{R-d_s}^R \rho_s \frac{d(e_{2,2}r_0^5)}{dr_0} dr_0, \quad (5.177)$$

$$I_{13} = \frac{4\pi}{5} \int_{R-d_s}^R \rho_s \frac{d(d_{2,1}r_0^5)}{dr_0} dr_0, \quad (5.178)$$

$$I_{23} = 0, \quad (5.179)$$

sans oublier bien sûr  $I_{21} = I_{12}$ ,  $I_{31} = I_{13}$  et  $I_{32} = I_{23}$ . Les formules (5.174) à (5.176) sont les mêmes que (Richard et al., 2014, Éq.13-15), alors que  $I_{12}$  y est donné avec un coefficient  $-8\pi/15$ . En remplaçant les coefficients  $d_{i,j}$  et  $e_{i,j}$  par leurs expressions (5.151) à (5.155) et en linéarisant par rapport à l'épaisseur de la croûte  $d_s$ , nous obtenons

$$I_{11} = \frac{8\pi}{3} \rho_s d_s R^4 \left( 1 - \frac{2}{5} n_6^2 R \frac{h_2}{g(R)} \left( \frac{7}{3} + 6e \cos \mathcal{M}_6 \right) \right), \quad (5.180)$$

$$I_{22} = \frac{8\pi}{3} \rho_s d_s R^4 \left( 1 + \frac{2}{5} n_6^2 R \frac{h_2}{g(R)} \left( \frac{2}{3} + 3e \cos \mathcal{M}_6 \right) \right), \quad (5.181)$$

$$I_{33} = \frac{8\pi}{3} \rho_s d_s R^4 \left( 1 + 2n_6^2 R \frac{h_2}{g(R)} \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{5} e \cos \mathcal{M}_6 \right) \right), \quad (5.182)$$

$$I_{12} = \frac{24\pi}{5} \rho_s n_6^2 d_s R^5 \frac{h_2}{g(R)} e \sin \mathcal{M}_6, \quad (5.183)$$

$$I_{13} = \frac{16\pi}{5} \rho_s n_6^2 d_s R^5 \frac{h_2}{g(R)} K^s \sin(\mathcal{M}_6 + \omega_6), \quad (5.184)$$

$$I_{23} = 0. \quad (5.185)$$

On voit donc que l'élasticité de la croûte la rend déformable, et que les déformations ont une période proche de la période diurne, ou période orbitale de Titan. En fait, 2 fréquences interviennent au 1er degré en excentricité / obliquité : celle de l'anomalie moyenne  $\mathcal{M}_6$ , notée  $n_1$ , et celle de  $\mathcal{M}_6 + \omega_6$ , notée  $n_2$ . La première, de période 15.9464 jours, intervient en longitude et est liée à l'excentricité de Titan, alors que la deuxième, de période 15.9445 jours, intervient en latitude et est liée à l'obliquité.

### 5.4.3 Synthèse

Ces 2 méthodes indiquent que si la perturbation en longitude due à l'élasticité de la croûte à la même période que les librations non élastiques, et ainsi doivent affecter son amplitude, ce n'est pas le cas pour les librations en latitude, la perturbation ayant une période bien plus courte que celles

liées au mouvement de précession du pôle de rotation. On s'attend donc à des libérations à courte période additionnelles, qui ne devraient pas affecter le mouvement de précession rigide.

## 5.5 Conclusions et perspectives

Notre étude confirme que l'explication d'une obliquité résonnante pour Titan initialement donnée par (Baland et al., 2011) est tout-à-fait acceptable. De plus, elle implique des contraintes sur l'intérieur, en particulier l'épaisseur de la croûte, ou profondeur de l'océan, de l'ordre de 130 - 140 km.

Au moins 2 observations peuvent être interprétées comme une détection de l'océan global. La première est une résonance de Schumann dans l'atmosphère de Titan (Simões et al., 2007; Béghin et al., 2010, 2012), qui suggère la présence d'une couche liquide conductrice, contenant de l'ammoniaque, à une profondeur entre 55 et 80 km. Il s'agit d'un phénomène non linéaire qui n'est peut-être, de nos jours, pas encore bien compris. La deuxième est la mesure d'un nombre de Love élevé de Titan ( $k_2 \approx 0.6$ ) par Iess et al. (2012) à partir des mesures des variations diurnes du champ de gravité de Titan. Cette mesure est interprétée par Mitri et al. (2014) comme la preuve que la croûte de Titan a moins de 100 km d'épaisseur. Par contre, une étude de la topographie d'ordre 3 par Hemingway et al. (2013) suggère une croûte plus épaisse, qui pourrait atteindre 200 km. Cette même étude montre qu'une croûte aussi épaisse n'est pas incompatible avec la mesure de  $k_2$  de Iess et al. (2012). Pour résumer, il n'y a pas, pour l'instant, dans la littérature, d'accord sur l'épaisseur de la croûte de Titan. Notre étude participe donc au débat.

La communauté attend la prise en compte future de plus en plus d'effets physiques, comme l'élasticité de la croûte ou les effets non linéaires dans le fluide. Si l'élasticité peut avoir une influence prépondérante dans les libérations en longitude (Goldreich & Mitchell, 2010; Richard et al., 2014), nous pensons qu'elle ne ferait qu'ajouter une oscillation rapide à un mouvement lent. Néanmoins, une étude complète des effets de l'élasticité permettrait de trancher cette question. Une piste pour traiter ce problème est de partir de la méthode présentée dans (Jara-Orué & Vermeersen, 2014), qui utilise des convolutions pour tenir compte d'un comportement de la croûte qui dépend de la fréquence d'excitation. Une prise en compte complète des effets non linéaires dans le fluide nécessiterait de résoudre l'équation de Navier-Stokes. Actuellement, les approches les plus satisfaisantes utilisent des codes numériques d'éléments finis.

Pour ma part, je recommande également de se poser la question de l'existence, le nombre, la position et la stabilité des États de Cassini d'un corps en rotation synchrone contenant un océan global. Ces États sont connus pour un corps rigide (Sect.2.3.3), mais pas pour un intérieur comme celui de cette section. Par exemple, on ne sait pas si d'autres équilibres sont possibles. Une étude mathématique de ces équilibres représenterait donc une réelle avancée. Il est envisageable de le faire à partir d'une formulation Hamiltonienne.



Deuxième partie

**Mercure en résonance 3 :2**



## Chapitre 6

# Introduction : l'exploration de Mercure

La planète Mercure est connue depuis l'antiquité comme la planète des voyageurs. Sa proximité au Soleil ne la rend en effet observable que le matin et le soir, les voyageurs pouvaient donc la voir à leur départ et à leur arrivée. Ainsi, Mercure est essentiellement visible quand elle est basse sur l'horizon, quand le Soleil est occulté, mais aussi quand l'atmosphère, plus épaisse sur l'horizon, gêne le plus son observation.

Sa rotation en fait un cas unique dans le Système Solaire car elle est en résonance spin-orbite 3 :2, sa période de révolution autour du Soleil étant de 88 jours et celle de rotation 58 jours. Le Chapitre 9 lève le voile sur l'origine de cette configuration. Cette résonance a été découverte par des observations radar de Pettengill & Dyce (1965) faites à Arecibo (Porto-Rico). Cette vitesse de rotation a depuis été maintes fois confirmée (McGovern et al., 1965; Shapiro, 1967; Chapman, 1967; Smith & Reese, 1968; Goldstein, 1971; Klaasen, 1975), et des libérations en longitude ont même été détectées, toujours par observation radar depuis la Terre (Margot et al., 2007, 2012).

Ce sont les missions spatiales qui ont le plus permis de faire progresser notre connaissance de Mercure. À cette date, elle n'a été visitée que 2 fois, par les missions américaines Mariner 10 (1974-1975) et MESSENGER, en orbite depuis le 18 mars 2011. Une mission européen-japonaise, BepiColombo, est prévue pour être lancée en juillet 2016 et pour être mise en orbite autour de Mercure en janvier 2024. La raison pour laquelle il y a si peu de missions est que Mercure est une cible difficile à atteindre avec une vitesse suffisamment faible pour acquérir des données, une mise en orbite étant encore plus difficile. La proximité du Soleil accélère naturellement la sonde, il faut donc utiliser plusieurs assistances gravitationnelles afin de suffisamment la décélérer. De plus, les instruments doivent être dimensionnés pour résister à de hautes températures.

### 6.1 Mariner 10 (NASA)

La mission Mariner 10 est le premier cas d'utilisation de l'assistance gravitationnelle. Après son lancement le 3 novembre 1973 par une fusée Atlas-Centaur depuis Cap Canaveral, elle a en effet survolé Vénus le 5 février 1974 à 5794 km d'altitude avant de faire un premier survol de Mercure le 29 mars 1974. Durant la conception de la mission, il était initialement prévu de faire un seul survol de Mercure. Mais Giuseppe Colombo, alors en visite au JPL, a fait remarquer que la période orbitale de la sonde autour du Soleil serait alors le double de celle de Mercure, permettant d'autres

survols. Il y a eu au total 3 survols (Balogh et al., 2007).

Le premier survol de Mercure a eu lieu le 29 mars 1974 à 705 km d'altitude. Il a permis les premières images de cratères, mais surtout la découverte du champ magnétique interne (Ness et al., 1974, 1975, 1976). Le deuxième survol a eu lieu le 21 septembre 1974, à une altitude bien plus élevée. Il a permis la cartographie de 45% de la surface de la planète. Le troisième survol a eu lieu le 16 mars 1975 à 327 km d'altitude, et a confirmé les observations du champ magnétique. Ces survols ont également permis une première détection des paramètres du champ de gravité  $J_2$  et  $C_{22}$  (Tab.6.1 & Anderson et al. (1987)). Un bilan de Mariner 10 est proposé dans (Strom, 1979). L'essentiel de la connaissance de Mercure due à Mariner 10 est resté d'actualité pendant environ 35 ans.

## 6.2 MESSENGER (NASA)

La mission MESSENGER (MErcury Surface, Space ENvironment, GEochemistry, and Ranging) a été sélectionnée par la NASA en 1999. Ses principaux objectifs sont de déterminer la composition de Mercure, d'accumuler des informations sur son histoire géologique, de caractériser son champ magnétique et d'analyser son exosphère (Solomon et al., 2001; Solomon, 2003; McNutt et al., 2006). En conséquence, on attendait notamment de MESSENGER une cartographie complète de Mercure, un inventaire de ses cratères, ainsi qu'une bonne connaissance de son champ de gravité. Elle a été lancée le 3 août 2004 par une fusée Boeing Delta II depuis Cap Canaveral. Avant d'atteindre Mercure, elle a effectué un survol de la Terre le 2 août 2005 ainsi que 2 survols de Vénus les 24 octobre 2006 et 5 juin 2007. Elle a ensuite effectué 3 survols de Mercure, les 14 janvier et 6 octobre 2008, et le 29 septembre 2009, avant d'être finalement mise sur orbite le 18 mars 2011, à l'origine pour un an. MESSENGER est à cette date toujours en orbite autour de Mercure, et la fin de la mission est prévue pour mars 2015.

Une cartographie complète de Mercure a été réalisée, qui a permis de dénombrer 46 cratères d'impact, certains ou probables, de diamètre supérieur à 300 km (Fassett et al., 2012). Le plus gros d'entre eux, Caloris, a un diamètre de 1550 km. La densité de ces cratères sur la surface est inférieure à celle de la Lune. De plus, on constate une claire asymétrie est-ouest. Wiczorek et al. (2012) expliquent cette asymétrie par une ancienne rotation synchrone de Mercure, alors que Fassett et al. (2012) semblent privilégier un renouvellement différentiel de la surface. Ceci semble confirmé par l'asymétrie des plaines (Denevi et al., 2009), susceptibles d'avoir enfoui les cratères.

Le champ magnétique de Mercure a été confirmé, et mesuré comme étant 100 fois plus faible que celui de la Terre (Anderson et al., 2011, 2012). De plus, il présente une anomalie nord-sud significative qui n'est pas présente sur Terre. Cao et al. (2014) expliquent cette anomalie par un champ magnétique généré par une dynamo fortement convective.

Le champ de gravité est maintenant connu avec une très bonne précision jusqu'à l'ordre 2 (Smith et al., 2012), et un signal supérieur au bruit a même été détecté jusqu'à l'harmonique 6 (Genova et al., 2013). La Tab.6.1 résume l'évolution de notre connaissance du champ de gravité de Mercure. On peut y voir une valeur surprenante du  $J_2$  obtenue à partir des 2 premiers survols de MESSENGER. On peut aussi constater que Mercure n'est pas à l'équilibre hydrostatique. On a en effet, pour un corps en résonance 3 :2,  $C_{22}/J_2 = 7e/10 + \mathcal{O}(e^2) \approx 0.14$  (Matsuyama & Nimmo, 2009), et les dernières mesures donnent  $C_{22}/J_2 \approx 0.16$ .

TABLE 6.1 – Le champ de gravité de Mercure. Les 3 dernières colonnes sont issues de MESSENGER, et les 2 dernières datent d'après la mise en orbite. Le champ de gravité publié par Smith et al. (2012) est connu sous le nom HgM002, il a été obtenu à partir des déviations de la sonde lors des 2 premiers survols ainsi que de son orbite autour de Mercure du 11 mars au 23 août 2011. La solution de Genova et al. (2013) résulte d'une analyse indépendante des données de navigation couvrant les 6 premiers mois de la mission.

	Mariner 10 (Anderson et al., 1987)	2 survols (Smith et al., 2010)	MESSENGER (Smith et al., 2012)	MESSENGER (Genova et al., 2013)
$C_{20} = -J_2$	$(-6.0 \pm 2.0) \times 10^{-5}$	$(-1.92 \pm 0.67) \times 10^{-5}$	$(-5.031 \pm 0.02) \times 10^{-5}$	$(-5.048 \pm 0.02) \times 10^{-5}$
$C_{21}$	–	–	$(-5.99 \pm 6.5) \times 10^{-8}$	$(-8.6 \pm 9.9) \times 10^{-8}$
$S_{21}$	–	–	$(1.74 \pm 6.5) \times 10^{-8}$	$(-1.37 \pm 1.24) \times 10^{-7}$
$C_{22}$	$(1.0 \pm 0.5) \times 10^{-5}$	$(8.1 \pm 0.8) \times 10^{-6}$	$(8.088 \pm 0.065) \times 10^{-6}$	$(8.081 \pm 0.067) \times 10^{-6}$
$S_{22}$	–	$(-0.3 \pm 1.2) \times 10^{-6}$	$(3.22 \pm 6.5) \times 10^{-8}$	$(0.006 \pm 6.6) \times 10^{-8}$
$C_{30} = -J_3$	–	–	$(-1.188 \pm 0.08) \times 10^{-5}$	$(-1.273 \pm 0.04) \times 10^{-5}$
$C_{40} = -J_4$	–	–	$(-1.95 \pm 0.24) \times 10^{-5}$	$(-1.698 \pm 0.10) \times 10^{-5}$
$C_{50} = -J_5$	–	–	–	$(0.19 \pm 2.40) \times 10^{-6}$
$C_{60} = -J_6$	–	–	–	$(7.04 \pm 4.79) \times 10^{-6}$
$C_{70} = -J_7$	–	–	–	$(-3.19 \pm 7.92) \times 10^{-6}$

### 6.3 BepiColombo (ESA / JAXA)

La mission BepiColombo devrait être lancée en août 2016 par une Ariane 5 depuis Kourou, et être mise en orbite autour de Mercure en janvier 2024. La mission nominale doit durer un an, mais on peut s'attendre à des extensions comme ça a été le cas pour MESSENGER. Là encore, l'assistance gravitationnelle sera utilisée, d'abord de la Lune pour quitter le champ gravitationnel de la Terre, puis de la Terre, de Vénus, et enfin de Mercure à plusieurs reprises. Parmi les principaux objectifs de la mission, on trouve une analyse de la composition de l'exosphère de Mercure, des mesures de son champ magnétique ainsi que l'étude de son interaction avec le vent solaire, une cartographie plus précise qu'avec MESSENGER, la recherche d'une activité tectonique éventuelle, ainsi qu'un test de la relativité générale (Grard & Balogh, 2001).

Pour cela, 2 sondes seront utilisées. Le MPO (Mercury Planetary Orbiter), réalisé par l'ESA, orbitera autour de Mercure en 2.3 heures sur une orbite polaire, avec un péricentre à 400 km et un apocentre à 1500 km. Il réalisera notamment la cartographie avec l'instrument BELA (BepiColombo Laser Altimeter), embarquera plusieurs spectromètres à différentes longueurs d'onde, ainsi que l'expérience de radio-science MORE (Mercury Orbiter Radio-science Experiment). Le MMO (Mercury Magnetospheric Orbiter), réalisé par la JAXA, aura une orbite bien plus elliptique (péricentre à 400 km et apocentre à 11800 km) qu'il parcourera en 9.2 heures. Il aura pour principal objectif l'étude de l'atmosphère et de la magnétosphère de Mercure (Benkhoff et al., 2010).

J'ai pour ma part été associé, à Namur, à l'expérience de radioscience MORE (Iess & Boscagli, 2001), en collaboration avec l'équipe d'Andrea Milani à Pise. Côté Namur, j'ai collaboré avec Anne Lemaître, Sandrine D'Hoedt, Julien Dufey, Julien Frouard, Christoph Lhotka et Sébastien Wailliez, dans le cadre du projet ROMEO (Rotation Of Mercury and Equations of an Orbiter), financé par la politique scientifique belge BELSPO, qui elle-même le finançait avec des fonds de l'ESA. Notre travail a consisté à modéliser la rotation de Mercure en fonction de son intérieur (Chap.7 & 8). Nous avons fourni à l'équipe de Pise une routine modélisant cette rotation à tout instant de la mission. Cette routine est destinée à faire partie d'un logiciel, fait par l'équipe de Pise, de simulation de l'expérience de radio-science, non seulement l'inversion de la rotation de Mercure, mais aussi les variations diurnes du champ de gravité de Mercure (Milani et al., 2001) et le test de relativité générale.

Le test de relativité générale va consister à mesurer les paramètres post-Newtoniens  $\beta$  et  $\gamma$ .  $\beta$  est une signature des non-linéarités dans le champ de gravité, sa mesure est dégénérée avec celle de l'aplatissement solaire  $J_2$ , et  $\gamma$  traduit la courbure de l'espace-temps. La théorie de la relativité générale prévoit que ces 2 paramètres valent strictement 1.  $\gamma = 1$  a été vérifiée à la précision  $10^{-5}$  par la sonde Cassini (Bertotti et al., 2003), à partir de la deflexion de la lumière par le Soleil.  $\beta = 1$  a été vérifié à la précision  $10^{-4}$  à partir de mesures Lunar Laser Ranging (Williams et al., 2009). Le test de BepiColombo devrait avoir une précision de l'ordre de  $10^{-5} - 10^{-6}$  (Milani et al., 2002; Ashby et al., 2007) pour  $\beta$  et  $\gamma$ .

L'expérience de rotation va consister, comme pour Titan et Mimas, à repérer des signes distinctifs sur la surface de Mercure et sur plusieurs images, afin d'ajuster un axe et une vitesse de rotation, pour déterminer une amplitude de libration diurne ainsi qu'une obliquité. Les contraintes d'ensoleillement de Mercure ainsi que la résonance spin-orbite rendent difficiles l'accumulation de telles données, Pfyffer et al. (2011) estiment que sur la durée nominale de la mission d'un an, 25 de ces points devraient être utilisables, pour donner une précision de 1.4 seconde d'arc sur la libration diurne et 1 seconde d'arc sur l'obliquité. Bien sûr, une prolongation de la mission donnerait une

meilleure précision. Cicalò & Milani (2012) suggèrent de compléter cette expérience en utilisant les variations diurnes du champ de gravité, qui contiennent de l'information sur la rotation.

La proximité du Soleil rend les missions vers Mercure rares car chères. BepiColombo devait d'ailleurs initialement inclure un atterrisseur<sup>1</sup> qui a été supprimé pour raisons budgétaires. Il est malheureusement à craindre qu'à la suite de BepiColombo, Mercure ne soit plus explorée pendant plusieurs décennies.

---

1. amercurisseur ? ahermisseur ? lander ?



## Chapitre 7

# Étude à long terme : l'obliquité

### 7.1 Introduction

Depuis la découverte de la résonance spin-orbite de Mercure, cette planète est considérée comme étant à l'État de Cassini 1 (Colombo, 1966; Peale, 1969; Beletskii, 1972), ce qui a nécessité d'étendre la définition des États de Cassini aux corps non synchrones. Ceci a été vérifié observationnellement en 2007 (Margot et al., 2007), une nouvelle fois à l'aide d'observations radar. L'avantage d'une rotation amortie, c'est-à-dire correspondant à un équilibre dynamique, est qu'elle peut être calculée théoriquement. Elle ne dépend pas, en effet, de conditions initiales, et donc ne nécessite pas de mesures. Peale (1969) a proposé la formule suivante pour l'obliquité  $\epsilon$  à l'État de Cassini 1 :

$$\epsilon = -\frac{C\dot{\Omega}\sin\iota}{C\dot{\Omega}\cos\iota + 2nM_{\text{☿}}R_{\text{☿}}^2\left(\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3\right)C_{22} - nM_{\text{☿}}R_{\text{☿}}^2(1-e^2)^{-3/2}C_{20}}, \quad (7.1)$$

où  $C$  est le moment d'inertie polaire,  $n \approx 26.0878$  rad/an est le moyen mouvement moyen de Mercure autour du Soleil,  $e \approx 0.2056$  son excentricité,  $C_{20} = -J_2$  et  $C_{22}$  les harmoniques d'ordre 2 de son champ de gravité (cf. Tab.6.1),  $M_{\text{☿}}$  sa masse, et  $R_{\text{☿}} = 2439.7$  km (Archinal et al., 2011) son rayon moyen.  $\iota$  et  $\dot{\Omega}$  sont respectivement l'inclinaison orbitale et la vitesse de précession du nœud ascendant par rapport au Plan de Laplace (Sect.3.3.2 & 7.2), dont le choix doit minimiser les variations de l'inclinaison. Son choix dépend donc de la façon dont ces variations sont minimisées, et de ce choix dépendront les valeurs de  $\iota$  et  $\dot{\Omega}$ . En pratique, les paramètres orbitaux et de forme sont bien connus, et les coefficients du champ de gravité  $M_{\text{☿}}$ ,  $C_{20}$  et  $C_{22}$  peuvent être calculés à partir des déviations de la sonde lors des survols ou de la course orbitale. Ainsi, mesurer l'obliquité  $\epsilon$  revient à mesurer le moment d'inertie polaire  $C$ .

Une détermination numérique de l'obliquité nécessite, comme pour la rotation des corps synchrones, de déterminer des conditions initiales les plus proches possibles de l'État de Cassini. Pour cela, il faut éliminer les oscillations libres. Le problème est que les périodes impliquées sont très longues par rapport à la durée de validité des éphémérides. En utilisant les valeurs du champ de gravité de Mariner 10 (Anderson et al., 1987) et  $C = 0.34M_{\text{☿}}R_{\text{☿}}^2$  comme suggéré par Milani et al. (2001), on trouve une période des oscillations libres de l'ordre de 1066 ans (D'Hoedt & Lemaître, 2004; Rambaux & Bois, 2004; Bois & Rambaux, 2007). La période de régression du nœud ascendant est, elle, de l'ordre de 250 000 ans, sous l'effet des perturbations planétaires, de l'aplatissement du Soleil et de la correction relativiste (Einstein, 1915). Par contre, les éphémérides planétaires ne sont

valides que sur quelques milliers d'années. En accord avec nos partenaires de Pise, nous utilisons la théorie du JPL DE406 (Standish, 1998), valide sur 6000 ans. Un tel intervalle de validité rend impossible l'extraction par analyse en fréquence d'un terme de 250 000 ans, et donc sa séparation d'un terme de 1066 ans. Une autre piste pour approcher l'État de Cassini serait d'introduire un amortissement numérique, artificiel, qui convergerait vers la solution amortie. Un tel amortissement doit être suffisamment lent (adiabatique) pour ne pas affecter la position d'équilibre, ce qui veut dire que le passage du régime non amorti au régime amorti doit se faire sur un nombre relativement important de périodes de ces oscillations libres... mais les éphémérides sont valides sur à peine 6 périodes.

Il faut bien comprendre que le mouvement du nœud n'est pas uniforme, ce qui complique significativement la modélisation de l'obliquité. La formule de Peale (Éq.7.1) suppose que  $\dot{\Omega}$  est constant, qu'il faut interpréter par *ne varie pas trop sur un intervalle donné*. Un choix judicieux du plan de référence, que nous appellerons Plan de Laplace, permet de renforcer ce caractère constant. On comprend alors qu'il dépend de la théorie orbitale ainsi que de l'intervalle d'étude. C'est pourquoi nous proposons une solution alternative à ce problème (Sec.7.3).

## 7.2 Différentes façons de déterminer un Plan de Laplace

Lorsque j'ai commencé à travailler sur Mercure en octobre 2007, la détermination du Plan de Laplace m'a été présentée comme un enjeu important dans la préparation de la mission BepiColombo. L'une des difficultés vient du fait qu'il y a plusieurs méthodes, non équivalentes, de le déterminer. Je présente ici 3 d'entre elles.

### 7.2.1 Moyennisation séculaire (Yseboodt & Margot, 2006)

Yseboodt & Margot (2006) proposent de se baser sur une théorie orbitale séculaire<sup>1</sup> de Mercure. Le Plan de Laplace peut être vu comme le plan sur lequel l'orbite de Mercure précède. Pour l'obtenir, ils partent de l'expression de la perturbation séculaire des autres planètes sur l'orbite de Mercure :

$$R_{sec} = \sum_{k=2}^8 \frac{\mathcal{G}M_k a_1}{8a_k^2} \left( b_{3/2}^{(1)} \left( \frac{a_1}{a_k} \right) e_1^2 - (p_1^2 + q_1^2) b_{3/2}^{(1)} \left( \frac{a_1}{a_k} \right) - 2e_1 e_k \cos(\varpi_1 - \varpi_k) b_{3/2}^{(2)} \left( \frac{a_1}{a_k} \right) \right. \\ \left. + 2(p_k p_1 + q_k q_0) b_{3/2}^{(1)} \left( \frac{a_1}{a_k} \right) \right) \quad (7.2)$$

où les planètes de Mercure à Neptune sont numérotées de 1 à 8<sup>2</sup>,  $p_k = \sin i_k \sin \delta \Omega_k$ ,  $q_k = \sin i_k \cos \delta \Omega_k$ , et les  $b_{3/2}^{(i)}(x)$  sont les coefficients de Laplace (Éq.3.48). Ils en déduisent, pour chaque planète perturbatrice, une fréquence de précession  $w_k$  déjà définie par Burns et al. (1979) :

$$w_k = \frac{M_k a_1^2 n b_{3/2}^{(1)} \left( \frac{a_1}{a_k} \right)}{4M_{\star} a_k^2} \quad (7.3)$$

1. c'est-à-dire moyennée sur les longitudes moyennes

2. Dans (Yseboodt & Margot, 2006), elles sont numérotées de 0 à 7.

où  $n$  est le moyen mouvement de Mercure et  $M_{\odot}$  la masse du Soleil. La somme des  $w_k$  donne une période de régression du nœud ascendant d'environ 235 000 ans, ici sans tenir compte de la relativité générale. On obtient

$$\frac{dq_1}{dt} = \sum_{k=2}^8 (p_k - p_1) w_k, \quad (7.4)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \sum_{k=2}^8 (q_k - q_1) w_k, \quad (7.5)$$

en considérant que l'inclinaison de chaque planète est constante. Si le plan de référence est le Plan de Laplace, alors on a  $dq_1/dt = dp_1/dt = 0$ , ce qui implique

$$p_1 = \frac{\sum_{k=2}^8 p_k w_k}{\sum_{k=2}^8 w_k}, \quad (7.6)$$

$$q_1 = \frac{\sum_{k=2}^8 q_k w_k}{\sum_{k=2}^8 w_k}. \quad (7.7)$$

On a ainsi la normale au Plan de Laplace dont la longitude et la latitude écliptiques sont respectivement  $\lambda = -8.8^\circ$  et  $\beta = 87.9^\circ$ .

### 7.2.2 Moyennisation numérique (Yseboodt & Margot, 2006)

Les mêmes auteurs ont comparé cette détermination de l'orientation du Pôle de Laplace avec celle obtenue numériquement, à partir des éphémérides orbitales DE408. Pour cela, ils ont considéré un Plan de Laplace instantané, basé sur le mouvement instantané de précession de l'orbite, ce mouvement étant lui-même obtenu par moyennisation sur un certain intervalle de temps autour de J2000. Ils ont essayé sur des intervalles de plus ou moins 1000, 2000, 4000 et 8000 ans autour de J2000 et confirment que l'approximation d'une précession constante est de moins en moins précise à mesure que l'intervalle croît. Sur un intervalle de 2000 ans centré sur J2000, ils obtiennent  $\lambda = 66.6^\circ$  et  $\beta = 86.725^\circ$ .

### 7.2.3 Plan de Laplace instantané à t=J2000 (D'Hoedt et al., 2009)

D'Hoedt et al. (2009) proposent une détermination analytique du Plan de Laplace instantané à partir de développements paraboliques de l'inclinaison et du nœud ascendant par rapport à l'écliptique :

$$i(t) \approx i_0 + i_1 t + i_2 t^2, \quad (7.8)$$

$$\Omega(t) \approx \Omega_0 + \Omega_1 t + \Omega_2 t^2, \quad (7.9)$$

les coefficients étant obtenus numériquement à partir d'une théorie orbitale (DE406 dans notre cas). Après de nombreux calculs détaillés dans l'article, les auteurs obtiennent  $\lambda = 48.1932^\circ$ <sup>3</sup> et  $\beta = 87.2883^\circ$ .

3. Cette valeur est erronée dans (D'Hoedt et al., 2009) mais corrigée dans (Noyelles & D'Hoedt, 2012).

Dans les 3 cas, on peut remarquer que les valeurs de la latitude  $\beta$  sont assez proches. Il semble par contre que la longitude  $\lambda$  soit peu contrainte, ce qui avait déjà été remarqué par ces études.

### 7.3 Notre modélisation de l'obliquité

L'étude que je présente maintenant, publiée dans (Noyelles & D'Hoedt, 2012; Noyelles & Lhotka, 2013), a été initialement motivée par notre obligation contractuelle<sup>4</sup>, à Namur, de fournir à l'équipe d'A. Milani une routine donnant, pour chaque date concernée par BepiColombo, la matrice de passage de l'écliptique à J2000 au repère des axes principaux d'inertie de Mercure. L'impératif de précision exigeait l'utilisation d'éphémérides orbitales, dans notre cas DE406, ainsi que d'une résolution numérique du problème. Les oscillations en obliquité ne pouvant être amorties suffisamment lentement, nous devions connaître avec une grande précision les variations de l'orientation du pôle de Mercure, un modèle uniformément précessant étant insuffisant.

Cette approximation n'étant plus utilisée, le Plan de Laplace perd de son intérêt<sup>5</sup>. C'est pourquoi nous utiliserons l'écliptique à J2000 comme repère de référence dans cette étude. Je présente d'abord la méthode, numérique, élaborée alors que le champ de gravité de Mercure connu était celui donné par Mariner 10, i.e. avec une incertitude de 33% sur  $J_2$  et 50% sur  $C_{22}$ , puis je donne une solution plus précise utilisant les valeurs de (Smith et al., 2012) issues des premiers mois de la mission MESSENGER. Je terminerai par une estimation d'autres effets sur l'obliquité.

#### 7.3.1 La méthode (Noyelles & D'Hoedt, 2012)

Afin de déterminer l'équilibre dynamique d'un système perturbé, comme la rotation d'un corps en résonance spin-orbite, j'obtiens d'excellents résultats en utilisant un algorithme basé sur l'analyse en fréquence (Chap.10). Ceci nécessite de modéliser le mouvement sur un intervalle de temps au minimum égal à 2 fois la plus longue période intervenant, sachant que le mouvement du pôle de Mercure est adiabatique (Bills & Comstock, 2005; Peale, 2006; Rambaux et al., 2007; D'Hoedt & Lemaître, 2008). Plus précisément, les échelles de temps associées se chiffrent en centaines de milliers d'années. Malheureusement, les éphémérides ne sont disponibles que sur plusieurs milliers d'années.

L'idée est d'extrapoler les éphémérides, pour obtenir une modélisation du mouvement sur plusieurs millions d'années. Nous obtiendrons ainsi des résultats sur plusieurs millions d'années, en sachant qu'au maximum 30 ans nous intéressent, afin de couvrir les missions MESSENGER et BepiColombo. De ce fait, nous ne cherchons pas à savoir si notre extrapolation est réaliste, nous souhaitons simplement qu'elle soit au mieux manipulable et que le résultat obtenu soit tangent à une solution réaliste sur quelques années.

Nous savons que les termes à courte période ont une influence négligeable sur les variables d'obliquité (Rambaux et al., 2007; Dufey et al., 2009). Par conséquent nous pouvons utiliser un système d'équations moyennées sur le mouvement en longitude, après expression de l'argument de la résonance  $3:2$ ,  $2\sigma = 2p - 3\lambda + \varpi$ , où l'angle de rotation  $p = l + g + h$  a été défini précédemment (Éq.2.9),  $\lambda$  est la longitude moyenne de Mercure, et  $\varpi$  la longitude du péricentre. Pour cela nous partons du Hamiltonien moyenné  $\langle \mathcal{H} \rangle$ , développé au degré 2 en excentricité  $e$  / inclinaison  $I$  :

4. Projet ROMEO, pour Rotation Of Mercury and Equations of an Orbiter. Contrat Prodex C90253 de BELSPO, pour BELgian Scientific Policy.

5. En fait, il peut être utile pour vérifier la Troisième Loi de Cassini qui stipule que l'axe du moment cinétique, la normale à l'orbite et la normale au Plan de Laplace doivent être coplanaires (Cassini, 1693; Colombo, 1966).

$$\langle \mathcal{H} \rangle = -\frac{\mathcal{G}M_{\star}M_{\oplus}}{2a} + \frac{\Lambda_1^2}{2C} + \langle V_G \rangle, \quad (7.10)$$

avec

$$\langle V_G \rangle = -\frac{\mathcal{G}^4 M_{\star}^4 M_{\oplus}^7}{(\Lambda_0 - \frac{3}{2}\Lambda_1)^6} R_{\oplus}^2 \left( \frac{1}{2} C_{20} \gamma_1 + 3C_{22} \gamma_2 \right), \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left( 1 + \frac{3e^2}{2} \right) \left( -\frac{1}{4} (-1 + 3 \cos^2 I) (-1 + 3 \cos^2 K) \right. \\ &\quad - 3 \cos I \cos K \cos(\varpi - \Omega + r) \sin I \sin K \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} (1 - \cos^2 I) (1 - \cos^2 K) \cos(2\varpi - 2\Omega + 2r) \right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{7}{32} e (1 - \cos I)^2 (1 - \cos K)^2 \cos(2\varpi + 4r + 2\sigma - 4\Omega) \\ &\quad + \frac{7}{8} e (1 - \cos I) (1 - \cos K) \sin I \sin K \cos(\varpi + 3r + 2\sigma - 3\Omega) \\ &\quad + \frac{21}{16} e \sin^2 I \sin^2 K \cos(2r + 2\sigma - 2\Omega) \\ &\quad + \frac{7}{8} e (1 + \cos I) (1 + \cos K) \sin I \sin K \cos(\varpi - r - 2\sigma + \Omega) \\ &\quad + \frac{7}{32} e (1 + \cos I)^2 (1 + \cos K)^2 \cos(2\varpi - 2\sigma). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Les variables canoniques de notre Hamiltonien sont

$$\begin{aligned} \sigma, \quad \Lambda_1 &= \frac{3}{2} n C, \\ r, \quad \Lambda_3 &= \Lambda_1 (1 - \cos K), \end{aligned} \quad (7.14)$$

où  $r$  est l'angle d'Euler défini précédemment (Éq.2.9),  $K$  est l'obliquité de Mercure par rapport à la normale à l'écliptique, et  $\Lambda_0 = M_{\oplus} \sqrt{\mathcal{G}M_{\star}}$ .  $K$  est laissé par commodité d'écriture, mais il doit être remplacé par son expression en fonction de  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_3$  pour calculer les équations de la dynamique. Les équations dérivées de ce Hamiltonien sont

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial \Lambda_1}, & \dot{\Lambda}_1 &= -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial \sigma}, \\ \dot{\Lambda}_3 &= \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial \Lambda_3}, & \dot{\Lambda}_3 &= -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial \lambda_3}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Nous avons besoin des éléments orbitaux  $e$ ,  $I$ ,  $\varpi$  et  $\Omega$ . L'idée maintenant est d'utiliser les éléments réguliers de Poincaré :

$$\begin{aligned} k &= e \cos \varpi, & h &= e \sin \varpi, \\ q &= \sin \left( \frac{I}{2} \right) \cos \Omega, & p &= \sin \left( \frac{I}{2} \right) \sin \Omega. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Dans le cadre d'une théorie orbitale quasi-périodique, on aurait

$$k(t) = \sum \alpha_i \cos(\omega_i t + \phi_i), \quad (7.17)$$

$$h(t) = \sum \alpha_i \sin(\omega_i t + \phi_i), \quad (7.18)$$

$$q(t) = \sum \beta_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i), \quad (7.19)$$

$$p(t) = \sum \beta_i \sin(\Omega_i t + \Phi_i), \quad (7.20)$$

où les  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  sont des amplitudes,  $\omega_i$ ,  $\Omega_i$  des fréquences, et  $\phi_i$ ,  $\Phi_i$  des phases à l'origine du temps. Toutes ces quantités sont constantes. Ici on utilise le fait que ces 4 quantités sont dynamiquement liées 2 par 2,  $h$  et  $k$  d'un côté, et  $q$  et  $p$  de l'autre. Les périodes impliquées sont très longues par rapport à l'intervalle de validité des éphémérides (cf. Laskar (1988) pour une décomposition quasi-périodique des mouvements orbitaux des planètes du Système Solaire), les éphémérides permettent plutôt d'obtenir des évolutions de type parabolique, c'est-à-dire

$$k(t) \approx a_k + b_k t + c_k t^2, \quad (7.21)$$

$$h(t) \approx a_h + b_h t + c_h t^2, \quad (7.22)$$

$$q(t) \approx a_q + b_q t + c_q t^2, \quad (7.23)$$

$$p(t) \approx a_p + b_p t + c_p t^2. \quad (7.24)$$

On peut remarquer que pour une décomposition quasi-périodique à 2 termes, on a autant d'équations que d'inconnues. En effet, en écrivant

$$k(t) = \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (7.25)$$

$$h(t) = \alpha_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \alpha_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2), \quad (7.26)$$

$$q(t) = \beta_1 \cos(\Omega_1 t + \Phi_1) + \beta_2 \cos(\Omega_2 t + \Phi_2), \quad (7.27)$$

$$p(t) = \beta_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \beta_2 \sin(\Omega_2 t + \Phi_2), \quad (7.28)$$

et en développant ces équations autour de la même origine  $t = 0$ , on obtient

$$a_k = \alpha_1 \cos \phi_1 + \alpha_2 \cos \phi_2, \quad (7.29)$$

$$b_k = -(\alpha_1 \omega_1 \sin \phi_1 + \alpha_2 \omega_2 \sin \phi_2), \quad (7.30)$$

$$c_k = -\frac{1}{2} (\alpha_1 \omega_1^2 \cos \phi_1 + \alpha_2 \omega_2^2 \cos \phi_2), \quad (7.31)$$

$$a_h = \alpha_1 \sin \phi_1 + \alpha_2 \sin \phi_2, \quad (7.32)$$

$$b_h = \alpha_1 \omega_1 \cos \phi_1 + \alpha_2 \omega_2 \cos \phi_2, \quad (7.33)$$

$$c_h = -\frac{1}{2} (\alpha_1 \omega_1^2 \sin \phi_1 + \alpha_2 \omega_2^2 \sin \phi_2), \quad (7.34)$$

et

$$a_q = \beta_1 \cos \Phi_1 + \beta_2 \cos \Phi_2, \quad (7.35)$$

$$b_q = -(\beta_1 \Omega_1 \sin \Phi_1 + \beta_2 \Omega_2 \sin \Phi_2), \quad (7.36)$$

$$c_q = -\frac{1}{2} (\beta_1 \Omega_1^2 \cos \Phi_1 + \beta_2 \Omega_2^2 \cos \Phi_2), \quad (7.37)$$

$$a_p = \beta_1 \sin \Phi_1 + \beta_2 \sin \Phi_2, \quad (7.38)$$

$$b_p = \beta_1 \Omega_1 \cos \Phi_1 + \beta_2 \Omega_2 \cos \Phi_2, \quad (7.39)$$

$$c_p = -\frac{1}{2} (\beta_1 \Omega_1^2 \sin \Phi_1 + \beta_2 \Omega_2^2 \sin \Phi_2). \quad (7.40)$$

Même si ces équations ne sont pas linéaires, une résolution numérique fonctionne très bien. J'ai pour ma part utilisé Maple®. En ajustant les paraboles (Éq.7.21 à 7.24) sur l'intervalle [J1000 :J3000], on obtient

$$\begin{aligned} k(t) \approx & (-2.31417 \times 10^{-11} \pm 1.785 \times 10^{-13})t^2 \\ & + (-5.52628 \times 10^{-6} \pm 7.656 \times 10^{-10})t \\ & + 0.0446629 \pm 7.53 \times 10^{-10}, \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} h(t) \approx & (-7.76651 \times 10^{-11} \pm 1.769 \times 10^{-13})t^2 \\ & + (1.43999 \times 10^{-6} \pm 7.586 \times 10^{-10})t \\ & + 0.200722 \pm 7.461 \times 10^{-7}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} q(t) \approx & (-1.21729 \times 10^{-11} \pm 7.664 \times 10^{-16})t^2 \\ & + (6.52656 \times 10^{-7} \pm 3.287 \times 10^{-12})t \\ & + 0.0406163 \pm 3.233 \times 10^{-9}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned} p(t) \approx & (-1.04673 \times 10^{-11} \pm 7.53 \times 10^{-16})t^2 \\ & + (-1.27792 \times 10^{-6} \pm 3.23 \times 10^{-12})t \\ & + 0.0456362 \pm 3.177 \times 10^{-9}, \end{aligned} \quad (7.44)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.1990903983, \\ \omega_1 &= 2.852011398 \times 10^{-5} \text{ rad/an (période : 220 307.16 ans)}, \\ \phi_1 &= 1.30845314198 \text{ rad } (74.969^\circ), \\ \alpha_2 &= 0.01094807206, \\ \omega_2 &= 4.767836272 \times 10^{-6} \text{ rad/an (période : 1 317 827.41 ans)}, \\ \phi_2 &= 2.26085090227 \text{ rad } (129.537^\circ), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 0.06094690052, \\
\Omega_1 &= -2.298222197 \times 10^{-5} \text{ rad/an (période : 273 393.29 ans)}, \\
\Phi_1 &= 0.60658814513 \text{ rad } (34.755^\circ), \\
\beta_2 &= 0.01442538649, \\
\Omega_2 &= 1.340719884 \times 10^{-5} \text{ rad/an (période : 468 642.66 ans)}, \\
\Phi_2 &= 2.28580288184 \text{ rad } (130.967^\circ).
\end{aligned}$$

On peut écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
k(t) \approx & 0.1990903983 \cos(2.852011398 \times 10^{-5}t + 1.30845314198) \\
& + 0.01094807206 \cos(4.767836272 \times 10^{-6}t + 2.26085090227), \quad (7.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(t) \approx & 0.1990903983 \sin(2.852011398 \times 10^{-5}t + 1.30845314198) \\
& + 0.01094807206 \sin(4.767836272 \times 10^{-6}t + 2.26085090227), \quad (7.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(t) \approx & 0.06094690052 \cos(-2.298222197 \times 10^{-5}t + 0.60658814513) \\
& + 0.01442538649 \cos(1.340719884 \times 10^{-5}t + 2.28580288184), \quad (7.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(t) \approx & 0.06094690052 \sin(-2.298222197 \times 10^{-5}t + 0.60658814513) \\
& + 0.01442538649 \sin(1.340719884 \times 10^{-5}t + 2.28580288184), \quad (7.48)
\end{aligned}$$

les phases étant données à J2000. La Fig.7.1 donne l'erreur induite par l'utilisation des séries trigonométriques (7.45) à (7.48). On peut voir pour les variables liées à l'inclinaison,  $q$  et  $p$ , un signal de degré 3. Il s'est en fait avéré que ces variables étaient au mieux modélisées par des polynômes de degré 3, mais nous aurions eu alors 8 équations, alors qu'une série trigonométrique à 3 éléments contient 9 inconnues. Il était donc plus pratique de se limiter au degré 2, l'erreur étant bien plus faible que pour les variables d'excentricité  $k$  et  $h$  sur l'intervalle de validité des éphémérides.

Une fois ces séries trigonométriques obtenues, elles peuvent être extrapolées sur plusieurs millions d'années sans diverger. La modélisation de l'obliquité  $K$  et de l'angle associé  $\sigma_3 = r + \Omega$  est obtenue avec :

1. Simulation numérique à long terme, en utilisant le système d'équations moyennées (7.15) et les séries trigonométriques (7.45) à (7.48) sur plusieurs millions d'années, en couvrant les valeurs possibles des paramètres du champ de gravité,
2. Identification des différents termes forcés et élimination des librations libres (cf. Chap.10),
3. Ajustement, par moindres carrés, d'une loi reliant chaque amplitude aux paramètres d'intérieur  $C_{20}$ ,  $C_{22}$  et  $C/(M_{\text{☿}}R_{\text{☿}}^2)$ ,
4. Vérification, a posteriori, du bien fondé de cette méthode et de la validité du résultat. Pour cela, les conditions initiales obtenues, utilisant les amplitudes ajustées, sont utilisées en propageant les équations de la rotation rigide de Mercure non moyennées. L'écart à l'équilibre dynamique se traduira par des oscillations libres dont la période sera de l'ordre de 1000 ans ; leur amplitude permet d'estimer l'erreur induite par la méthode.

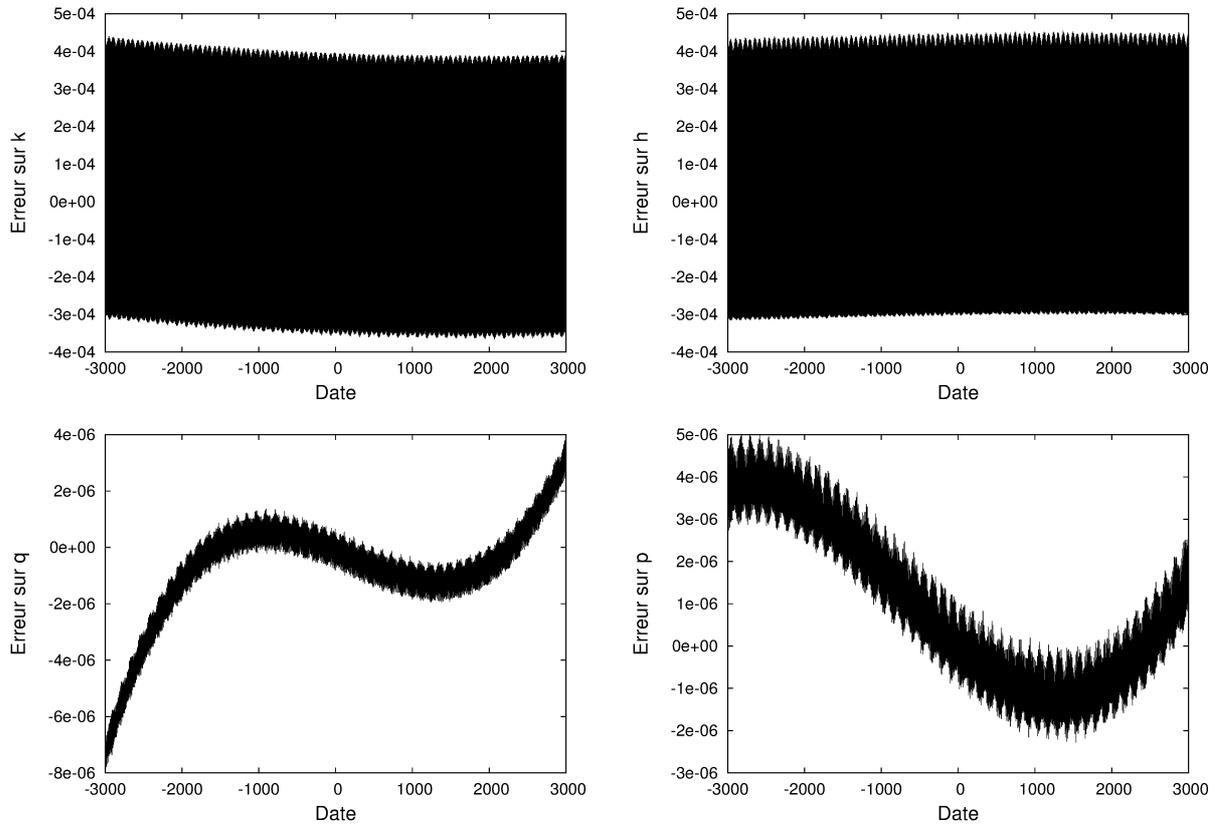


FIGURE 7.1 – Erreur sur les éléments orbitaux. Ces courbes montrent la différence entre les éléments orbitaux donnés par DE406 et les séries trigonométriques (7.45) à (7.48).

Dans (Noyelles & D’Hoedt, 2012), nous avons appliqué cette théorie avec succès mais en utilisant des valeurs du champ de gravité de Mercure données par Mariner 10, qui sont maintenant obsolètes. C’est pourquoi je développe l’application présente dans (Noyelles & Lhotka, 2013), qui utilise des données MESSENGER.

Il a été difficile de publier cet article, l’un des reviewers étant si peu convaincu du bien fondé de l’étude qu’il insistait pour que toute référence à BepiColombo soit supprimée. Comme nous étions financés dans le cadre de la préparation de cette mission, nous ne pouvions pas accepter cette exigence. Ceci s’est finalement résolu par la désignation d’un autre reviewer.

### 7.3.2 Notre solution (Noyelles & Lhotka, 2013)

Les déterminations de paramètres du champ de gravité avec une bonne précision (Tab.6.1) par Smith et al. (2012) et de l’obliquité de Mercure par Margot et al. (2012) nous ont incités à reprendre cette étude pour l’appliquer aux valeurs actuelles. L’un des buts était de déterminer le moment d’inertie polaire de Mercure  $C$  par une méthode indépendante de celle de Peale.

Ce travail a été fait en collaboration avec Christoph Lhotka qui a fait l’essentiel de la partie analytique, alors que j’ai fait l’essentiel de la partie numérique. C’est pourquoi j’insisterai sur le numérique. Le travail de Christoph a consisté à réécrire une formule dans l’idée de celle de Peale,

après moyennisation des termes périodiques et sans considérer a priori que la différence des nœuds  $\sigma_3$  était identiquement nulle. De plus, l'influence des harmoniques d'ordre supérieur était considérée. La formule obtenue est

$$\begin{aligned} \epsilon &= \left( 1 + \frac{2\dot{\Omega}}{3n} \cos I + \frac{2\dot{\omega}}{3n} \right) \\ &\times \frac{C/(M_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2) \dot{\Omega} \sin I}{n \left( C_{22} f_1(e) - C_{20} f_2(e) + C_{40} \left( \frac{R_{\text{☿}}}{a} \right)^2 f_3(e) - \frac{2}{3} \left( \frac{\dot{\Omega}}{n} \right)^2 \frac{C}{M_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2} \sin^2 I \right)}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

avec

$$f_1(e) = 7e - \frac{123}{8}e^3, \quad (7.50)$$

$$f_2(e) = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4, \quad (7.51)$$

$$f_3(e) = \frac{5}{2} + \frac{25}{2}e^2 + \frac{525}{16}e^4. \quad (7.52)$$

Cette formule (7.49) est à comparer avec celle de Peale (Éq.7.1). On peut remarquer la présence de la précession de l'argument du péricentre  $\dot{\omega}$ , ainsi que de l'harmonique  $C_{40}$ , dont l'influence sera toutefois très limitée par la présence du préfacteur  $(R_{\text{☿}}/a)^2$ .

D'un point de vue numérique, nous sommes partis du Hamiltonien moyenné  $\langle \mathcal{H} \rangle$  suivant :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} \rangle (\Sigma_1, \Sigma_3, \sigma_1, \sigma_3, t) &= -\frac{2M_{\text{☿}}^3 \mathcal{G}^2 (M_{\text{☿}} + M_{\text{☿}^*})^2}{(2\Sigma_4 - 3\Sigma_1)^2} \\ &+ \frac{\Sigma_1^2}{2C} - \Sigma_1 \dot{\omega} + (\Sigma_3 - \Sigma_1) \dot{\Omega} - \mathcal{G} M_{\text{☿}^*} M_{\text{☿}} \langle \mathcal{V} \rangle, \end{aligned} \quad (7.53)$$

où

- $\Sigma_1$  est la norme du moment cinétique de rotation de Mercure ( $= 3/2nCP$  si on veut se référer à des notations utilisées précédemment),
- $\Sigma_3 = \Sigma_1(1 - \cos K)$  où  $K$  est l'obliquité de Mercure par rapport à l'écliptique J2000,
- $\sigma_1$  est l'argument de la résonance 3 :2 tel que  $2\sigma_1 = 2p - 3\lambda + \varpi$  (voir plus haut),
- $\sigma_3 = r + \Omega$  est l'angle en libration du fait de la Troisième Loi de Cassini,
- $\Sigma_4 = M_{\text{☿}} \sqrt{\mathcal{G}(M_{\text{☿}} + M_{\text{☿}^*})a} + 3/2\Sigma_1$ . L'angle associé,  $\sigma_4 = \lambda$ , n'apparaît pas dans notre Hamiltonien moyenné, ce qui fait de  $\Sigma_4$  une constante.

$\langle \mathcal{V} \rangle$  est, à un préfacteur près, le potentiel perturbateur moyenné sur les courtes périodes. Il est de la forme

$$\langle \mathcal{V} \rangle = C_{20} \langle \mathcal{V}_{20} \rangle + C_{22} \langle \mathcal{V}_{22} \rangle + C_{30} \langle \mathcal{V}_{30} \rangle + C_{40} \langle \mathcal{V}_{40} \rangle, \quad (7.54)$$

l'expression des  $\langle \mathcal{V}_{nm} \rangle$  étant donnée dans (Noyelles & Lhotka, 2013). On peut remarquer dans l'expression du Hamiltonien  $\langle \mathcal{H} \rangle$ , la vitesse de précession de l'argument du péricentre  $\dot{\omega}$ , que nous considérons dans notre modèle. Nous allons également jusqu'au degré 4 en excentricité / inclinaison.

Nous obtenons ensuite les équations Hamiltoniennes

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial \Sigma_1}, & \dot{\Sigma}_1 &= -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial \sigma_1}, \\ \dot{\sigma}_3 &= \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial \Sigma_3}, & \dot{\Sigma}_3 &= -\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial \sigma_3},\end{aligned}\tag{7.55}$$

dans lesquelles nous injectons les expressions trigonométriques à long terme de  $k, h, q, p$  (Éq. 7.45 à 7.48). Nous avons numériquement localisé l'État de Cassini, dépendant du temps, pour 56 modèles de Mercure cohérents avec le champ de gravité mesuré par Smith et al. (2012), c'est-à-dire

- $C_{20} \in [-5.1 \times 10^{-5}; -4.9 \times 10^{-5}]$  (valeur nominale :  $-5.031 \times 10^{-5}$ ),
- $C_{22} \in [8.0 \times 10^{-6}; 8.2 \times 10^{-6}]$  (valeur nominale :  $8.088 \times 10^{-6}$ ),
- $C_{30} \in [-1.3 \times 10^{-5}; -1.1 \times 10^{-5}]$  (valeur nominale :  $-1.188 \times 10^{-5}$ ),
- $C_{40} \in [-2.19 \times 10^{-5}; -1.71 \times 10^{-5}]$  (valeur nominale :  $-1.95 \times 10^{-5}$ ),
- $C/(M_{\text{♁}} R_{\text{♁}}^2) \in [0.32; 0.38]$  (valeur nominale : 0.35).

Un exemple d'analyse en fréquence de la solution numérique est donné dans la Tab.7.1. On peut voir des termes dépendant uniquement des fréquences données dans les expressions trigonométriques (7.45) à (7.48), et d'autres qui correspondent à des oscillations libres et ne doivent pas apparaître lorsque les conditions initiales correspondent exactement à l'État de Cassini.

TABLE 7.1 – Un exemple d'analyse en fréquence de la solution numérique de notre système d'équations (7.55) pour les paramètres d'intérieur nominaux  $C_{20} = -5.031 \times 10^{-5}$ ,  $C_{22} = 8.088 \times 10^{-6}$ ,  $C_{30} = -1.188 \times 10^{-5}$ ,  $C_{40} = -1.95 \times 10^{-5}$  et  $C = 0.35 M_{\text{♁}} R_{\text{♁}}^2$ .

$N$	Amplitude (arcmin)	Période (ans)	Identification
<hr/> $K - i$ <hr/>			
1	1.9755	$\infty$	$\langle K - i \rangle$
2	0.2682	172 332.6	$2\Omega_2 - 2\Omega_1$
4	0.0254	264 530.5	$\omega_1 - \omega_2$
5	0.0132	60 999.1	$2\omega_1 - 2\Omega_1$
6	0.0121	57 555.3	$3\Omega_2 - 3\Omega_1$
7	0.0026	4 167.1	libre
8	0.0025	43 166.2	$4\Omega_2 - 4\Omega_1$
9	0.0025	4 302.6	libre
<hr/> <hr/>			
$\sigma_3$ <hr/>			
1	6.2509	172 665.2	$\Omega_2 - \Omega_1$
2	1.4683	86 332.6	$2\Omega_2 - 2\Omega_1$
3	0.3462	57 555.1	$3\Omega_2 - 3\Omega_1$
4	0.1112	60 999.0	$2\omega_1 - 2\Omega_1$
5	0.0816	43 166.3	$4\Omega_2 - 4\Omega_1$
6	0.0400	497 291.8	$\varpi_2 - \varpi_1 + \Omega_2 - \Omega_1$
7	0.0396	104 473.0	$\varpi_1 - \varpi_2 + \Omega_2 - \Omega_1$
8	0.0261	45 075.0	$2\varpi_1 - 3\Omega_1 + \Omega_2$
9	0.0214	4 167.1	libre
10	0.0209	4 302.6	libre

Les termes forcés sont gardés, et nous avons finalement identifié une solution à 34 termes :

$$\begin{aligned}
K &= i + a_1 - 2a_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1) + 2a_3 \cos(2\Omega_2 - 2\Omega_1) - 2a_4 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) \\
&+ 2a_5 \cos(2\varpi_1 - 2\Omega_1) - 2a_6 \cos(3\Omega_2 - 3\Omega_1) + 2a_7 \cos(4\Omega_2 - 4\Omega_1) \\
&+ 2a_8 \cos(\varpi_2 - \varpi_1 + \Omega_2 - \Omega_1) + 2a_9 \cos(\varpi_1 - \varpi_2 + \Omega_2 - \Omega_1) + 2a_{10} \cos(\varpi_1 + \varpi_2 - 2\Omega_1) \\
&- 2a_{11} \cos(2\varpi_1 - 3\Omega_1 + \Omega_2) - 2a_{12} \cos(5\Omega_2 - 5\Omega_1) + 2a_{13} \cos(2\varpi_1 - 2\varpi_2) \\
&- 2a_{14} \cos(\varpi_1 - \varpi_2 - 2\Omega_1 + 2\Omega_2) - 2a_{15} \cos(\varpi_2 - \varpi_1 - 2\Omega_1 + 2\Omega_2) \\
&- 2a_{16} \cos(2\varpi_1 - 2\Omega_2), \tag{7.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= 2a_{17} \sin(\Omega_2 - \Omega_1) - 2a_{18} \sin(2\Omega_2 - 2\Omega_1) + 2a_{19} \sin(3\Omega_2 - 3\Omega_1) \\
&- 2a_{20} \sin(2\varpi_1 - 2\Omega_1) - 2a_{21} \sin(4\Omega_2 - 4\Omega_1) - 2a_{22} \sin(\varpi_2 - \varpi_1 + \Omega_2 - \Omega_1) \\
&- 2a_{23} \sin(\varpi_1 - \varpi_2 + \Omega_2 - \Omega_1) + 2a_{24} \sin(2\varpi_1 - 3\Omega_1 + \Omega_2) + 2a_{25} \sin(5\Omega_2 - 5\Omega_1) \\
&+ 2a_{26} \sin(2\varpi_1 - \Omega_1 - \Omega_2) - 2a_{27} \sin(\varpi_1 + \varpi_2 - 2\Omega_1) + 2a_{28} \sin(-\varpi_1 + \varpi_2 - 2\Omega_1 + 2\Omega_2) \\
&+ 2a_{29} \sin(\varpi_1 - \varpi_2 - 2\Omega_1 + 2\Omega_2) - 2a_{30} \sin(2\varpi_1 - 4\Omega_1 + 2\Omega_2) - 2a_{31} \sin(6\Omega_2 - 6\Omega_1) \\
&+ 2a_{32} \sin(\varpi_1 + \varpi_2 - 3\Omega_1 + \Omega_2) - 2a_{33} \sin(\varpi_1 - \varpi_2 - 3\Omega_1 + 3\Omega_2) \\
&- 2a_{34} \sin(\varpi_2 - \varpi_1 - 3\Omega_1 + 3\Omega_2), \tag{7.57}
\end{aligned}$$

avec

$$a_i = \frac{C / \left( M_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2 \right)}{\alpha_i C / \left( M_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2 \right) + \beta_i C_{20} + \gamma_i C_{22} + \delta_i} \tag{7.58}$$

pour  $i = 1, 2, 5, 6, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27$ ,

$$a_i = \frac{C / \left( M_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2 \right)}{\alpha_i + \beta_i C_{20} + \gamma_i C_{22}} \tag{7.59}$$

pour  $i = 3, 4$

$$a_i = \frac{C / \left( M_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2 \right)}{\alpha_i + \beta_i C_{20}} \tag{7.60}$$

pour  $i = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 34$ , et

$$a_i = \frac{C / \left( M_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2 \right)}{\alpha_i C / \left( M_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2 \right) + \beta_i C_{20} + \gamma_i} \tag{7.61}$$

pour  $i = 25, 28, 29, 30, 31, 32, 33$ . Ces formules sont ajustées sur les amplitudes obtenues numériquement pour les 56 modèles de Mercure, et leur forme est inspirée de l'équation de Peale (Éq.7.1). On peut remarquer qu'on n'a détecté aucune influence des harmoniques  $J_3 = -C_{30}$  et  $J_4 = -C_{40}$  sur les variables liées à l'obliquité.

TABLE 7.2 – Les coefficients intervenant dans les Éq.7.58 à 7.61.

i	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\gamma_i$	$\delta_i$
1	-9.6916394157	$-1.022791 \times 10^7$	$1.224118 \times 10^7$	-0.041284174514
2	57.319667133	$-1.495053 \times 10^8$	$1.8067315 \times 10^8$	-15.290923597
3	-288.588048	$-6.75794 \times 10^8$	$8.648745 \times 10^8$	-
4	109.5839605	$-2.3327045 \times 10^9$	$-2.8315945 \times 10^9$	-
5	9618.2490875	$-5.967955 \times 10^9$	$-1.4620515 \times 10^{10}$	-4270.5575456
6	5690.3083952	$-3.29021 \times 10^9$	$4.59872 \times 10^9$	-5791.2841683
7	160882.75	$-1.563842 \times 10^{10}$	-	-
8	-330146.25	$-3.3956545 \times 10^{10}$	-	-
9	-307545.35	$-3.441592 \times 10^{10}$	-	-
10	-879441.5	$-4.59746 \times 10^{10}$	-	-
11	-1025209.5	$-5.12722 \times 10^{10}$	-	-
12	760424	$-7.318535 \times 10^{10}$	-	-
13	-3583265	$-1.7097535 \times 10^{11}$	-	-
14	-1352596	$-1.522164 \times 10^{11}$	-	-
15	-1475953.5	$-1.554497 \times 10^{11}$	-	-
16	-4788455	$-2.4530905 \times 10^{11}$	-	-
17	0.0459703076	-111936.3	133840.35	0.00068014043987
18	0.5097512707	-474698	568708	-0.0063487867442
19	3.6758306831	-2005542	2431534	-0.32882074509
20	20.470309592	-12322835	-31382330	1.6246447377
21	22.351343806	-8470000	10602865	-4.3502813922
22	1.8968370715	-25710160	-28807205	-14.991580755
23	28.007891612	-25704595	-30518425	0.75276141087
24	151.69560968	-52410050	-127924300	-54.254151937
25	11.320467298	-35729050	384.87733645	-
26	60.949766585	-91723450	-262171000	275.67522095
27	93.149257619	-96422550	-265414800	257.09346578
28	256.01109782	-108893750	-1098.8078842	-
29	93.896968203	-109386550	-1017.8654389	-
30	880.39601125	-223772150	-4722.8636039	-
31	-390.02956574	-145710250	2105.3653480	-
32	1929.3930214	-404092500	-8327.8625575	-
33	2613.8902647	-456302000	-4855.3715926	-
34	-2905.1715	-438245500	-	-

### 7.3.3 Test de la solution

Le but de cette étude est d'obtenir des conditions initiales proches de l'État de Cassini pour un Mercure réaliste. Notamment, pour une dynamique de rotation non moyennée et de vraies éphémérides. Tout écart à l'État de Cassini se traduira par des oscillations libres, dont nous souhaitons que l'amplitude soit la plus petite possible.

Nous avons fait ces tests à partir des équations issues d'un Hamiltonien non moyenné, en tenant compte des harmoniques  $C_{20}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{30}$  et  $C_{40}$ . Un exemple est donné par la Fig.7.2. On peut y voir

le terme libre de période de l'ordre de 1000 ans.

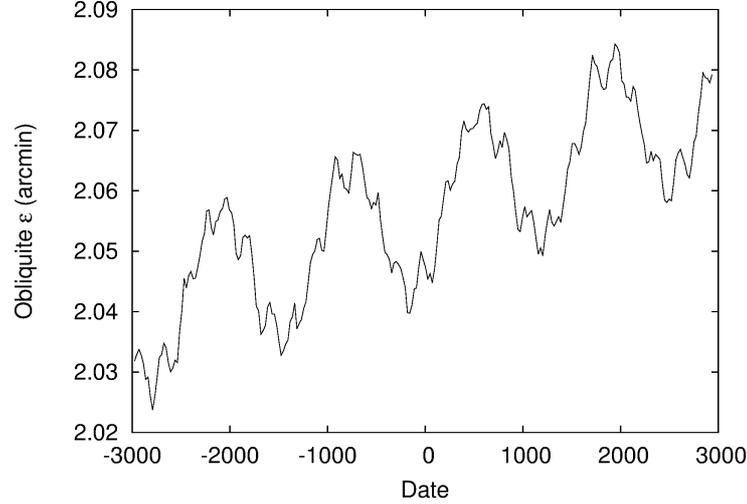


FIGURE 7.2 – Obliquité de Mercure simulée en propageant les équations non moyennées, mais en partant des conditions initiales données par le système moyenné, avec  $C_{20} = -5.031 \times 10^{-5}$ ,  $C_{22} = 8.088 \times 10^{-6}$ ,  $C_{30} = C_{40} = 0$  et  $C = 0.35M_{\oplus}R_{\oplus}^2$ . Les oscillations de période environ 1000 ans sont des librations libres, qui ne seraient pas présentes si les conditions initiales étaient idéales.

Nous avons en fait testé la validité de nos conditions initiales (7.56 & 7.57) avec les 56 jeux de paramètres d'intérieur, des équations non moyennées, et les éphémérides orbitales DE406 et INPOP10a (Fienga et al., 2011). L'amplitude des oscillations libres a été obtenue par analyse en fréquences (Fig.7.3).

Nous pouvons voir qu'en aucun cas, l'amplitude des oscillations libres n'est supérieure à 750 millisecondes d'arc. Pour référence, la précision de la mesure de l'obliquité est d'environ 5 secondes d'arc (Margot et al., 2012). On peut remarquer que, dans le cas d'INPOP10a, certains points sont absents. La raison est qu'INPOP10a n'est disponible que sur 2000 ans, période sur laquelle il peut être difficile de détecter un terme périodique dont la période est proche de 1000 ans.

### 7.3.4 Influence des harmoniques d'ordre supérieur

Nous avons testé l'influence des harmoniques d'ordre supérieur à partir du système non moyenné. Le système moyenné suggère que les harmoniques  $J_3$  et  $J_4$  n'ont pas d'influence. Dans le cas du système non moyenné, nous avons fait varier les paramètres  $J_3$  et  $J_4$  et avons extrait des simulations numériques l'obliquité moyenne. Si  $J_4$  ne semble pas avoir d'influence,  $J_3$  en a (Fig.7.4).

On peut voir que la dépendance en  $J_3$  semble linéaire dans le domaine compatible avec les observations. Un ajustement par moindres carrés donne

$$\epsilon = (-355.197C_{30} + 2.06115) \text{ arcmin}, \quad (7.62)$$

ce qui veut dire que négliger  $J_3$  peut induire une erreur de  $\approx 253$  millisecondes d'arc pour la valeur nominale  $J_3 = 1.188 \times 10^{-5}$ . Ceci est en contradiction avec la formule (7.49) et l'étude numérique à long terme. Nous avons cherché à améliorer les calculs précédents en poussant l'ordre

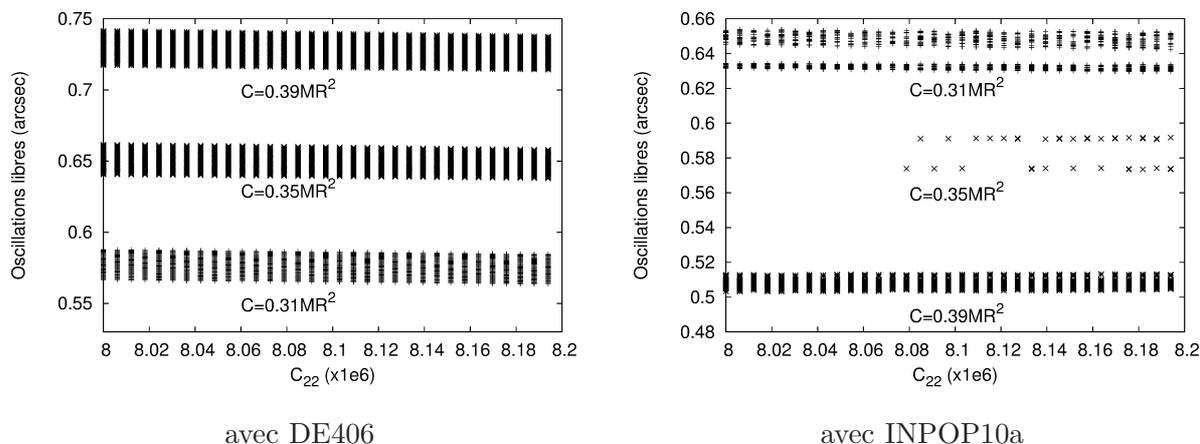


FIGURE 7.3 – Amplitude des oscillations libres dues à nos conditions initiales.

des développements en excentricité / inclinaison et n'avons pas réussi à trouver une influence de  $J_3$ . Une piste d'amélioration est d'introduire une moyennisation d'ordre 2 en les paramètres du champ de gravité. Ceci est une tâche très lourde, nous ne l'avons pas faite dans le cadre de cette étude.

### 7.3.5 Influence des marées

L'attraction différentielle du Soleil sur Mercure, c'est-à-dire les marées, contribue à la dissipation de l'énergie de rotation, ce qui a pour conséquences l'établissement de la résonance spin-orbite (Chap.9) et de l'État de Cassini, mais aussi la forme triaxiale de Mercure. Une autre conséquence des marées est un effet périodique, non dissipatif, qui altère le champ de gravité et la forme à la période orbitale et ses harmoniques. En effet, le couple de marée dépend de la distance Soleil-Mercure, qui varie d'un facteur  $\approx 1.5$  sur une orbite du fait de l'excentricité importante  $\approx 0.206$ . Il dépend également de la vitesse de rotation de Mercure car le couple subi par un élément de masse dépend aussi de son orientation par rapport au Soleil.

On a, d'après Giampieri (2004) :

$$C_{20}(t) = C_{20}^{static} + \frac{k_2}{2} q_t e \cos \mathcal{M}, \quad (7.63)$$

$$C_{22}(t) = C_{22}^{static} - \frac{k_2}{24} q_t (2 \cos \mathcal{M} - e \cos 2\mathcal{M}), \quad (7.64)$$

ce résultat étant obtenu à partir du développement de Kaula du potentiel de marée (5.132) dans lequel l'angle d'heure locale  $\theta^*$  doit tenir compte de la rotation en résonance 3 :2. De plus, Van Hoolst et al. (2008) nous donnent

$$C(t) = C^{static} - \frac{k_2}{3} q_t e M_{\odot} R_{\oplus}^2 \cos \mathcal{M}, \quad (7.65)$$

où  $k_2$  est le nombre de Love classique d'ordre 2 lié au champ de gravité, et

$$q_t = -3 \frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}} \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^3. \quad (7.66)$$

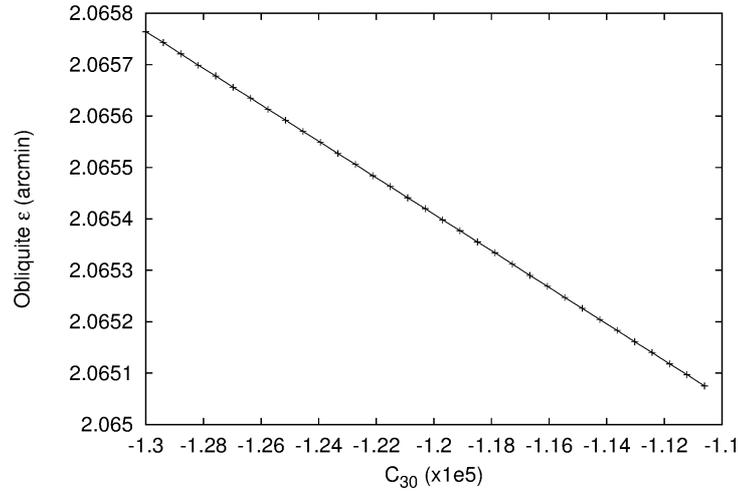


FIGURE 7.4 – Influence de  $C_{30}$  sur l'obliquité moyenne, obtenue après intégration numérique des équations non moyennées. Les autres paramètres d'intérieur sont les nominaux.

Nous disposons de peu d'informations concernant  $k_2$ . Il n'a jamais été mesuré, nous devons donc nous contenter de modèles théoriques. Spohn et al. (2001) l'estiment entre 0.3 et 0.45 si Mercure n'a pas de graine rigide, et entre 0.1 et 0.4 si elle en a une. Rivoldini et al. (2009) l'estiment entre 0.2 et 0.8 en faisant différentes hypothèses sur la composition de la planète. La plus récente estimation, qui utilise des données de MESSENGER, est entre 0.45 et 0.52 (Padovan et al., 2014). Nous avons considéré  $k_2 = 0.5$  et ajouté les composantes périodiques des éléments du champ de gravité dans nos formules, analytique (7.49) et numérique (7.56 & 7.57). Le résultat est donné Fig.7.5.

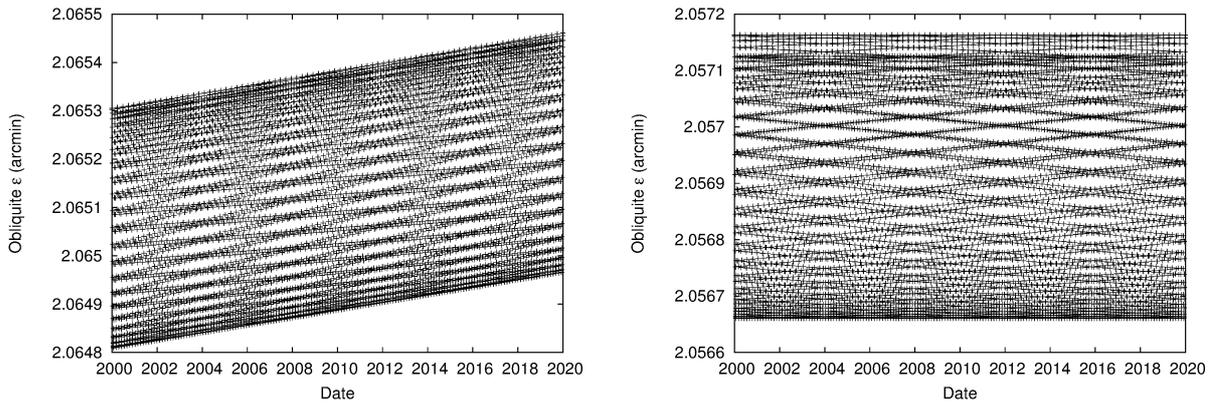


FIGURE 7.5 – Variations de l'obliquité de Mercure dues aux marées, avec la formule numérique à gauche et la formule analytique à droite. La période des variations est la période orbitale de Mercure, soit 88 jours.

L'épaisseur des courbes, de l'ordre de 30 millisecondes d'arc, vient des oscillations à courte période, dues aux marées. On peut remarquer, dans le modèle numérique, une pente qui n'est pas présente dans les modèles analytiques. Ceci est la signature des termes à très longue période

introduits dans les expressions trigonométriques extrapolées des éléments orbitaux (Éq.7.45 à 7.48), et qui ne sont pas présents dans la formule analytique.

La Tab.7.3 compare différentes influences sur l'obliquité. La première ligne, les librations libres, ne vient pas de la physique de Mercure mais d'une erreur sur la modélisation de l'obliquité. Cette erreur est à comparer avec l'incertitude de 5 secondes d'arc sur la mesure de l'obliquité (Margot et al., 2012). Comparé aux autres effets,  $J_3$  semble important, donc son influence doit être clarifiée. Le mouvement polaire et les courtes périodes viennent de 2 études dont je parle au Chap.8.

TABLE 7.3 – Les différents effets agissant sur l'obliquité de Mercure.

Effet	Influence sur l'obliquité
Librations libres	< 750 mas
$C_{30}$	$\approx 250$ mas
Mouvement polaire	$\approx 80$ mas (Noyelles et al., 2010)
Marées	$\approx 30$ mas
Librations à courtes périodes	< 20 mas (Dufey et al., 2009)
Dérive séculaire	$\approx 10$ mas sur 20 ans
$C_{40}$	non détectée

### 7.3.6 Le moment d'inertie polaire $C$

Le but de la modélisation de l'obliquité est d'inverser la mesure de l'obliquité  $\epsilon = (2.04 \pm 0.08)$  minutes d'arc. Nous disposons de 2 formules, analytique et numérique, auxquelles nous pouvons ajouter l'effet du coefficient  $J_3$ . Dans la formule analytique, nous utilisons, comme Yseboodt & Margot (2006),  $I = 8.6^\circ$  et une période du nœud ascendant négative de 328 000 ans. De plus, nous considérons une période positive de précession de l'argument du péricentre de 128 000 ans. Et ceci nous donne

- Margot et al. (2012) :  $C/(M_{\text{☿}}R_{\text{☿}}^2) = 0.346 \pm 0.014$ ,
- Formule analytique (Éq.7.49) :  $C/(M_{\text{☿}}R_{\text{☿}}^2) = 0.34712 \pm 0.01361$ ,
- Formule numérique (Éq.7.56 & 7.57) :  $C/(M_{\text{☿}}R_{\text{☿}}^2) = 0.34576 \pm 0.01349$ ,
- Formule analytique (Éq.7.49) +  $J_3$  (Éq.7.62) :  $C/(M_{\text{☿}}R_{\text{☿}}^2) = 0.34640 \pm 0.01361$ ,
- Formule numérique (Éq.7.56 & 7.57) +  $J_3$  (Éq.7.62) :  $C/(M_{\text{☿}}R_{\text{☿}}^2) = 0.34506 \pm 0.01348$ .

Cela n'a physiquement pas de sens de donner autant de chiffres significatifs. La raison est que les différences entre les résultats sont faibles, il faut donc donner plus de chiffres que la mesure physique le suggère pour pouvoir comparer les résultats. Nous constatons que tous les résultats convergent. Avec la formule de Peale (Éq.7.1), Margot et al. (2012) trouvent pour valeur la plus probable de  $C/(M_{\text{☿}}R_{\text{☿}}^2)$  0.346. Cela pourrait être en fait 0.345 ou 0.347.

## 7.4 Conclusion

Le problème de l'obliquité de Mercure est fondamental dans le cadre de la mission MESSENGER et de la préparation de BepiColombo. C'est en effet la seule mesure qui donnera son moment d'inertie polaire, porteur d'information sur la structure interne. Nous verrons dans le chapitre qui arrive que cette information est utile pour connaître la taille de la partie fluide du noyau.

Avant ces études (Noyelles & D'Hoedt, 2012; Noyelles & Lhotka, 2013), seule la formule de Peale existait dans la littérature pour inverser l'obliquité. En renonçant à certaines approximations qui y sont faites, notamment en ne considérant pas la précession du nœud ascendant comme uniforme, en recourant à l'outil numérique, et en renonçant à l'utilisation du Plan de Laplace, nous avons élaboré une méthode complètement indépendante de celle de Peale. Nos résultats convergent, ce qui permet de dire que l'erreur due à la méthode est très faible.

Mercury est considérée comme rigide pour l'estimation de son obliquité. En effet, sur des échelles de temps aussi longues, la viscosité est supposée solidariser le manteau du reste de l'intérieur. Une perspective pourrait être d'utiliser un modèle d'intérieur plus complet, en considérant un noyau interne (une graine), et une viscosité chiffrée dans le noyau externe, fluide. Ce sujet a été abordé récemment dans (Peale et al., 2014), où les auteurs ont pris en compte une graine dont l'orientation est différente du noyau, et une viscosité intervenant dans le couplage de pression aux interfaces rigide-fluide. Par exemple avec une graine dont l'axe d'orientation est désaxé de 3.55 minutes d'arc par rapport au manteau, les auteurs trouvent que l'axe d'orientation du manteau est déplacé de 55 millisecondes d'arc. Cet effet est donc 5 fois plus faible que celui du  $J_3$ .

## Chapitre 8

# Étude à court terme : les librations en longitude

### 8.1 Introduction

Les premières mesures du champ magnétique de Mercure (Ness et al., 1974, 1975, 1976) par MESSENGER ont suggéré la présence d'une couche globale fluide. La présence de cette couche se devait d'être confirmée par des observations complètement indépendantes, et qui si possible pourraient être inversées de façon assez directe. Ceci permettrait également d'en savoir plus sur cette couche fluide, notamment d'estimer sa taille.

Peale (1972) a proposé une expérience se basant sur les mesures de l'obliquité (cf. Chap.7) et des librations en longitude à la période orbitale (88 jours)<sup>1</sup>. Ceci a motivé un certain nombre d'études théoriques évaluant ces librations en fonction des paramètres d'intérieur. Les amplitudes des librations dues aux perturbations planétaires, dont les périodes sont de plusieurs années, sont également étudiées, car elles sont susceptibles d'être détectables.

### 8.2 L'expérience de Peale (1976)

L'idée principale de l'expérience de Peale est que les librations en longitude et l'obliquité sont 2 réponses de la rotation de Mercure à des excitations sur des échelles de temps différentes, la signature de l'interface noyau-manteau n'étant présente que dans les librations en longitude.

#### 8.2.1 Théorie

Nous avons déjà vu que pour la mesure de l'obliquité de Mercure, nous pouvions, avec une bonne approximation, utiliser la formule suivante, due à Peale (1969) :

$$\epsilon = - \frac{C \dot{\Omega} \sin \iota}{C \dot{\Omega} \cos \iota + 2nM_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2 \left( \frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 \right) C_{22} - nM_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2 (1 - e^2)^{-3/2} C_{20}}. \quad (8.1)$$

Les librations en longitude peuvent être calculées à partir du Hamiltonien en longitude (2.103) développé à l'ordre 2 en excentricité, mais dans lequel l'argument résonnant est  $2\sigma = 2p - 3\lambda$ . On

---

1. les librations diurnes

en déduit l'équation suivante :

$$\ddot{\sigma} + \frac{21}{2}n^2e\frac{B-A}{C}\sigma + \frac{3}{2}n^2\frac{B-A}{C}(1-11e^2)\sin\lambda - \frac{3}{4}n^2e\frac{B-A}{C}\sin 2\lambda = 0, \quad (8.2)$$

ce qui donne

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\cos(\omega_0 t + \alpha) - \frac{3}{2}\frac{n^2}{n^2 - \omega_0^2}\frac{B-A}{C}(1-11e^2)\sin\lambda + \frac{3}{4}\frac{n^2}{4n^2 - \omega_0^2}\frac{B-A}{C}e\sin 2\lambda \quad (8.3)$$

$$\approx \mathcal{A}\cos(\omega_0 t + \alpha) - \frac{3}{2}\frac{B-A}{C}(1-11e^2)\sin\lambda + \frac{3}{16}\frac{B-A}{C}e\sin 2\lambda, \quad (8.4)$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{21}{2}n^2e\frac{B-A}{C}, \quad (8.5)$$

$\mathcal{A}$  et  $\alpha$  étant des constantes d'intégration. L'approximation généralement faite  $\omega_0^2 \ll n^2$  est basée sur la considération que le coefficient de triaxialité  $(B-A)/C$  est très petit, non seulement par rapport à 1, mais aussi par rapport à l'excentricité  $e$  qui est l'autre petit paramètre. Cette approximation n'est en général pas faite dans le cas de la rotation synchrone, par exemple Épipiméthée est si triaxial que son mouvement en longitude se rapproche d'un comportement résonnant (Fig. 3.8). Dans le cas de Mercure, on a  $e \approx 0.2056$  et  $(B-A)/C_m = (2.18 \pm 0.04) \times 10^{-4}$  où  $C_m$  est le moment d'inertie polaire du manteau (son utilisation sera justifiée dans les lignes suivantes), donc notre approximation est valide. Mercure est le seul cas connu de résonance spin-orbite 3 :2, toutefois cette configuration résonnante est probablement assez courante dans les systèmes planétaires (Makarov, 2012). Néanmoins, la triaxialité d'une planète vient en partie du couple de marée s'appliquant. Dans le cas de la résonance 3 :2, il est bien plus faible que dans celui de la résonance synchrone. On a notamment, à l'équilibre hydrostatique,  $C_{22}/J_2 \approx 3/10$  pour la rotation synchrone, et  $C_{22}/J_2 \approx 7e/10$  pour la résonance 3 :2 (Matsuyama & Nimmo, 2009). Il est donc raisonnable de penser que le paramètre de triaxialité  $(B-A)/C$  est généralement petit pour la résonance 3 :2. Margot (2009) donne une expression plus générale en excentricité pour l'amplitude des librations diurnes et de ses harmoniques :

$$\gamma = \frac{3}{2}\frac{B-A}{C}\sum_k f_k(e)\sin(k\mathcal{M}) \quad (8.6)$$

où  $\mathcal{M}$  est l'anomalie moyenne, et

$$f_1(e) = 1 - 11e^2 + \frac{959}{48}e^4 - \frac{3641}{288}e^6 + \mathcal{O}(e^8), \quad (8.7)$$

$$f_2(e) = -\frac{e}{8} - \frac{421}{96}e^3 + \frac{32515}{3072}e^5 + \mathcal{O}(e^7), \quad (8.8)$$

$$f_3(e) = -\frac{533}{144}e^4 + \frac{4609}{480}e^6 + \mathcal{O}(e^8), \quad (8.9)$$

$$f_4(e) = \frac{e^3}{768} - \frac{57073}{15360}e^5 + \mathcal{O}(e^7), \quad (8.10)$$

$$f_5(e) = \frac{e^4}{600} - \frac{18337}{4500}e^6 + \mathcal{O}(e^8). \quad (8.11)$$

Une ambiguïté apparaît entre les formules (8.4) et (8.6) à propos de l'angle à utiliser, la longitude moyenne  $\lambda$  d'un côté, l'anomalie moyenne  $\mathcal{M}$  de l'autre. Il est en fait plus exact de considérer l'anomalie moyenne. La formule (8.4) considère que la vitesse de précession du péricentre est négligeable, ce qui est vrai dans le cas de Mercure<sup>2</sup>. Cependant, cette formule est dangereuse à généraliser car elle incite à oublier les variations du péricentre, qui ont un impact si on considère les perturbations planétaires. Ceci a induit une erreur dans (Peale et al., 2007).

Dans le cadre de l'expérience, on s'intéresse à l'amplitude la plus facilement détectable, soit celle des librations diurnes,  $\phi \approx 3/2 \times (B - A)/C$ . L'idée forte de cette expérience est que seul le manteau suit les librations diurnes, il faudrait donc utiliser ses moments d'inertie  $A_m$ ,  $B_m$  et  $C_m$  en lieu et place des moments d'inertie de Mercure  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Une autre approximation suggérée est de considérer que le noyau, de moments d'inertie  $A_c$ ,  $B_c$  et  $C_c$ , est sphérique. Ses moments d'inertie sont donc égaux. Dans ce cas on a  $B - A = (B_m + B_c) - (A_m + A_c) = B_m - A_m$ . On peut donc écrire

$$\phi \approx \frac{3}{2} \frac{B - A}{C_m} \left( 1 - 11e^2 + \frac{959}{48}e^4 \right) \quad (8.12)$$

$$\approx 6C_{22} \frac{M_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2}{C} \frac{C}{C_m} \left( 1 - 11e^2 + \frac{959}{48}e^4 \right). \quad (8.13)$$

Le fonctionnement de l'expérience de Peale est donc le suivant : les éphémérides de Mercure donnent son mouvement orbital, donc son excentricité, et les sondes les coefficients du champ de gravité  $J_2$  et  $C_{22}$ . Une fois l'obliquité mesurée, le moment d'inertie polaire  $C$  sera connu (Éq.8.1). Ensuite la mesure de l'amplitude de la libration diurne  $\phi$  donnera directement le manteau d'inertie du manteau  $C_m$ , donc celui du manteau  $C_c = C - C_m$ , ce qui permettra d'en estimer la taille.

### 8.2.2 Observations radar

Le moyen le plus efficace pour observer la rotation de Mercure depuis la Terre est le radar. Ce sont des observations radar qui ont permis de mesurer la vitesse de rotation de Mercure (Pettengill & Dyce, 1965). Les signaux radar permettent de mesurer la vitesse de rotation, et l'instant où ils sont détectés, correspondant à une orientation spatiale de l'antenne radar, contraint l'orientation de l'axe de rotation de Mercure.

La libration et l'obliquité de Mercure ont été pour la première fois mesurées par Margot et al. (2007) par des observations radar terrestres, essentiellement faites à Goldstone, Californie, d'autres ayant été réalisées au Green Bank Telescope en Virginie Occidentale. Ces mesures ont été mises à jour en 2012 (Fig.8.1 & Tab.8.1).

La Fig.8.1 illustre les mesures radar. À gauche, on voit qu'en reliant toutes les mesures sur une même période orbitale, on a effectivement un signal. À droite on voit que la mesure (l'étoile) est proche de l'État de Cassini 1. Les dernières mesures (Tab.8.1) suggèrent  $C/(M_{\text{☿}} R_{\text{☿}}^2) = 0.346 \pm 0.014$  et  $C_m/C = 0.431 \pm 0.025$ .

---

2. la période de l'anomalie moyenne est de 88 jours, celle du péricentre se chiffre en centaines de milliers d'années

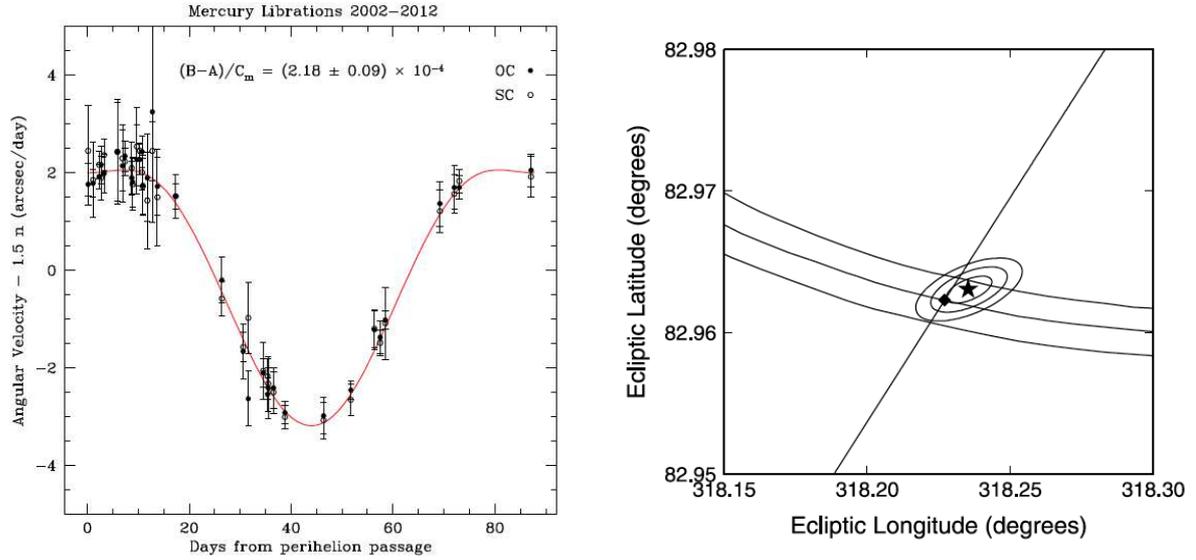


FIGURE 8.1 – Libration (à gauche) et obliquité (à droite) de Mercure mesurées. Les mesures de librations ont été regroupées sur une période orbitale de Mercure. Pour l’obliquité, l’étoile indique la mesure, et les ellipses autour sont les incertitudes à  $\sigma$ ,  $2\sigma$  et  $3\sigma$ . Le carré est la mesure de (Margot et al., 2007), et la ligne oblique est la position de l’État de Cassini 1 théorique. Ces figures sont reproduites de (Margot et al., 2012).

TABLE 8.1 – Les mesures radar de libration et d’obliquité de Mercure.

	Margot et al. (2007)	Margot et al. (2012)
Libration	$35.8 \pm 2$ arcsec	$38.5 \pm 1.6$ arcsec
Obliquité	$2.11 \pm 0.1$ arcmin	$2.04 \pm 0.08$ arcmin

### 8.3 Modélisation théorique

Je présente ici différentes études sur les librations en longitude de Mercure. Il s’agit aussi bien de librations diurnes et de ses harmoniques, que de perturbations planétaires. Dans ce dernier cas, les librations ont une période de plusieurs années.

#### 8.3.1 Si le noyau est sphérique

Les premières études ont considéré que le noyau de Mercure était sphérique. Dans ce cas, le couple de pression appliqué par le fluide à l’interface noyau-manteau a une résultante nulle. On peut donc considérer Mercure comme une coquille vide. L’historique de l’étude théorique des librations est le suivant :

1. Peale et al. (2007) ont fait une première étude en négligeant les variations du péricentre,
2. Dufey et al. (2008) ont fait une étude Hamiltonienne en longitude, dont le résultat était différent de (Peale et al., 2007) (Tab.8.2). Ces résultats ont été obtenus de 2 manières : par méthode de perturbation (Deprit, 1969), et par intégration numérique. La méthode de perturbation a été rendue possible par la mise à disposition par Jean-Louis Simon d’une

éphéméride de Mercure sous forme de séries de Poisson. L'intégration numérique a notamment l'avantage de nécessiter moins d'approximations que la méthode de perturbation, qui peut être vue comme semi-analytique ou semi-numérique dans le sens où elle consiste à manipuler des séries trigonométriques dont les coefficients sont numériques. Dans le cas présent, l'étude numérique a fait apparaître la perturbation de Saturne, qui avait été initialement omise,

3. Peale et al. (2009) ont revu leurs calculs, reconnu leur erreur, et confirmé les résultats de (Dufey et al., 2008). Ils ont en outre mis l'accent sur la possibilité d'une résonance secondaire entre la perturbation jovienne, de période 11.86 ans, et la libration libre en longitude. La conséquence serait une amplitude importante de la composante à 11.86 ans de la libration en longitude,
4. Dufey et al. (2009) ont confirmé ces résultats avec un modèle à 2 dimensions, c'est-à-dire sans négliger les couplages entre longitude et obliquité. Il s'avère qu'en fait ces couplages sont négligeables, ainsi que les librations planétaires en latitude. Là encore, les résultats ont été confirmés numériquement. Pour l'anecdote, nous avons repéré, pour un noyau sphérique, la proximité d'une résonance en obliquité avec la Grande Inégalité Jupiter - Saturne<sup>3</sup>, de période  $\approx 900$  ans, et avons étudié cette résonance dans (D'Hoedt et al., 2010). Mais l'intérêt de cette résonance n'est probablement qu'académique ; en effet la prise en compte d'un noyau est discutable pour les longues périodes,
5. Yseboodt et al. (2010) ont donné une expression analytique des amplitudes des perturbations planétaires.

La Tab.8.2 donne les amplitudes des différentes composantes périodiques de la libration physique en longitude, pour le champ de gravité de Mariner 10 ( $J_2 = 6 \times 10^{-5}$ ,  $C_{22} = 2 \times 10^{-5}$ ),  $C = 0.34M_{\text{♃}}R_{\text{♃}}^2$  et  $C_m = 0.549C$ , ce qui permettait d'obtenir la libration diurne mesurée par (Margot et al., 2007). Il s'agit d'un résultat théorique, seul le terme 2 (le terme diurne) ayant été mesuré. Le terme 1 (le forçage jovien) pourrait avoir une amplitude plus importante, mais il évolue nettement moins vite, ce qui le rend beaucoup plus difficile à détecter. De plus, il est forcé par la proximité de la résonance avec la fréquence des librations libres  $\omega_0$ , ce qui rend son amplitude très sensible à la taille du noyau, alors que les autres termes planétaires peuvent être considérés comme constants. En effet, Yseboodt et al. (2010) ont montré, en ajoutant un forçage périodique à l'équation (8.2) d'amplitude  $\lambda_i$  et de pulsation  $\omega_i$ , que l'amplitude de la réponse en libration  $\phi_i$  était :

$$\phi_i = \frac{\lambda_i \omega_i^2}{\omega_0^2 - \omega_i^2}. \quad (8.14)$$

Pour les perturbations planétaires à l'exception de celle à 11.86 ans, l'écart entre la fréquence de la perturbation,  $\omega_i$ , qui est fixe, et la fréquence propre  $\omega_0$  est suffisamment important pour être insensible à une éventuelle mise à jour du paramètre de triaxialité  $(B - A)/C_m$ .

### 8.3.2 Si le noyau est ellipsoïdal

Nous avons appliqué le modèle de Poincaré-Hough (Chap.4) à Mercure (Noyelles et al., 2010). Chronologiquement cette application est antérieure à celle d'Io (Noyelles, 2013). J'ai appliqué ce

---

3. il s'agit de la proximité d'une résonance de moyen mouvement 5 :2, qui a une influence très significative dans la dynamique orbitale des planètes du Système Solaire (Laplace, 1785)

TABLE 8.2 – Décomposition quasi-périodique des librations en longitude de Mercure, d’après (Dufey et al., 2009).  $l_o$  est le terme diurne,  $l_v$  le terme de Vénus,  $l_e$  celui de la Terre,  $l_j$  celui de Jupiter et  $l_s$  celui de Saturne. Ce sont des librations physiques, obtenues après la soustraction d’une pente à l’angle de spin de Mercure.

N	$l_o$	$l_v$	$l_e$	$l_j$	$l_s$	Période	Amplitude	Rapport
1	-	-	-	1	-	11.862 a	43.712 as	1.2193
2	1	-	-	-	-	87.970 j	35.849 as	1.0000
3	2	-	-	-	-	43.985 j	3.754 as	0.1047
4	2	-5	-	-	-	5.664 a	3.597 as	0.1003
5	-	-	-	-	2	14.729 a	1.568 as	0.0437
6	-	-	-	2	-	5.931 a	1.379 as	0.0385
7	1	-	-4	-	-	6.575 a	0.578 as	0.0161
8	3	-	-	-	-	29.323 j	0.386 as	0.0108
9	1	-	-	-2	-	91.692 j	0.201 as	0.0056
10	1	-	-	2	-	84.537 j	0.191 as	0.0053
11	-	-	-	2	-5	883.28 a	0.103 as	0.0029
12	2	-	-	-1	-	44.436 j	0.069 as	0.0019
13	2	-	-	1	-	43.541 j	0.067 as	0.0019
14	1	-	-	-1	-	89.793 j	0.044 as	0.0012
15	1	-	-	1	-	86.217 j	0.043 as	0.0012
16	2	-	-	-2	-	44.897 j	0.041 as	0.0011
17	2	-	-	2	-	43.110 j	0.040 as	0.0011

modèle numériquement pendant que Julien Dufey le résolvait par une méthode de perturbation, ce qui s’est révélé particulièrement ardu du fait de la proximité d’une fréquence propre avec celle de rotation de Mercure.

Physiquement, on considère que Mercure est constituée d’un manteau rigide et d’une cavité triaxiale remplie d’un fluide non visqueux, qui a un comportement non turbulent. Le couplage noyau-manteau se traduit par un couplage de pression à l’interface fluide-rigide. Mathématiquement, l’étude numérique a consisté à intégrer les équations dérivées du Hamiltonien (4.44), et l’étude par perturbation est partie du Hamiltonien (4.45), dont la partie libre s’écrit, après quelques transformations canoniques, sous la forme

$$\mathcal{N} = \omega_u U + \omega_v V + \omega_w W + \omega_z Z, \quad (8.15)$$

il s’agit donc d’un modèle à 4 degrés de liberté dont les fréquences propres sont  $\omega_u$ ,  $\omega_v$ ,  $\omega_w$  et  $\omega_z$ . En pratique,  $\omega_u$  est proche de la libration libre en longitude,  $\omega_v$  de celle en obliquité,  $\omega_w$  est associée au mouvement polaire du moment cinétique total de Mercure autour de l’axe de figure, et  $\omega_z$  est liée à l’orientation du moment cinétique du fluide contenu dans la cavité. C’est cette fréquence qui est proche de la fréquence de rotation. Nous considérons que le champ de gravité, le moment d’inertie polaire et du noyau sont connus, nous faisons donc juste varier les paramètres de forme du noyau  $\epsilon_3 = (2C_c - A_c - B_c)/(2C_c)$  (aplatissement du noyau, Éq.4.40) et  $\epsilon_4 = (B_c - A_c)/(2C_c)$  (triaxialité du noyau, Éq.4.41). Par exemple, pour  $\epsilon_3 = \epsilon_1$  et  $\epsilon_4 = \epsilon_2$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
T_u &= 12.0568 \text{ ans,} \\
T_v &= 1626.51 \text{ ans,} \\
T_w &= 337.853 \text{ ans,} \\
T_z &= 58.6189 \text{ jours,}
\end{aligned}$$

aussi bien analytiquement que numériquement. Dans la suite, nous faisons varier les paramètres de forme du noyau  $\epsilon_3$  et  $\epsilon_4$ .

Les résultats en longitude se trouvent confirmés, la considération de la triaxialité du noyau n'affecte donc pas ce mouvement de façon significative, comme si le couplage de pression s'auto-compensait en longitude. Ce résultat avait déjà été obtenu par (Rambaux et al., 2007b). Je vais donc plutôt détailler les effets sur les autres degrés de liberté.

En fait, les résultats que nous avons obtenus pour la résonance 3 :2 sont relativement proches de ceux obtenus pour la résonance synchrone (Chap.4). Le coefficient de triaxialité du noyau,  $\epsilon_4$ , ne semble pas avoir d'influence significative. Par contre, le coefficient d'aplatissement du noyau,  $\epsilon_3$ , semble critique pour le degré de liberté lié à l'obliquité de Mercure, et pour celui lié au champ de vitesses dans le fluide. Ceci est illustré par la Tab.8.3, donnant les valeurs des périodes des libérations libres associées,  $T_v$  et  $T_z$ .

TABLE 8.3 – Variation des périodes propres d'obliquité  $T_v$  et d'orientation du fluide  $T_z$  en fonction de l'aplatissement du noyau  $\epsilon_3$ , avec  $\epsilon_4 = 0$ . La dernière colonne représente l'écart à la fréquence de rotation de Mercure  $\omega = 3n/2$ . Ces périodes ont été déterminées numériquement, par analyse en fréquences.

$\epsilon_3/\epsilon_1$	$T_v$ (a)	$T_z$ (j)	$T_{z-\omega}$ (a)
0.33	3335.16	58.628	511.17
0.7	1966.31	58.623	409.08
0.8	1823.63	58.622	385.35
0.9	1718.34	58.620	363.50
1.0	1636.35	58.619	343.46
1.1	1570.86	58.617	325.10
1.2	1519.36	58.616	308.30
1.5	1408.10	58.611	266.01
2	1313.11	58.602	214.85
2.5	1250.26	58.594	179.64
3	1216.09	58.585	154.01
3.5	1198.68	58.576	134.72
5	1149.35	58.550	97.69
10	1107.62	58.462	50.83

La période associée à l'obliquité,  $T_v$ , peut devenir très grande lorsque le noyau est très peu aplati. Par contre, lorsque le noyau est très aplati, la période propre associée tend vers une période très proche de celle correspondant à un Mercure rigide, soit 1066 ans. Ce phénomène avait déjà été mentionné par (Poincaré, 1910) sous le nom de *rigidité gyrostatique*. La Fig.8.2 montre le comportement de cette période en fonction de l'aplatissement du noyau  $\epsilon_3$ .

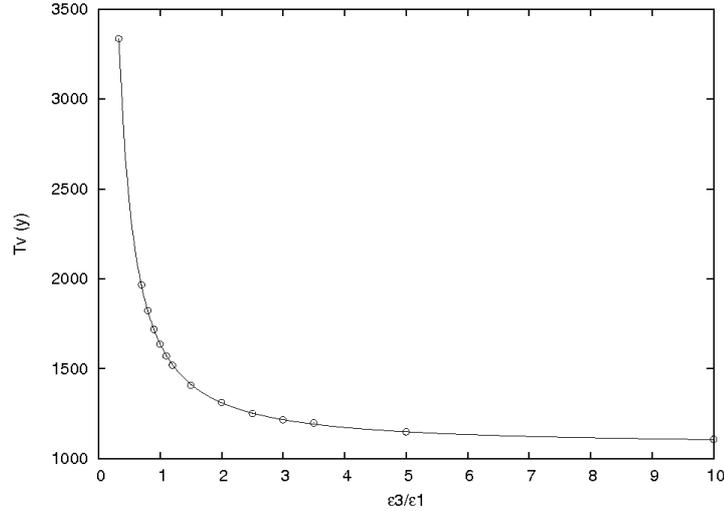


FIGURE 8.2 – La période propre  $T_v$ , liée à l’obliquité, en fonction de l’aplatissement du noyau  $\epsilon_3$ . Un ajustement par moindres carrés donne  $T_v(\epsilon_3/\epsilon_1) = A \times (\epsilon_3/\epsilon_1)^B + C$  avec  $A = 564.488$  ans,  $B = -1.25224 \approx -5/4$  et  $C = 1074.3$  ans, cette dernière valeur étant très proche de la période rigide. Les ronds sont des valeurs extraites des simulations numériques par analyse en fréquence, alors que la ligne solide est l’ajustement.

Un ajustement numérique, par moindres carrés, donne  $T_v \approx A \times (\epsilon_3/\epsilon_1)^B + C$  avec  $A = 564.488 \pm 4.146$ ,  $B = -1.25224 \pm 6.003 \times 10^{-3}$  et  $C = 1074.3 \pm 3.233$  ans. Ces chiffres rendent tentante l’idée que  $T_v$  suit une loi en  $\epsilon_3^{-5/4}$  et que sa valeur asymptotique tend vers la valeur rigide, mais l’absence de confirmation analytique<sup>4</sup> incite à rester prudent quant à l’interprétation de cette évolution.

La période de rotation de Mercure est 58.646 jours. On peut remarquer que la période libre  $T_z$  en est très proche (Tab.8.3), ce qui laisse penser à la possibilité d’un phénomène résonnant désaxant le champ de vitesses dans le fluide par rapport à l’axe de figure. On peut voir que c’est bien le cas (Fig.8.3).

Cette figure montre une amplitude du désaxage,  $J_c$ , d’autant plus grande que le noyau est faiblement aplati ( $\epsilon_3$  petit). On n’observe par contre rien de très intéressant sur le mouvement polaire de Mercure, dont l’amplitude est de l’ordre du mètre (Fig.8.4).

Il semblerait donc qu’un noyau de Mercure proche d’être sphérique aurait des effets résonnants dans le noyau, mais qui resteraient dans le noyau dans le sens où une étude de la rotation de sa surface n’en révélerait pas la signature. Ceci dit, le champ de vitesses dans le fluide doit affecter le champ magnétique de la planète. Pour relier ces 2 objets d’études, il faudrait introduire dans le modèle de rotation les mouvements convectifs dans le fluide.

### 8.3.3 Avec un noyau interne rigide

Ce modèle de Mercure à 2 couches néglige l’influence d’une éventuelle graine, soit un noyau rigide interne. Il sera probablement possible avant longtemps d’inverser la rotation observée avec un modèle à 2 couches, néanmoins la présence ou non d’une graine n’implique pas la même in-

4. Avis aux amateurs.

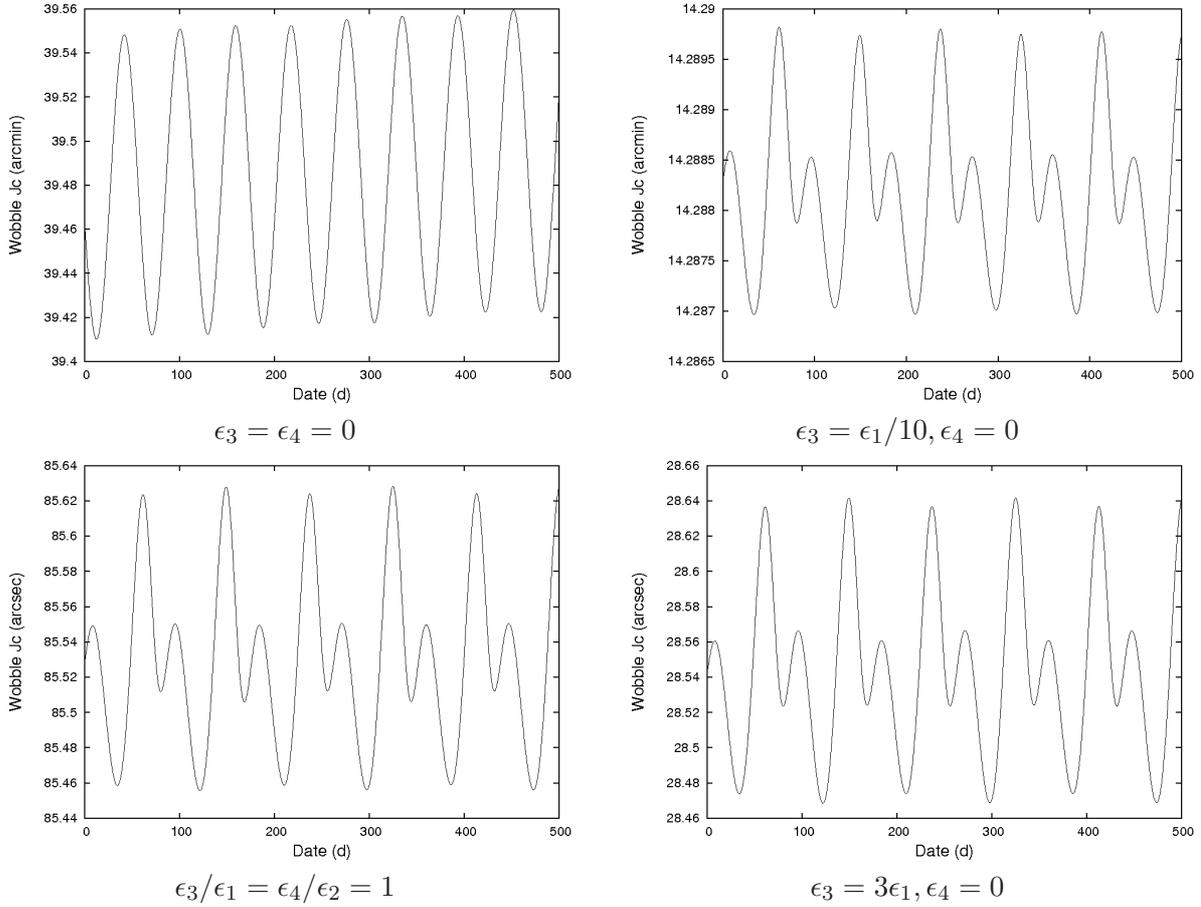


FIGURE 8.3 – Orientation du moment cinétique du fluide dans le noyau, pour différents paramètres d'intérieur. Nous voyons que l'amplitude est d'autant plus grande que l'aplatissement  $\epsilon_3$  est petit.

interprétation physique de l'intérieur. Notamment le couplage gravitationnel entre le manteau et la graine ajoute de l'inertie au manteau, donc à la surface observée de Mercure (Chap.5). Une mesure de libration donnera donc un manteau plus épais si la graine est négligée.

L'idée d'introduire une graine est présente dans la littérature dès (Peale et al., 2002), mais l'influence de cette graine avait été alors vue comme négligeable. Les premières mesures de (Margot et al., 2007) ont suggéré que le noyau fluide était plus large que prévu, ce qui a ouvert la possibilité d'une graine de taille significative, de rayon pouvant dépasser les 1000 km. L'idée a été remise au goût du jour par une équipe canadienne (Veasey & Dumberry, 2011), ce qui a entraîné une succession de publications. Une équipe de l'Observatoire Royal de Belgique (Van Hoolst et al., 2012) y a introduit le couplage de pression en plus du couplage gravitationnel, puis 2 articles de collaboration entre ces 2 équipes (Dumberry et al., 2013; Yseboodt et al., 2013) ont estimé les librations en longitude à l'aide de modèles d'intérieur les plus réalistes possibles.

Dans un tel cas, la modélisation des librations en longitude est plus complexe, car 2 degrés de liberté apparaissent (les librations, couplées, du noyau et du manteau), et donc 2 périodes de libration, l'une plus longue et l'autre plus courte que celle du modèle sans graine, soit  $\approx 12$  ans. Ceci multiplie les possibilités de résonance avec les différentes perturbations planétaires. Néanmoins, les

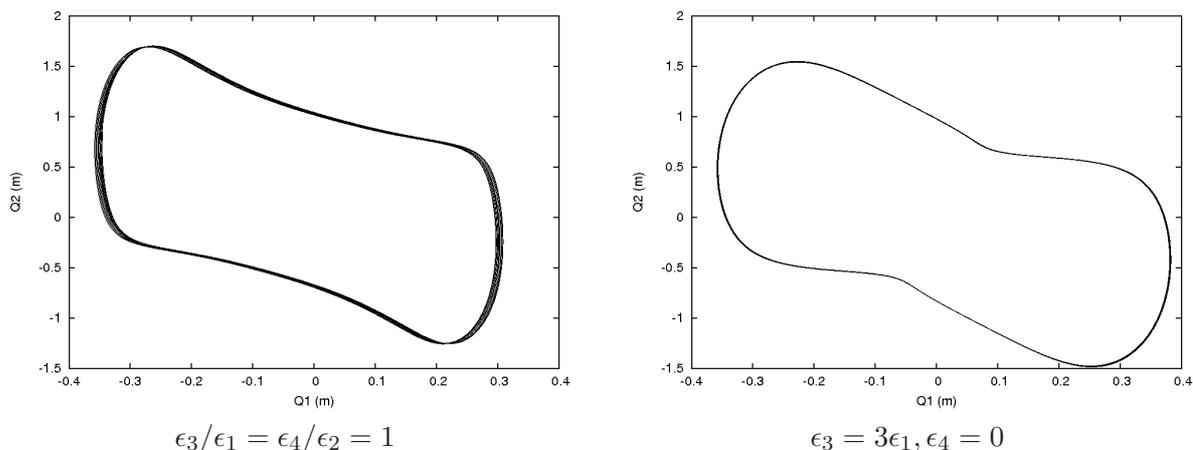


FIGURE 8.4 – Mouvement polaire du manteau, tracé sur 5 ans à partir de J2000.  $Q_1$  et  $Q_2$  sont les amplitudes des mouvements est-ouest et nord-sud, au niveau du pôle nord géométrique de Mercure. La principale période de ce mouvement est 175.9 jours, soit 2 périodes orbitales ou 3 périodes de rotation.

perturbations diurnes restent les plus détectables du fait de leur vitesse, et leur amplitude variera au mieux de 5%.

## 8.4 Conclusion

Les librations diurnes ont été mesurées avec une précision de l'ordre de 5% (Margot et al., 2012), ce qui en permet une première exploitation. Le défi pour les années à venir sera d'améliorer cette mesure, ainsi que de mesurer les termes de perturbation planétaire et éventuellement les librations propres, si elles ne sont pas tout-à-fait amorties. Dans ce cas, il faudra essayer de comprendre pourquoi elles ne le sont pas, Peale (2005) estimant le temps d'amortissement à quelques centaines de milliers d'années.

L'observation radar a toujours fourni les premières mesures de la rotation de Mercure, aussi bien la vitesse de rotation moyenne, que l'obliquité et les librations diurnes. Je ne sais pas si l'accumulation de données sur plusieurs années permettrait de détecter les librations dues aux perturbations planétaires. La mesure de rotation par BepiColombo semble difficile mais possible (Pfyffer et al., 2011; Cicalò & Milani, 2012).

## Chapitre 9

# Étude à très long terme : la capture de Mercure en résonance 3 :2

### 9.1 Introduction

Je présente ici une étude récemment publiée (Noyelles et al., 2014). Il s'agit d'une collaboration entre l'Université de Namur, où Julien Frouard et moi-même travaillions sur la rotation de Mercure, et l'US Naval Observatory (USNO), où Michael Efroimsky et Valeri Makarov revisitent la théorie des marées.

La rotation 3 :2 de Mercure en fait un cas unique dans le Système Solaire, et depuis les années 60, plusieurs études ont été publiées pour tenter d'expliquer cet état de rotation, en partant d'une rotation initiale inconnue, et en faisant agir des dissipations pour finalement obtenir un état d'équilibre, qui doit correspondre à la résonance spin-orbite 3 :2. Ces dissipations incluent systématiquement les forces de marée, qui peuvent être assistées d'un frottement à l'interface fluide-rigide si une couche rigide globale existe au moment de la capture en résonance. Il faut bien comprendre que cette étude ne concerne pas la planète Mercure telle qu'on l'observe actuellement, où la présence de la couche fluide me paraît unanimement acceptée, mais telle qu'elle était au moment de sa capture en résonance. Le processus de capture dépend donc de la façon dont Mercure s'est formée, et aussi de la façon dont ses paramètres orbitaux ont évolué depuis sa formation.

Ce qui a motivé cette étude est l'emploi systématique, par toutes les études précédentes, d'un modèle de marée dit Constant Time Lag (CTL), qui considère que le temps de retard avec lequel la planète répond à l'excitation de marée est indépendant de sa fréquence d'excitation. Ce modèle physiquement irréaliste peut être approprié pour tenter de mesurer ou quantifier l'effet des marées à l'échelle de temps des observations, c'est-à-dire de l'ordre du siècle pour les satellites naturels des planètes géantes, du fait de sa simplicité. Par contre il altère fortement l'évolution temporelle de l'amortissement de la rotation au cours des âges, et de plus il présente une configuration d'équilibre stable pseudosynchrone, qui semble résulter d'un artefact mathématique plus que de la physique du problème, et qui n'a jamais été observée, même pour la Lune<sup>1</sup>.

Je présente d'abord les différents scénarii d'évolution présents dans la littérature (Sec.9.2) avant

---

1. Certains considèrent que la rotation de Vénus est pseudosynchrone, mais Vénus a la particularité d'avoir une atmosphère épaisse. Les fractures à la surface d'Europe semblent être la preuve d'une rotation très légèrement super-synchrone (Geissler et al., 1998), mais là encore, la physique n'est pas la même. Europe a vraisemblablement un océan global sous une surface visco-élastique.

de présenter notre modèle de marées (Sec.9.3). Puis j'expose notre méthode de résolution du problème (Sec.9.4), basée sur de nombreuses simulations numériques, avant de revisiter les principaux scénarii d'évolution.

## 9.2 Différents scénarii d'évolution

Comme je l'ai écrit précédemment, il n'y a pas unanimité dans la communauté scientifique sur la façon dont la structure interne de Mercure a évolué depuis sa formation. Mercure est un mystère car anormalement dense par rapport à sa taille (Fig.9.1).

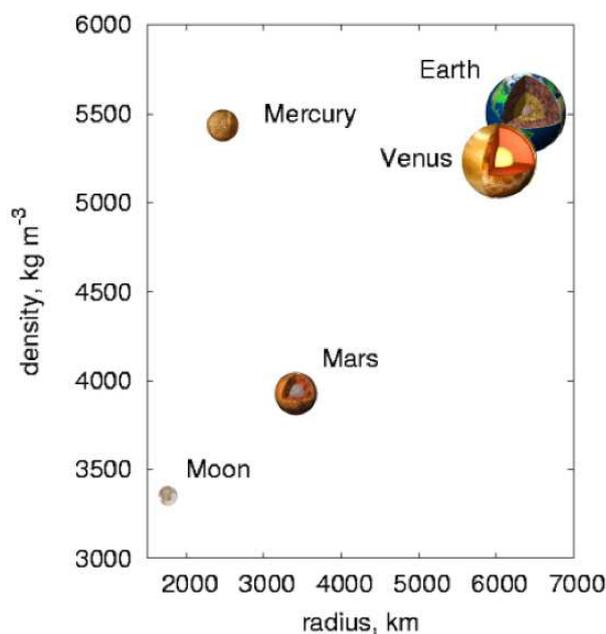


FIGURE 9.1 – Masses volumiques des planètes telluriques, illustration reprise de (Van Hoolst et al., 2007). On peut voir que Mercure semble anormalement dense.

On s'attend en général à ce qu'une planète soit relativement homogène juste après sa formation, puis que les éléments lourds migrent vers le centre, afin de créer un noyau. La masse volumique de Mercure suggère que les éléments lourds sont en proportion anormalement importante, comme si Mercure était en fait le noyau d'un proto-Mercure plus large, dont le manteau d'éléments légers aurait disparu.

### 9.2.1 Différents modèles de formation de Mercure

On peut trouver dans la littérature au moins 4 scénarii d'évolution de la structure interne de Mercure.

1. *Volatilisation des éléments légers dans la nébuleuse proto-planétaire* Il s'agit de la première explication, due à Weidenschilling (1978). Elle suppose qu'une combinaison des forces gravitationnelles et non-gravitationnelles enlève de façon plus efficace les silicates que le fer.

2. *Volatilisation des éléments légers par le vent solaire* Dans ce cas, le processus se passe après la formation de Mercure (Cameron, 1985; Fegley & Cameron, 1987).
3. *Énorme impact qui aurait éjecté le manteau (Benz et al., 1988)* Il semble que ce soit la théorie actuellement la plus populaire dans la communauté scientifique. La violence de cet impact aurait aussi considérablement chauffé Mercure, ce qui aurait accéléré la formation de l'interface noyau-manteau, et donc de la couche fluide globale. Néanmoins, ce scénario semble être mis à mal par des données MESSENGER. En effet, Peplowski et al. (2011) prétendent que le chauffage très important induit par cet impact est incompatible avec l'abondance de potassium par rapport au thorium présent dans la surface de l'hémisphère nord de Mercure.
4. *Photophorèse* Wurm et al. (2013) ont montré que sous l'action de la chaleur d'une étoile dans un disque proto-planétaire, les éléments légers avaient tendance à être repoussés vers l'extérieur. En conséquence, les planètes internes doivent être relativement denses.

Trois de ces scenarii suggèrent que Mercure était initialement froid, alors que l'impact suggère un proto-Mercure chaud<sup>2</sup>. Si Mercure était initialement froid, alors sa principale source de chauffage était le chauffage radiogénique. En négligeant la diffusion, l'élévation de la température  $\Delta T$  pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  nous est donnée par l'équation de la chaleur :

$$\Delta T = \frac{H}{C_p} \Delta t, \quad (9.1)$$

où  $H$  est le chauffage radiogénique et  $C_p$  la capacité de chaleur spécifique. Avec les valeurs actuelles  $H = 3.5 \times 10^{-12} \text{ W/kg}$  et  $C_p = 1200 \text{ J/(K kg)}$  (Turcotte & Schubert, 2002), on aurait une élévation de température de  $1.84 \text{ K}$  sur 20 millions d'années<sup>3</sup>. Dans le Système Solaire primordial,  $H$  aurait pu être 4 fois plus important, mais le chauffage résultant aurait de toute façon été insuffisant pour créer l'interface noyau-manteau avant plusieurs centaines de millions d'années. Dans ce cas, le proto-Mercure que nous considérons doit être solide.

Si par contre la théorie de l'impact est la bonne, alors le proto-Mercure était chaud. Dans ce cas l'interface noyau-manteau a pu se former beaucoup plus rapidement, et la friction noyau-manteau doit être prise en compte pour simuler l'évolution de la rotation.

Les données dont nous disposons sur les systèmes exoplanétaires ne permettent pas de savoir si la masse volumique de Mercure est une règle ou une exception. Si elle s'avérait être une exception, alors la théorie de l'impact serait renforcée.

### 9.2.2 Si Mercure était solide

La première étude de la capture en résonance 3 :2 est due à Goldreich & Peale (1966) qui ont considéré que Mercure tournait sur elle-même initialement de façon prograde, et assez vite, puis qu'elle s'était ralentie sous l'effet des marées solaires. Ils ont considéré que l'excentricité de la planète avait toujours eu sa valeur actuelle, soit  $\approx 0.206$ , et ont obtenu, de façon analytique, une probabilité de capture dans la résonance 3 :2 d'environ 7%. Autrement dit, la situation observée avait 7% de chances de se produire. Une telle conclusion a ceci de frustrant qu'elle suggère que le modèle est insuffisamment précis, mais ne le prouve pas.

---

2. Je parle ici de température, pas d'excentricité.

3. nous verrons plus tard la justification de cette échelle de temps

Quelques années plus tard, Counselman (1969) a proposé que l'excentricité de Mercure pouvait avoir été initialement différente, mais ne voyait pas pourquoi cette différence aurait pu être radicale. Il a considéré qu'elle ne pouvait pas dépasser 0.25. Ceci n'a que peu changé les résultats.

Cette question a été revisitée plus de 3 décennies plus tard, lorsque Correia & Laskar (2004) ont simulé l'évolution orbitale de Mercure à rebours sur 4 milliards d'années avec 1000 conditions initiales, correspondant à notre époque, proches mais différentes, puis ont utilisé ces 1000 trajectoires pour extraire 1000 évolutions temporelles de l'excentricité de Mercure, qui pouvait avoir atteint 0.45. Ces 1000 évolutions de l'excentricité ont ensuite été utilisées pour simuler l'amortissement de la rotation, et les auteurs obtiennent 554 captures dans la résonance 3 :2 sur 1000 trajectoires. Ils observent en fait 3 types de capture :

- *Type I* : Mercure est capturée dans la résonance 3 :2 dès sa première traversée (31 trajectoires),
- *Type II* : Mercure n'est pas initialement capturée, mais du fait de la forme du couple de marée, sa rotation ne ralentit plus ; elle finira capturée (168 trajectoires),
- *Type III* : Mercure traverse la résonance sans être capturée, et sa rotation continue à se ralentir. Bien plus tard, soit quelques dizaines ou centaines de millions d'années, sa rotation s'accélère du fait des variations séculaires de son excentricité, jusqu'à de nouveau croiser la résonance 3 :2. Et elle finira par être capturée (355 trajectoires).

Toutes ces études considèrent que le mouvement de rotation ne se fait qu'en longitude, c'est-à-dire que l'obliquité et le mouvement polaire ont déjà été amortis. L'équation à intégrer était donc

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathcal{T}_z^{(TRI)} + \mathcal{T}_z^{(TIDE)}}{C} \quad (9.2)$$

où  $\mathcal{T}_z^{(TRI)}$  est la composante en  $z$  du couple triaxial, et  $\mathcal{T}_z^{(TIDE)}$  est la composante du couple de marées. Contrairement à la plupart des chapitres précédents, nous ne travaillons pas en formulation Hamiltonienne, ceci ayant moins de sens lorsqu'une dissipation est présente. On peut montrer que le couple triaxial s'écrit

$$\mathcal{T}_z^{(TRI)} = -\frac{3}{2}(B - A)n^2 \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{20q}(e) \sin \left( 2 \left[ \theta - \left( 1 + \frac{q}{2} \right) \mathcal{M} \right] \right). \quad (9.3)$$

Les études sus-citées ont toutes considéré un couple de marée s'exprimant ainsi, ou de façon équivalente à :

$$\mathcal{T}_z^{(TIDE)} = -3n^2 M_{\star} k_2 \Delta t \frac{R^5}{a^3} \left[ \dot{\theta} \mathcal{A}(e) - n \mathcal{N}(e) \right], \quad (9.4)$$

avec

$$\mathcal{A}(e) = \frac{1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4}{(1 - e^2)^{9/2}}, \quad (9.5)$$

$$\mathcal{N}(e) = \frac{1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6}{(1 - e^2)^6}, \quad (9.6)$$

$k_2 = 0.4$  et  $n\Delta t = 1/50$ . On peut remarquer que dans cette dernière quantité, le déphasage temporel  $\Delta t$ , soit le temps de réponse du matériau à l'excitation de marée, ne dépend pas de la fréquence

d'excitation, d'où le nom de Constant Time Lag (CTL). Une conséquence du CTL est une vitesse de rotation d'équilibre super-synchrone (ou pseudosynchrone) :

$$\dot{\theta} = n + 6ne^2 + \frac{3}{8}ne^4 + \mathcal{O}(e^6). \quad (9.7)$$

Avec l'excentricité actuelle  $e = 0.206$ , on a une vitesse de rotation d'équilibre à  $1.26n$ . Avec  $e = 0.285$ , cet équilibre se confond avec la résonance 3 :2. C'est cet équilibre qui a permis à Correia & Laskar (2004) d'observer des accélérations de la rotation de Mercure. Leur explication repose donc sur la croyance en la rotation pseudosynchrone.

### 9.2.3 Avec un noyau fluide

Goldreich & Peale (1967) ont été les premiers à introduire un terme de friction noyau-manteau, à l'époque pour étudier la rotation de Vénus. En exprimant l'angle  $\gamma$  de libration autour de la résonance q' :2 :

$$\gamma \equiv \theta - \left(1 + \frac{q'}{2}\right) \mathcal{M}, \quad (9.8)$$

les équations du mouvement sont, dans le cadre d'un régime laminaire dans le fluide :

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}_m &= -\omega_0^2 \sin 2\gamma_m + \frac{\langle \mathcal{T}_z^{(\text{TIDE})} \rangle}{C_m} - \frac{k}{C_m} (\dot{\gamma}_m - \dot{\gamma}_c), \\ \ddot{\gamma}_c &= \frac{k}{C_c} (\dot{\gamma}_m - \dot{\gamma}_c), \end{aligned} \quad (9.9)$$

où les indices  $m$  et  $c$  se rapportent respectivement au manteau et au noyau,  $\omega_0$  est la pulsation des oscillations libres en longitude, et  $k$  est une constante de friction qui couple les 2 mouvements.

Counselman (1969) a appliqué ce modèle pour Mercure et a trouvé que la probabilité de capture locale était plus importante, mais pas la probabilité de capture globale. En d'autres termes : si le système traversait la résonance 3 :2, alors il avait des chances raisonnables d'y être capturé. Mais en fait la plupart des trajectoires étaient capturées en résonance 2 :1 et donc n'atteignaient jamais la résonance 3 :2. Ces résultats ont été confirmés et enrichis par Peale & Boss (1977) qui avaient conclu que, pour que Mercure évite d'être capturée dans la résonance 2 :1, alors, en supposant que la viscosité cinématique du fluide constituant le noyau externe était de l'ordre de celle de l'eau, soit  $\approx 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ , le facteur de qualité  $Q \equiv (n\Delta t)^{-1}$  devait être plus petit que 100.

En considérant les variations séculaires de l'excentricité, Correia & Laskar (2009) ont estimé que si un noyau fluide devait être considéré, alors il était vraisemblable que Mercure avait été capturée en résonance 2 :1 avant qu'une forte baisse de son excentricité rompe cette résonance, permettant ainsi la rencontre avec la résonance 3 :2, puis sa capture. Dans (Correia & Laskar, 2012), ils envisagent également que la résonance 2 :1 ait été rompue par un impact.

### 9.2.4 Si Mercure était initialement rétrograde

Toutes les études que j'ai citées dans ce chapitre jusqu'à présent ont considéré un proto-Mercure ayant une rotation prograde. L'idée que les rotations primordiales sont progrades était largement répandue jusqu'il y a peu, peut-être car cela semble intuitif si on imagine le mouvement d'ensemble

de la nébuleuse proto-planétaire. Ceci néglige le fait qu’au stade primordial de l’évolution du Système Solaire, les collisions étaient fréquentes. La prise en compte de ces collisions rend aléatoire la distribution des obliquités initiales des corps du Système Solaire (Dones & Tremaine, 1993; Kokuba & Ida, 2007).

Si Mercure a été initialement rétrograde, alors elle a été bloquée en rotation synchrone. Wic-zorek et al. (2012), par un comptage des cratères utilisant des données de Mariner 10 et des 2 premiers survols de MESSENGER, observent une assymétrie est-ouest, qu’ils interprètent comme la preuve que Mercure a été initialement synchrone. Ils supposent qu’ensuite un impact, laissant un cratère de plus de 300 km, a été assez important pour que Mercure quitte l’état synchrone et atteigne l’état pseudosynchrone, qui aurait fini par l’amener à la résonance 3 :2.

Ce scenario est basé sur 4 fondements : que Mercure a pu être initialement rétrograde, que le proto-Mercure a été fortement impacté, que le comptage des cratères est bien une preuve d’une ancienne rotation synchrone, et que la rotation pseudosynchrone est stable. Nous avons vu que Mercure a pu être initialement rétrograde, et que la rotation pseudosynchrone est induite par le CTL.

Plusieurs études confirment que Mercure a été fortement impactée dans son premier milliard d’années, notamment lors du Late Heavy Bombardment (LHB) (Strom et al., 2008, 2011). Par contre, l’interprétation du comptage des cratères ne fait pas l’unanimité. Fassett et al. (2012), en utilisant notamment des données acquises après la mise en orbite de MESSENGER, confirment cette distribution assymétrique et reconnaissent qu’elle peut venir d’une ancienne rotation synchrone, mais disent aussi qu’elle peut être due à un renouvellement dissymétrique de la surface, ce qui expliquerait également la distribution hémisphérique des plaines observée par Denevi et al. (2009).

### 9.3 Pourquoi utiliser un nouveau modèle de marée

Je présente ici brièvement notre modèle de marée, élaboré par Efroimsky (2012a,b). Ce modèle a l’avantage d’être basé sur des considérations physiques, notamment il décompose le couple de marée à la manière de (Kaula, 1964), pour pouvoir prendre en compte la réponse du matériau aux différentes fréquences d’excitation possibles.

#### 9.3.1 Théorie

Il faut bien comprendre que le comportement d’un matériau diffère selon la fréquence d’excitation. À basse fréquence, le matériau aura un comportement relativement élastique, et plus visqueux à plus haute fréquence. Il est donc nécessaire de développer le potentiel de marée selon les différents modes d’excitation.

Ce travail a été fait notamment par (Efroimsky, 2012a,b) et fait apparaître des sommations sur 4 indices, ainsi qu’une partie oscillante dans le couple de marée. Après de nombreuses simplifications, consistant notamment à négliger l’obliquité et l’inclinaison, à se limiter aux modes les plus significatifs, et à faire disparaître le couple oscillant par moyennisation, il reste :

$$\mathcal{T}_{tide} = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G} M_{\star}^2}{a} \left( \frac{R}{a} \right)^5 \sum_{q=-\infty}^{\infty} (G_{20q}(e))^2 k_2(\omega_{220q}) \sin \epsilon_2(\omega_{220q}) + \mathcal{O}(i^2 \epsilon) + \mathcal{O}((R/a)^7 \epsilon). \quad (9.10)$$

Le terme  $k_2(\omega_{220q}) \sin \epsilon_2(\omega_{220q})$  contient la dépendance en la fréquence d’excitation, qui en fait ne dépend pas de son signe. On définit la fréquence de marée  $\chi$  par

$$\chi_{220q} = |\omega_{220q}| \approx (2 + q)n - 2\dot{\theta}. \quad (9.11)$$

Le modèle dit de Maxwell (Maxwell, 1867) est très populaire pour représenter les 2 types de comportement du matériau. Il utilise un temps de Maxwell  $\tau_M = \eta/\mu$  où  $\eta$  est la viscosité du matériau et  $\mu$  sa rigidité, qui signifie, grossièrement, que si la période de l'excitation est supérieure au temps de Maxwell alors le matériau répondra de façon élastique, sinon il aura un comportement visqueux.

Des tests expérimentaux, notamment sur la glace, ont montré que le modèle de Maxwell était de moins en moins précis à mesure que la fréquence d'excitation augmentait. Pour cela, le modèle d'Andrade donne de meilleurs résultats (Andrade, 1910). C'est la raison pour laquelle nous utilisons la dépendance en fréquence suivante, reprise de (Efroimsky, 2012a,b) :

$$k_2(\omega_{220q}) \sin \epsilon_2(\omega_{220q}) = \frac{3}{2} \frac{-A_2 \mathcal{I}[\bar{J}(\chi)]}{\left(\mathcal{R}[\bar{J}(\chi)] + A_2\right)^2 + \left(\mathcal{I}[\bar{J}(\chi)]\right)^2} \text{Sgn}(\omega_{220q}), \quad (9.12)$$

$$A_2 = \frac{57\mu}{8\pi G \rho^2 R^2}, \quad (9.13)$$

$$\mathcal{R}[\bar{J}(\chi)] = 1 + (\chi\tau_A)^{-\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(\alpha + 1), \quad (9.14)$$

$$\mathcal{I}[\bar{J}(\chi)] = -(\chi\tau_M) - (\chi\tau_A)^{-\alpha} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(\alpha + 1), \quad (9.15)$$

où  $\bar{J}(\chi)$  est la compliance complexe à la fréquence de marée  $\chi$ ,  $\tau_A$  le temps d'Andrade, et  $\alpha$  le paramètre d'Andrade. Nous prenons  $\alpha = 0.2$  et  $\tau_M = \tau_A$ .

Dans la pratique, la prise en compte de la fréquence d'excitation a une importance cruciale au moment de la traversée d'une résonance spin-orbite. En effet, pour chacun des modèles physiques existant dans la littérature, la prise en compte de la fréquence d'excitation induit un saut comme celui montré à la Fig.9.2, alors que le CTL aura une forme affine à faible pente. Le comportement qualitatif du système est donc fondamentalement différent à la traversée et au voisinage d'une résonance spin-orbite.

### 9.3.2 Une rotation pseudosynchrone impossible

L'une des principales caractéristiques du CTL est la présence d'un équilibre pseudosynchrone, état final le plus probable d'après les simulations numériques, lorsque l'excentricité est constante. Lorsque l'excentricité varie et que la planète est dans cet état d'équilibre pseudosynchrone, alors sa rotation peut s'accélérer selon la loi (9.7). Lorsque la rotation initiale est supérieure à la rotation pseudosynchrone, alors la rotation synchrone est en général inatteignable, sauf phénomène catastrophique. Par *équilibre*, il faut comprendre que c'est un équilibre au sens pratique du terme, c'est-à-dire un état final raisonnablement probable. Mathématiquement, on parle d'*équilibre stable*, c'est-à-dire que non seulement il correspond à un équilibre des couples agissant sur Mercure (le couple gravitationnel et le couple de marées), mais en plus, tout petit écart à cet équilibre aura pour conséquence sa restauration, autrement dit une perturbation ne peut pas le rompre dès lors qu'elle est suffisamment petite.

La Fig.9.3 montre l'équilibre dû au couple de marée dans les 2 cas. Les paramètres utilisés sont ici ceux de la Lune, mais l'explication reste qualitativement valide. Sur la courbe, la rotation du corps

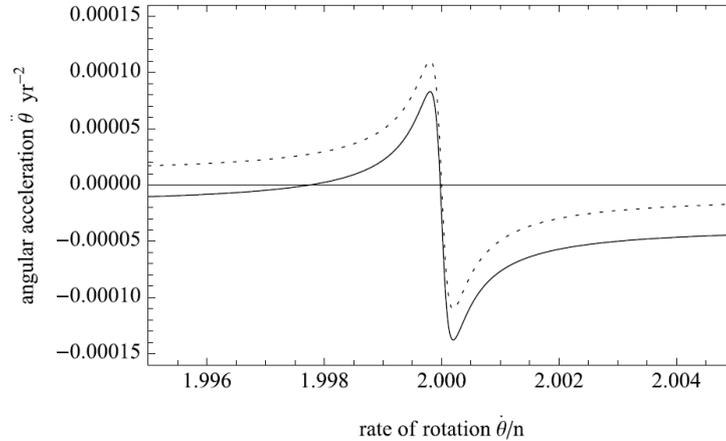


FIGURE 9.2 – Accélération de marée au voisinage d’une résonance. Figure reprise de (Makarov, 2013).

est à l’équilibre. Chacune de ces courbes sépare le plan en 2, le corps est accéléré au-dessus de la courbe, et décéléré en-dessous. Ceci a pour conséquence que lorsque la courbe a une pente positive, alors l’équilibre est stable, et il est instable si la pente est négative. Dans le cas du CTL, tous les équilibres sont stables, c’est pour ça qu’on peut avoir une rotation d’équilibre pseudosynchrone (ou super-synchrone). Par contre, dans le cas de notre modèle de marée, la pente n’est positive qu’au voisinage des résonances spin-orbite. En conséquence, ce sont les seuls équilibres stables, équilibres qui se trouvent renforcés par notre modèle de marée du fait qu’ils ne sont pas présents que dans le couple gravitationnel. Ceci suggère également, comme l’indiquera la suite, que les probabilités de capture dans les résonances spin-orbite sont plus grandes qu’avec le CTL.

### 9.3.3 Résultats préliminaires

Makarov (2012) a fait des simulations numériques des probabilités locales de capture dans les principales résonances spin-orbite, c’est-à-dire en lançant chaque simulation juste avant la rencontre avec la résonance, pour différentes excentricités, considérées comme constantes. Les simulations différaient par la condition initiale de l’angle de la rotation. Les résultats sont donnés Fig.9.4, les paramètres d’intérieur utilisés étant ceux de Mercure, avec le temps de Maxwell  $\tau_M = 500$  ans.

On constate que les probabilités de capture dépendent de l’excentricité, ce qui était attendu car elle intervient dans le couple de marée par le biais de la quantité  $G_{20q}(e)$ , ainsi que dans le couple gravitationnel. Il est intéressant de constater que certaines résonances deviennent certaines au-delà d’une certaine excentricité. Notamment la résonance 3 :2 est certaine pour  $e > 0.18$ , et la 2 :1 est certaine pour  $e > 0.3$ . Ce résultat tranche radicalement avec le CTL, qui donne une probabilité de capture dans la résonance 3 :2 de 7%. Ce résultat justifie que les scénarii d’évolution spin-orbite de Mercure soient revisités en utilisant un modèle de marée plus réaliste.

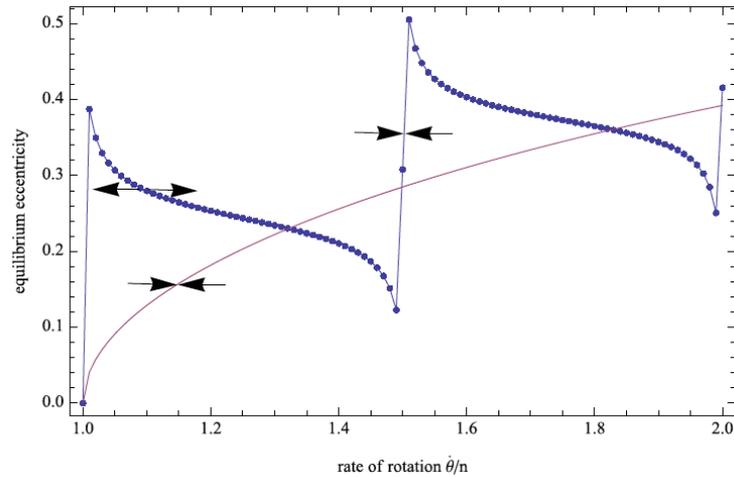


FIGURE 9.3 – Instabilité de la rotation pseudosynchrone. La rotation d'équilibre induite par le CTL est en mauve, celle due à notre modèle est en bleu. Chacune de ces 2 courbes partage le plan en 2, le corps considéré accélère au-dessus de la courbe, et décélère en-dessous. Figure reprise de (Makarov & Efroimsky, 2013).

## 9.4 La méthode

Tenir compte d'un Mercure primordial, ou proto-Mercure, nécessite notamment de considérer son orbite primordiale. Nous nous basons pour cela sur les travaux de Jacques Laskar et ses collaborateurs sur l'évolution à long terme du Système Solaire interne, qui est chaotique avec un temps de Lyapunov de l'ordre de 10 millions d'années (Laskar, 1989). En conséquence, les quantités orbitales primordiales des planètes doivent être exprimées de façon statistique. Si leurs demi-grands axes peuvent être considérés comme constants, l'excentricité de Mercure peut avoir été très basse, comme elle peut avoir atteint 0.45 (Laskar, 2008). Une étude dédiée à Mercure doit tenir compte de ces aspects.

Il faut également considérer que les conditions initiales de la rotation de Mercure sont méconnues. Si on considère que l'obliquité et le mouvement polaire se sont vite amortis, l'angle de rotation et la vitesse initiales sont incertaines.

Tout ceci incite à considérer l'évolution de la rotation de Mercure d'un point de vue statistique. En gardant à l'esprit que des simulations numériques sur le très long terme seront nécessaires, le temps se mesurant en millions d'années, il devient évident que des simulations numériques utilisant des outils de calcul performants seront nécessaires. Nous avons utilisé, comme précédemment, l'intégrateur d'Adams-Bashforth-Moulton d'ordre 10.

### 9.4.1 Évolution de l'excentricité

Laskar (2008) a montré, par des simulations numériques sur 5 milliards d'années, que l'évolution passée de l'excentricité de Mercure devait être considérée d'un point de vue statistique, pour tenir compte de la diffusion chaotique (Fig.9.5).

Il a suggéré de décrire cette statistique par une loi de Rice

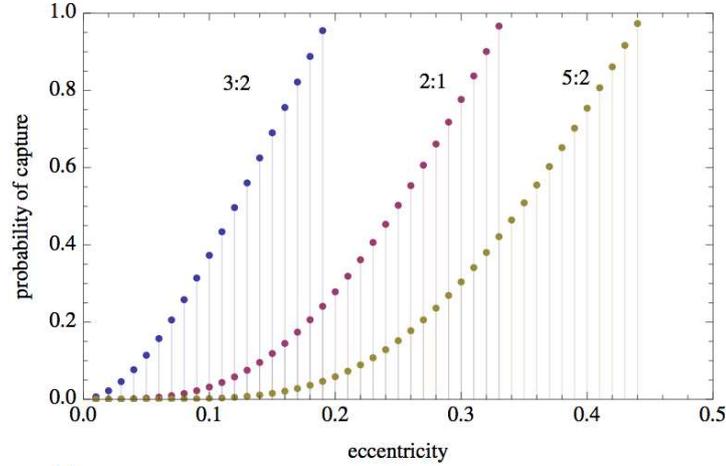


FIGURE 9.4 – Probabilités de capture obtenues par (Makarov, 2012). On constate qu’avec l’excentricité actuelle  $e = 0.206$ , alors Mercure est certaine d’être capturée dans la résonance 3 :2 si elle la traverse.

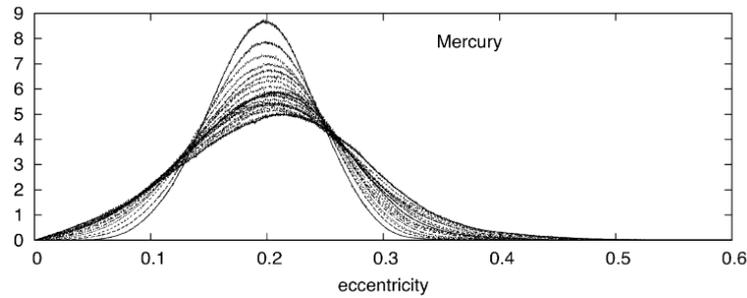


FIGURE 9.5 – Évolution statistique de l’excentricité de Mercure, d’après (Laskar, 2008). Les courbes sont espacées de 250 millions d’années, et elles s’évasent à mesure qu’on s’approche de l’origine du Système Solaire.

$$f_{T,s}(e) = \frac{e}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{e^2 + s^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{es}{\sigma^2}\right), \quad (9.16)$$

avec

$$\sigma^2(T) = b_0 + b_1 T \quad (9.17)$$

pour modéliser un phénomène de diffusion, où  $b_0 = 2.07 \times 10^{-3}$ ,  $b_1 = 1.043 \times 10^{-3}$ ,  $s = 0.1875$ , et le temps  $T$  est en milliards d’années.  $I_0$  est la fonction de Bessel de première espèce.

Julien Frouard a fait un travail formidable d’élaboration d’évolutions temporelles synthétiques de l’excentricité de Mercure, afin de reproduire ces statistiques et d’obtenir ces trajectoires sans refaire les simulations numériques de (Laskar, 2008). Pour cela il a utilisé un processus de Wiener du type

$$e(T + \delta_t) = e(T) + \sigma(\delta_t)\delta_e, \quad (9.18)$$

où  $e(0)$  est l'excentricité initiale et  $\sigma$  la déviation standard.  $\delta_t$  est un incrément en temps, et  $\delta_e$  un incrément indépendant, obéissant à une loi gaussienne. La déviation standard utilisée dans l'équation (9.18) est obtenue en ajustant une loi gaussienne à la loi de Rice (9.16), ce qui donne  $\sigma^2(t) = 0.0009t$ . Après quelques autres étapes détaillées dans (Noyelles et al., 2014), visant notamment à supprimer les excentricités négatives données par la loi gaussienne, et à retourner le sens du temps car on raisonne à rebours, on obtient 1000 trajectoires (Fig.9.6), c'est-à-dire 1000 évolutions temporelles synthétiques de l'excentricité, dont les statistiques vérifient la loi (9.16).

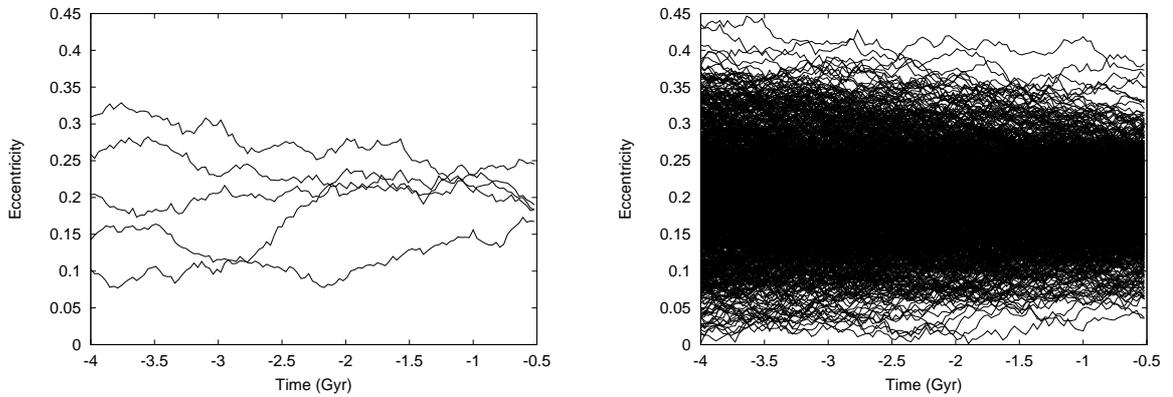


FIGURE 9.6 – Évolution temporelle de 5 (à gauche) et 1000 (à droite) excentricités synthétiques de Mercure.

Nous avons ainsi obtenu des évolutions temporelles de l'excentricité de Mercure que nous avons pu injecter dans l'équation régissant la rotation (9.2).

#### 9.4.2 Validation de la méthode

Une bonne façon de valider notre méthode était de tenter de reproduire les résultats statistiques de (Correia & Laskar, 2004). Afin de limiter le temps de calcul, j'ai limité chacune des simulations à 3 millions d'années, ce qui permet de dire si Mercure a été capturée à la première traversée de la résonance 3 :2. On peut donc comparer avec les 31 captures de Type I sur 1000 trajectoires obtenues par Correia & Laskar (2004). À partir des 1000 évolutions synthétiques de l'excentricité, nous créons 10 ensembles de 1000 simulations numériques avec une période de rotation initiale de 20 jours, et des angles de rotation initiaux différents, le modèle de marée étant le CTL (Éq.9.4). La répartition des vitesses de rotation finales est donnée Fig.9.7.

On constate des pics de densité aux résonances spin-orbite 3 :2, 2 :1, 5 :2 et 3 :1, correspondant à des captures. Le pic le plus important correspond à la rotation pseudosynchrone, nous voyons bien que la résonance synchrone n'est pas atteinte.

Afin d'estimer le nombre de trajectoires effectivement capturées dans chaque résonance, en particulier la 3 :2, nous ajustons une fonction de répartition par moindres carrés pour supprimer les trajectoires en rotation pseudosynchrone. En supprimant cette fonction  $f(\dot{\theta}) = a/\dot{\theta}^b$  avec  $a = 31\,476.4$  et  $b = 12.9944$  des statistiques globales, nous pouvons estimer le nombre de trajectoires capturées dans chacun des échantillons (Tab.9.1).

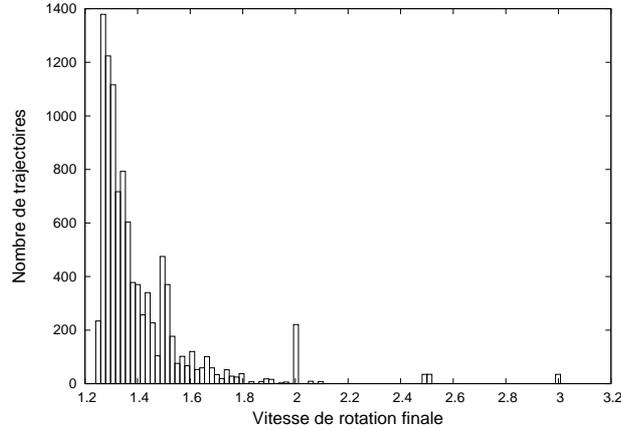


FIGURE 9.7 – Répartition des vitesses de rotation de 10 000 proto-Mercures après 3 millions d’années, avec le CTL. On peut constater une accumulation au niveau de la rotation pseudosynchrone.

TABLE 9.1 – Estimation du nombre de captures pour chacun des 10 échantillons de 1000 simulations numériques, avec le CTL. Du fait d’erreurs d’arrondi, la ligne *Total* ne correspond pas exactement à la somme des 10 lignes précédentes.

	3 :2	2 :1	5 :2	3 :1
Échantillon 0	37	20	8	5
Échantillon 1	47	15	5	1
Échantillon 2	51	22	10	4
Échantillon 3	34	26	8	8
Échantillon 4	56	21	5	1
Échantillon 5	35	28	6	4
Échantillon 6	40	23	6	1
Échantillon 7	29	17	11	3
Échantillon 8	39	26	5	7
Échantillon 9	49	23	6	1
Total	415	217	70	35

On a 415 captures de Type I (pour reprendre la terminologie de (Correia & Laskar, 2004)) en résonance 3 :2 pour 10 000 trajectoires, alors que (Correia & Laskar, 2004) en avaient 31 pour 1000 trajectoires. Il est intéressant de constater la variabilité du nombre de trajectoires capturées selon les échantillons, qui utilisent les mêmes évolutions temporelles de l’excentricité. On a en effet entre 29 et 56 captures, donc nos résultats sont cohérents avec ceux de l’étude sus-citée. Ceci dit, ils illustrent la difficulté de l’estimation de probabilités de capture à partir de résultats numériques.

Nous pouvons considérer la méthode comme validée et pouvons maintenant utiliser notre couple de marée pour revisiter l’histoire de la rotation de Mercure.

## 9.5 Revisite du scenario 1 : Mercure était solide au moment de la capture

Ici nous revisitons le premier scenario, qui considère que Mercure était initialement prograde, et que l'interface noyau-manteau n'était pas encore formée. En fixant le paramètre d'Andrade  $\alpha = 0.2$  et les moments d'inertie de Mercure, et en imposant  $\tau_A = \tau_M$ , alors le modèle ne dépend plus que d'un seul paramètre : le temps de Maxwell  $\tau_M$ . Nous allons le faire varier.

### 9.5.1 Premiers essais

Nos premiers essais ont été faits avec  $\tau_M = 500$  ans, et il s'avère que 20 millions d'années suffisent pour obtenir l'état final de Mercure. Cette valeur du temps de Maxwell est parfois utilisée pour la Terre. Nous obtenons les statistiques suivantes :

- Résonance 4 :1 : 5 captures (0.5%),
- Résonance 7 :2 : 21 captures (2.1%),
- Résonance 3 :1 : 40 captures (4%),
- Résonance 5 :2 : 103 captures (10.3%),
- Résonance 2 :1 : 279 captures (27.9%),
- Résonance 3 :2 : 444 captures (44.4%),
- Résonance 1 :1 : 104 captures (10.4%),

rassemblées dans la Fig.9.8.

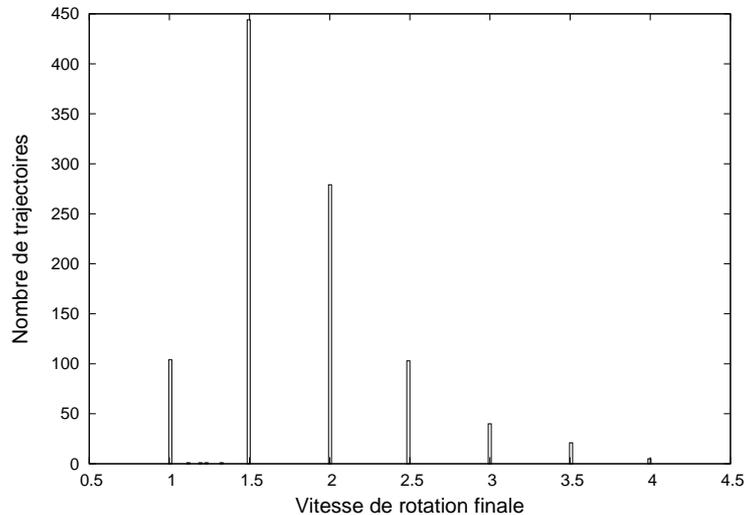


FIGURE 9.8 – Statistiques de capture avec  $\tau_M = 500$  ans. Ces résultats ont été obtenus sur 20 millions d'années. On peut voir que la résonance 3 :2 est la plus probable.

La différence avec le CTL est spectaculaire. Comme prévu, on n'a plus l'état de rotation pseudosynchrone. De plus, la résonance spin-orbite 3 :2 est l'état final le plus probable. Ainsi on apporte une solution au problème posé après la probabilité de capture de 7% par (Goldreich & Peale, 1966), sans avoir recours aux variations séculaires de l'excentricité. Ceci signifie aussi que dans ce cas, Mercure a été capturée en résonance 3 :2 en moins de 20 millions d'années, un temps bien trop court

pour former l'interface noyau-manteau si le proto-Mercure était froid, c'est-à-dire s'il ne résulte pas d'un impact suffisamment violent pour expulser le manteau.

### 9.5.2 Avec un proto-Mercure plus chaud

Le Mercure primordial étant très mal connu, nous avons testé le modèle avec des temps de Maxwell plus courts, correspondant à des modèles plus chauds. Plus précisément, nous avons testé  $\tau_M = 5$  ans et  $\tau_M = 15$  ans. Les résultats sont rassemblés Tab.9.2 et Fig.9.9.

TABLE 9.2 – Statistiques de capture pour un temps de Maxwell plus court.

	$\tau_M = 5$ ans	$\tau_M = 15$ ans
Résonance 4 :1	13 captures (1.3%)	7 captures (0.7%)
Résonance 7 :2	43 captures (4.3%)	22 captures (2.2%)
Résonance 3 :1	118 captures (11.8%)	104 captures (10.4%)
Résonance 5 :2	240 captures (24%)	177 captures (17.7%)
Résonance 2 :1	361 captures (36.1%)	368 captures (36.8%)
Résonance 3 :2	205 captures (20.5%)	284 captures (28.4%)
Résonance 1 :1	20 captures (2%)	38 captures (3.8%)

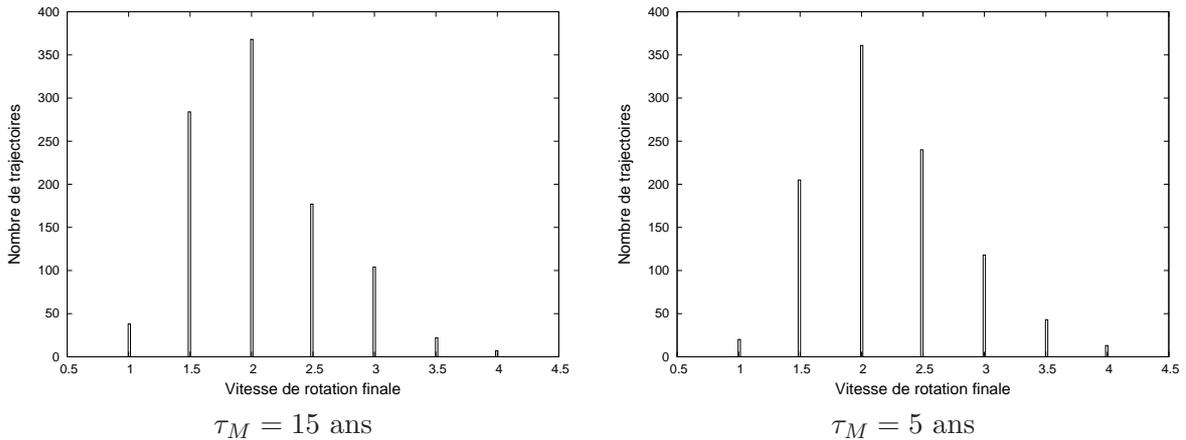


FIGURE 9.9 – Statistiques de captures pour un proto-Mercure plus chaud. On constate que la diminution du temps de Maxwell  $\tau_M$  favorise la résonance 2 :1 par rapport à la résonance 3 :2.

Nous constatons qu'un temps de Maxwell plus court favorise les résonances d'ordre plus élevé. En conséquence, le proto-Mercure a moins de chances de finir capturé dans la résonance 3 :2 du fait qu'il a moins de chances de l'atteindre. Ceci semble être un argument en faveur d'un Mercure froid, mais n'oublions pas que les résultats sont statistiques. Ce n'est pas parce qu'un scénario est peu probable qu'il ne s'est pas produit.

## 9.6 Revisite du scénario 2 : le noyau de Mercure existait déjà

Si Mercure a subi un impact qui aurait expulsé le manteau d'éléments légers, alors il aurait été suffisamment chaud pour créer une interface fluide-solide rapidement. Il faut donc tenir compte de la

friction noyau-manteau dans l'évolution de la rotation. Valeri Makarov a fait une étude analytique du problème, en généralisant le formalisme de (Goldreich & Peale, 1967) à tout type de couple de marée, pour un fluide laminaire. Il en a déduit une formule de probabilité de capture dont l'application numérique est donnée Fig.9.10.

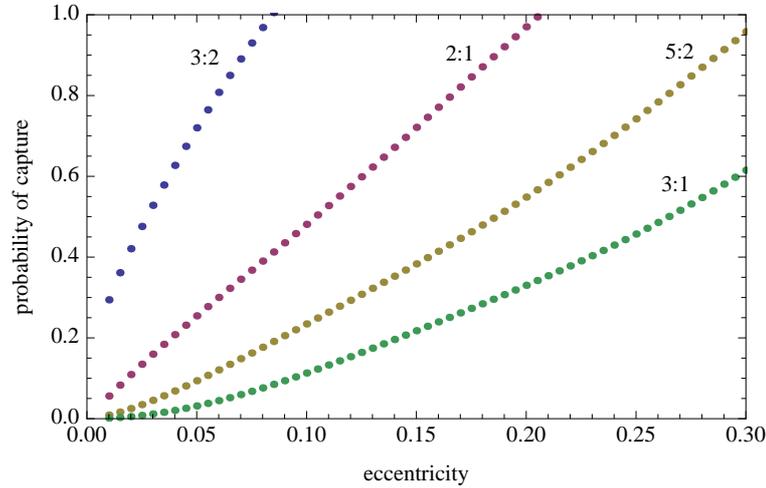


FIGURE 9.10 – Probabilités de capture dans les résonances spin-orbite pour un grand noyau vérifiant  $C_m/C = 0.5$ , et un coefficient de friction  $k$  tel que  $k/C_m = 10^{-5}$ .

On constate, comme (Peale & Boss, 1977) et (Correia & Laskar, 2009), que la considération de la friction noyau-manteau augmente considérablement les probabilités de capture. À l'excentricité actuelle, la capture dans la résonance 2 :1 est certaine, rendant la résonance 3 :2 impossible. Il faut donc envisager que l'excentricité de Mercure ait été plus petite.

## 9.7 Revisite du scenario 3 : une résonance synchrone destabilisée

Ce scenario, issu de (Wieczorek et al., 2012), considère que la répartition des cratères à la surface de Mercure est la preuve d'une ancienne résonance synchrone, qui aurait été destabilisée par un impact. Il faut donc examiner 2 problèmes :

1. Comment Mercure peut avoir été en rotation synchrone,
2. Comment un impact peut rompre cette rotation synchrone et provoquer la capture en résonance 3 :2.

Avec le CTL, la rotation synchrone n'est possible que si Mercure est initialement rétrograde, l'état d'équilibre pseudosynchrone empêchant la résonance synchrone si Mercure est initialement prograde. Ce n'est pas le cas avec notre modèle, comme nous l'avons montré dans les sections précédentes, où la rotation synchrone est possible avec un Mercure prograde, et plus facile sans noyau et à faible excentricité.

Si le proto-Mercure était initialement rétrograde, alors il a traversé des résonances -5 :2, -2 :1, -3 :2, et -1 :1 avant de devenir prograde. J'ai réalisé des simulations numériques en utilisant notre modèle de marée et un proto-Mercure solide initialement rétrograde, et toutes mes trajectoires ont

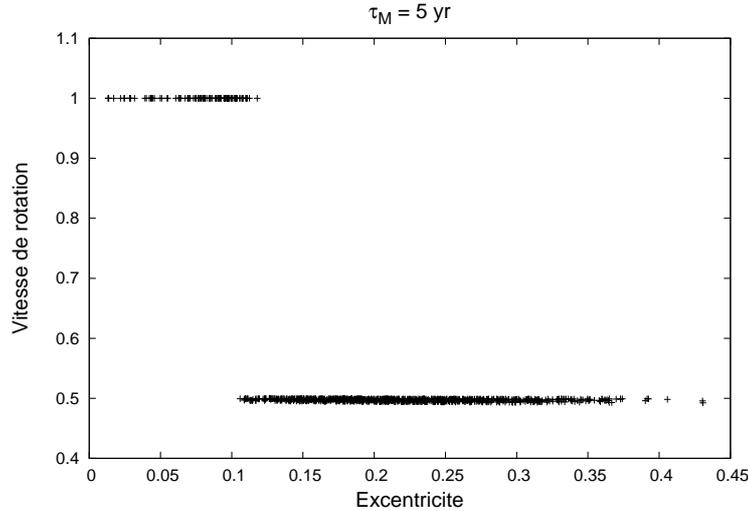


FIGURE 9.11 – Vitesses de rotation finales d’un proto-Mercure chaud ( $\tau_M = \tau_A = 5$  ans). On observe que la résonance 1 :2 est certaine pour une excentricité supérieure à 0.12. Lorsque le temps de Maxwell est plus long, on n’observe que la rotation synchrone.

fini en rotation synchrone pour des temps de Maxwell de 15 et 500 ans. Pour  $\tau_M = 5$  ans, j’obtiens des captures en résonance 1 :2 pour une excentricité supérieure à 0.12 (Fig.9.11).

La question de l’impact est plus compliquée qu’avec le CTL. Avec le CTL, il suffisait que l’impact rompe la rotation synchrone, et l’état pseudosynchrone prenait le relais, pouvant éventuellement accélérer la rotation de Mercure. Dans notre cas, un impact qui simplement romprait la rotation synchrone verrait Mercure être de nouveau capturée en rotation synchrone, à moins que son excentricité soit suffisamment importante pour être dans la zone d’accélération (Fig.9.3). Il faut donc, à excentricité raisonnable, que l’impact soit suffisamment violent pour atteindre la résonance 3 :2. Il faut également que la direction de l’impact soit favorable pour modifier la vitesse de la rotation préférentiellement en longitude.

Nous estimons qu’un tel impacteur aurait laissé un bassin d’au moins 600 km de diamètre ; il y a probablement environ une douzaine de cratères de cette taille à la surface de Mercure. Ce scénario reste donc possible, même s’il est moins envisageable qu’avec le CTL.

## 9.8 Conclusion

Ce chapitre a proposé de revisiter le processus de capture de Mercure dans la résonance spin-orbite 3 :2. Nous avons vu l’importance du modèle de marée, le populaire Constant Time Lag sous-estimant largement les probabilités de capture et permettant des accélérations fictives de la rotation.

Nous avons examiné les 3 scénarii présents dans la littérature : Mercure initialement solide et prograde, Mercure initialement différenciée et prograde, et Mercure synchrone dans le passé puis impactée. Le cas d’un proto-Mercure initialement différencié paraît peu probable, car la résonance 3 :2 n’est alors possible qu’à faible excentricité. Brasser et al. (2013) soutiennent d’ailleurs que Mercure était initialement quasi-circulaire. La théorie de l’impact qui aurait destabilisé la rota-

tion synchrone n'est pas impossible non plus, mais elle est moins probable qu'auparavant car elle nécessite un plus gros impacteur et / ou une excentricité plus grande.

Nous pensons que le scénario le plus probable est celui d'un Mercure initialement froid, solide et prograde ; dans ce cas la résonance spin-orbite 3 :2 est l'état final le plus probable. On a aussi une capture qui se produit en moins de 20 millions d'années, ce qui est très rapide.

Une extension de cette étude serait de partir d'un proto-Mercure tournant sur 3 axes. L'effet de l'obliquité a été abordé dans (Peale & Boss, 1977a) et (Correia & Laskar, 2010), mais beaucoup reste à faire.



Troisième partie

Un outil mathématique pour la  
rotation



# Chapitre 10

## Utilisation de l'analyse en fréquence pour simuler un équilibre dynamique

### 10.1 Introduction

La modélisation de la rotation résonnante des corps du Système Solaire revient à décrire un état d'équilibre dynamique, qui est mathématiquement proche d'une superposition d'oscillations. C'est en tout cas le cas pour la plupart des satellites naturels, où leurs mouvements orbitaux peuvent être décrits de façon quasipériodique au moins sur quelques siècles (Lainey et al., 2006; Vienne & Duriez, 1995). Dans le cas de Mercure, cette description est valable en longitude, et nous avons utilisé une extrapolation sinusoïdale pour pouvoir aussi l'utiliser en obliquité (Chap.7).

Mathématiquement on peut écrire les choses de la façon suivante : on part d'un système régi par l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{\vec{X}}(t) = f(\vec{X}) + g(\vec{X}, t), \quad (10.1)$$

avec  $f : \mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $g : \mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  est une perturbation externe, et le vecteur d'états  $\vec{X} \in \mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbb{B}$  étant un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  contenant l'équilibre qui nous intéresse. Nous supposons que chaque composante  $x_i \in \mathbb{C}$  de  $\vec{X}$  est quasipériodique, c'est-à-dire peut s'exprimer sous la forme d'une somme convergente de monômes trigonométriques périodiques, autrement dit :

$$x_i(t) = \sum_l a_l \exp(i f_l t), \quad (10.2)$$

où les  $a_l$  sont des amplitudes complexes et les  $f_l$  des fréquences réelles. On peut séparer ces fréquences  $f_l$  en 2 groupes : des fréquences libres, ou propres, qui sont les seules existant dans le système non perturbé, c'est-à-dire lorsque  $g \equiv 0$ , et les fréquences de forçage dues à la perturbation  $g$ .

La légitimité de la décomposition (10.2) est donnée par 2 théorèmes dans le cadre Hamiltonien pour des systèmes quasi-intégrables. D'une part, le théorème KAM<sup>1</sup> (Arnold, 1963; Moser, 1962) garantit l'existence de tores quasipériodiques invariants si la partie intégrable de la fonction Hamiltonienne est non dégénérée, si la condition Diophantienne est vérifiée<sup>2</sup>, et si la perturbation est

---

1. Kolmogorov - Arnold - Moser

2. c'est-à-dire si on est suffisamment loin de toute résonance

suffisamment petite. D'autre part, le théorème de Nekhoroshev (Nekhoroshev, 1977, 1979) donne un résultat de stabilité. Il prouve que les orbites d'un système légèrement perturbé restent proches de celle du système non perturbé sur un temps exponentiellement long.

Par exemple, dans la modélisation de la dynamique de rotation d'un corps en résonance spin-orbite, les fréquences de forçage viennent des éphémérides orbitales, et les fréquences libres ou propres sont celles des petites oscillations autour de l'équilibre, notées  $\omega_{u,v,w,z}$  dans les chapitres précédents. De plus, des termes croisés apparaissent, combinaisons entières d'oscillations libres et forcées. Nous considérons ces termes comme libres car nous devons nous en débarrasser, ils ne sont pas présents dans la solution à énergie minimale, correspondant à l'équilibre. La solution que nous cherchons ne doit contenir que des termes forcés, il faut donc se rapprocher le plus possible des conditions initiales donnant une amplitude nulle aux oscillations libres.

Une façon intuitive d'atteindre les conditions initiales est de procéder itérativement à partir de l'analyse en fréquence. C'est-à-dire analyser une solution obtenue numériquement, identifier les termes libres, et les retirer des conditions initiales. Cette façon de faire n'est pas nouvelle, nous l'avons trouvée dans la littérature dès 2000 dans le cadre d'une preuve du théorème KAM assistée par ordinateur (Locatelli & Giorgilli, 2000).

Ce que je présente ici est une tentative d'aller plus loin, en s'attaquant à la preuve de la convergence de l'algorithme. Ce travail, fait en collaboration avec Nicolas Delsate et Timoteo Carletti (Noyelles et al., 20xx), n'a pour l'instant pas été publié autrement que sur arXiv, et est l'un de mes travaux les plus cités.

## 10.2 Notre algorithme

Je présente ici le principe de notre algorithme, visant à déterminer la solution forcée. Nous supposons ici qu'elle existe, nous ne cherchons pas à prouver son existence<sup>3</sup>.

### 10.2.1 Principe

Considérons un système décrit par l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{\vec{X}}(t) = f(\vec{X}), \quad (10.3)$$

dans le voisinage d'une solution quasipériodique de fréquences  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ , les fréquences libres du système. Notons  $\vec{\omega}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont les  $\omega_i \in \mathbb{R}$  sont les composantes. Le vecteur d'état  $\vec{X}$  appartient à  $\mathbb{C}^n$ . Modifions maintenant le système en ajoutant un forçage quasipériodique  $g$  :

$$\dot{\vec{X}}(t) = f(\vec{X}) + g(\vec{X}, t), \quad (10.4)$$

où les fréquences de  $g$  sont les composantes  $(\nu_j)_{1 \leq j \leq p}$  du vecteur  $\vec{\nu} \in \mathbb{R}^p$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont définies d'un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  et de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$  respectivement, à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ , et  $n$  et  $p$  sont des entiers strictement positifs.

Considérons qu'il n'y a pas de résonance entre les  $(\omega_i)$  et les  $(\nu_j)$ , autrement dit que ces fréquences sont linéairement indépendantes par combinaisons entières. Appelons  $\vec{\phi}(t; \vec{X}) : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  la solution avec une condition initiale  $\vec{X}$ . La décomposition quasipériodique de  $\phi$  s'écrit

---

3. C'est probablement ce qu'il manque à l'étude pour être publiée.

$$\vec{\phi}(t; \vec{X}) = \sum_{\vec{l} \in \mathbb{Z}^n, \vec{m} \in \mathbb{Z}^p} \vec{\phi}_{\vec{l}, \vec{m}}(\vec{X}) e^{i(\vec{\omega} \cdot \vec{l} + \vec{\nu} \cdot \vec{m})t}, \quad (10.5)$$

on peut la réécrire en séparant les termes libres des termes forcés :

$$\begin{aligned} \vec{\phi}(t; \vec{X}) &= \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^p} \vec{\phi}_{\vec{0}, \vec{m}}(\vec{X}) e^{i\vec{\nu} \cdot \vec{m}t} + \sum_{\vec{l} \neq \vec{0}, \vec{m} \in \mathbb{Z}^p} \vec{\phi}_{\vec{l}, \vec{m}}(\vec{X}) e^{i(\vec{\omega} \cdot \vec{l} + \vec{\nu} \cdot \vec{m})t} \\ &=: \vec{S}(t; \vec{X}) + \vec{L}(t; \vec{X}), \end{aligned} \quad (10.6)$$

les fonctions  $S$  et  $L$  étant définies d'un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ .

L'utilisation de l'algorithme se base sur l'hypothèse de l'existence d'une orbite  $(2\pi/\nu_j)_{1 \leq j \leq p}$ -quasipériodique, donc appartenant à un tore d'ordre  $p$ , composée uniquement de fréquences de forçage. Cette hypothèse peut de façon équivalente s'écrire comme l'existence d'une condition initiale  $\vec{X}_\infty$  telle que la solution associée est  $(2\pi/\nu_j)_{1 \leq j \leq p}$ -quasipériodique, donc

$$\vec{\phi}(t; \vec{X}_\infty) = \vec{S}(t; \vec{X}_\infty), \quad (10.7)$$

ou encore  $\vec{L}(t; \vec{X}_\infty) \equiv \vec{0}$ .

Le principe de notre algorithme est le suivant :

1. Prenons la condition initiale  $\vec{X}_0$  relativement proche de  $\vec{X}_\infty$ ,
2. Intégrons numériquement l'équation différentielle ordinaire (10.4) pour déterminer  $\vec{\phi}(t; \vec{X})$  et ensuite déterminer la décomposition quasi-périodique  $\vec{\phi}(t; \vec{X}_0) = \vec{S}(t; \vec{X}_0) + \vec{L}(t; \vec{X}_0)$ ,
3. Posons  $\vec{X}_1 = \vec{S}(0; \vec{X}_0)$  et réitérons le procédé en utilisant  $\vec{X}_1$  en lieu et place de  $\vec{X}_0$ ,
4. De cette façon on construit une suite  $(\vec{X}_n)$  définie par la relation de récurrence suivante

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{S}(0; \vec{X}_n), \quad (10.8)$$

de telle façon que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{X}_n = \vec{X}_\infty, \quad (10.9)$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{L}(t; \vec{X}_n) = \vec{0}. \quad (10.10)$$

Cet algorithme a déjà été utilisé dans les circonstances suivantes :

- (Noyelles, 2009) : Rotation synchrone de Callisto ( $n = 3$ ,  $p = 13$ ),
- (Dufey et al., 2009) : Librations de Mercure en résonance 3 : 2 ( $n = 2$ ,  $p = 5$ ),
- (Couetdic et al., 2010) : Dynamique orbitale d'un système exoplanétaire ( $n = 1$ ,  $p = 3$ ),
- (Hou & Liu, 2010; Hou et al., 2014) : Dynamique orbitale des astéroïdes troyens,
- (Noyelles et al., 2010) : Rotation de Mercure avec interactions noyau-manteau ( $n = 4$ ,  $p = 5$ ),
- (Robutel et al., 2011) : Rotation en longitude de Janus et Épiméthée ( $n = 1$ ,  $p = 6$ ),

- (Delsate, 2011) : Résonances gravitationnelles<sup>4</sup> d'un orbiteur autour de Vesta ( $n = 1, p = 3$ ),
- (Noyelles et al., 2011) : Rotation rigide de Mimas ( $n = 3, p = 5$ ),
- (Noyelles, 2012) : Modèle de Poincaré-Hough pour la rotation d'un satellite synchrone fictif ( $n = 4, p = 3$ ),
- (Noyelles, 2013) : Modèle de Poincaré-Hough pour Io ( $n = 4, p = 13$ ),
- (Noyelles & D'Hoedt, 2012; Noyelles & Lhotka, 2013) : Extrapolation sinusoidale de l'obliquité de Mercure ( $n = 1, p = 4$ ),
- (Noyelles & Nimmo, 2014) : Rotation de Titan à 3 couches ( $n = 6, p = 9$ ).

Cet algorithme est d'autant plus facile à utiliser que les fréquences propres varient peu au voisinage de l'équilibre, ce qui est particulièrement vrai pour les résonances spin-orbite. Cela l'est moins pour les résonances de moyen mouvement.

### 10.2.2 L'algorithme NAFF

Notre algorithme nécessite l'utilisation d'un algorithme d'analyse en fréquence le plus précis possible, qui donnera la décomposition quasipériodique (10.5). Nous avons utilisé l'algorithme Numerical Analysis of the Fundamental Frequencies (NAFF) (Laskar, 1993, 2005), dont voici le principe.

Le but est d'écrire un signal complexe quasipériodique  $x(t)$  sous la forme

$$x(t) \approx \sum_{l=1}^N a_l^\bullet \exp(\nu_l^\bullet t), \quad (10.11)$$

sur l'intervalle de temps  $[-T; T]$  où  $\nu_l^\bullet$  et  $a_l^\bullet$  sont les fréquences réelles et amplitudes complexes déterminées numériquement. Les fréquences et amplitudes sont déterminées par un processus itératif. Pour déterminer la première fréquence  $\nu_1^\bullet$ , qui en théorie doit correspondre à l'amplitude de module le plus important, on cherche le maximum de la quantité

$$\phi(\nu) = \langle x(t), \exp(i\nu t) \rangle, \quad (10.12)$$

où le produit scalaire  $\langle f(t), g(t) \rangle$  est défini par

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{g(t)} \chi(t) dt, \quad (10.13)$$

$\overline{g(t)}$  étant le complexe conjugué de  $g(t)$  et  $\chi(t)$  est une fonction de poids, c'est-à-dire une fonction positive qui vérifie

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \chi(t) dt = 1. \quad (10.14)$$

Laskar conseille d'utiliser

$$\chi(t) = \frac{2^p (p!)^2}{(2p)!} (1 + \cos(\pi t))^p, \quad (10.15)$$

où  $p$  est un entier positif. En pratique, l'algorithme est plus efficace avec  $p = 1$  ou  $p = 2$ . Nous avons utilisé  $p = 2$ .

---

4. Ce sont des résonances entre la rotation du primaire et l'orbite du secondaire.

Une fois que le premier terme périodique  $a_1 \exp(i\nu_1 t)$  est trouvé, il est retiré de la fonction  $x(t)$ , et l'algorithme est réitéré pour trouver le terme suivant. L'algorithme s'arrête lorsqu'une fréquence détectée est très proche d'une autre déjà détectée, ou lorsque le nombre de termes détectés atteint un maximum prédéfini par l'utilisateur.

Plusieurs méthodes existent dans la littérature pour améliorer la précision de l'algorithme. Notamment, lorsque 2 fréquences sont séparées par moins de 2 fois la fréquence fondamentale, correspondant à la longueur de l'intervalle sur lequel le signal est analysé, alors leurs oscillations peuvent brüiter la détermination de chacune. Laskar recommande d'orthogonaliser au fur et à mesure la base sur laquelle le signal est exprimé, alors que Champenois (1998) recommande de réitérer numériquement la détermination de chaque terme indépendamment des autres. Saillenfest (2014) a montré que ces 2 méthodes étaient mathématiquement équivalentes. Sidlichovsky & Nesvorný (1997) ont proposé une correction analytique des termes déterminés.

### 10.3 Approches de la preuve

Je présente ici des idées de preuve de convergence de l'algorithme, dans un contexte assez général, puis dans un cadre Hamiltonien, dont je montre qu'il nécessite moins d'hypothèses.

La convergence de l'algorithme peut être prouvée en montrant la convergence de la suite  $(\vec{X}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (Éq.10.8). Si  $\vec{X}_k$  converge vers  $\vec{P} \in \mathbb{C}^n$ , alors en réécrivant l'Éq.(10.8) de la façon suivante

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{S}(0; \vec{X}_k) = \vec{\phi}(0; \vec{X}_k) - \vec{L}(0; \vec{X}_k) = \vec{X}_k - \vec{L}(0; \vec{X}_k), \quad (10.16)$$

la continuité de la fonction  $\vec{L}$ , garantie par l'Éq.10.6 ainsi que l'hypothèse que la suite  $(\vec{X}_k)_k$  converge donnent

$$\vec{0} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{L}(0; \vec{X}_n) = -\vec{L}(0; \vec{P}), \quad (10.17)$$

alors, par unicité de la solution  $(2\pi/\nu_j)_{1 \leq j \leq p}$ -quasipériodique, on a  $\vec{P} = \vec{X}_\infty$ .

#### 10.3.1 Dans un cadre général

Nous avons besoin de l'hypothèse supplémentaire suivante : les matrices jacobienes  $\Sigma$  et  $\Lambda$  des fonctions  $\vec{S}$  et  $\vec{L}$  vérifient

$$\lim_{\vec{X} \rightarrow \vec{X}_\infty} [\Lambda(\vec{X})]^{-1} \Sigma(\vec{X}) = \mathbb{O}_n, \quad (10.18)$$

où  $\mathbb{O}_n$  est la matrice nulle de dimension  $n \times n$ . Nous allons voir qu'il s'agit d'une condition suffisante pour la convergence de notre algorithme.

À partir de la définition (10.8) et de la définition première de  $\vec{X}_{k+1}$  comme condition initiale d'une orbite, nous avons

$$\vec{S}(0; \vec{X}_k) = \vec{X}_{k+1} = \vec{\phi}(0; \vec{X}_{k+1}) = \vec{S}(0; \vec{X}_{k+1}) + \vec{L}(0; \vec{X}_{k+1}). \quad (10.19)$$

Cette relation définit implicitement l'application qui lie les 2 itérations successives  $\vec{X}_k$  et  $\vec{X}_{k+1}$ . Appelons la  $\vec{F}$ , on a alors  $\vec{X}_{k+1} = \vec{F}(\vec{X}_k)$ . Nous supposons depuis le début l'existence d'une orbite  $(2\pi/\nu_j)_{1 \leq j \leq p}$ -quasipériodique issue de la condition initiale  $\vec{X}_\infty$ , ceci revient à supposer que  $\vec{X}_\infty$  est un point fixe de  $\vec{F}$ , autrement dit

$$\vec{F}(\vec{X}_\infty) = \vec{X}_\infty. \quad (10.20)$$

Ainsi, prouver que la suite  $(\vec{X}_k)$  converge vers  $\vec{X}_\infty$  revient à prouver que le point fixe de  $\vec{F}$   $\vec{X}_\infty$  est un attracteur, donc que chaque valeur propre de la matrice jacobienne de  $\vec{F}$   $\Phi$  évaluée en  $\vec{X}_\infty$  a un module inférieur à 1.

On peut réécrire la relation (10.19) sous la forme

$$\vec{S}(0; \vec{F}(\vec{X}_k)) + \vec{L}(0; \vec{F}(\vec{X}_k)) = \vec{S}(0; \vec{X}_k), \quad (10.21)$$

puis en différentier chaque composante  $S_l$  ( $1 \leq l \leq n$ ) par rapport aux  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), composantes de  $\vec{X}_k$  :

$$\frac{\partial S_l}{\partial x_i} = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial S_l}{\partial x_h} \frac{\partial F(\vec{X}_k)_h}{\partial x_i} + \frac{\partial L_l}{\partial x_h} \frac{\partial F(\vec{X}_k)_h}{\partial x_i} \right). \quad (10.22)$$

On peut écrire cette dernière relation à l'aide de matrices jacobiniennes, c'est-à-dire

$$\Sigma(\vec{X}_k) = \Sigma(\vec{F}(\vec{X}_k)) \Phi(\vec{X}_k) + \Lambda(\vec{F}(\vec{X}_k)) \Phi(\vec{X}_k), \quad (10.23)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{X}_k) &= \left( \Sigma(\vec{F}(\vec{X}_k)) + \Lambda(\vec{F}(\vec{X}_k)) \right)^{-1} \Sigma(\vec{X}_k) \\ &= \left( \Sigma(\vec{F}(\vec{X}_k)) + \Lambda(\vec{F}(\vec{X}_k)) \right)^{-1} \Lambda(\vec{F}(\vec{X}_k)) \left[ \Lambda(\vec{F}(\vec{X}_k)) \right]^{-1} \Sigma(\vec{X}_k). \end{aligned} \quad (10.24)$$

Il en découle directement, avec l'aide de l'hypothèse (10.18) et en gardant à l'esprit que  $\vec{X}_\infty$  est un point fixe de  $\vec{F}$ , que

$$\lim_{\vec{X}_k \rightarrow \vec{X}_\infty} \Phi(\vec{X}_k) = \vec{0}, \quad (10.25)$$

donc les valeurs propres de la matrice  $\Phi(\vec{X}_\infty)$  ont un module inférieur à 1.

### 10.3.2 Dans un contexte Hamiltonien

Considérons un système Hamiltonien à  $(n+p)$  degrés de liberté  $\mathcal{H}(y_i, x_i, \Lambda_j, \lambda_j)$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ , où les  $y_i$  et  $\Lambda_j$  sont les variables d'action et les  $x_i$  et  $\lambda_j$  les angles. Le forçage est contenu dans les  $\Lambda_j$  et  $\lambda_j$ . Supposons de plus que le système peut être localement décrit par un oscillateur harmonique perturbé<sup>5</sup> :

$$\mathcal{H}(\vec{U}, \vec{u}, \vec{\Lambda}, \vec{\lambda}) = \vec{\omega} \cdot \vec{U} + \epsilon \mathcal{H}_1(\vec{U}, \vec{u}, \vec{\Lambda}, \vec{\lambda}), \quad (10.26)$$

avec  $\vec{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $\vec{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $\vec{\Lambda} = (\Lambda_j)_{1 \leq j \leq p}$ , et  $\vec{\lambda} = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq p}$ . Les composantes du vecteur  $\vec{\omega} = (\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont les fréquences (ou pulsations) des oscillations propres, et  $\epsilon \mathcal{H}_1$  est une petite perturbation qui contient le forçage. On est ici dans un cas dégénéré, l'existence de tores invariants peut néanmoins être étudiée grâce à la théorie de Birkhoff (Moser, 1968). Le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  a été

5. Ce qui est classiquement le cas pour un problème de résonance spin-orbite, cf. Éq.3.52.

obtenu plusieurs transformations canoniques, notamment une visant à supprimer les termes croisés de la forme  $y_j y_k$  avec  $j \neq k$  (Henrard & Lemaître, 2005), et la transformation polaire canonique classique :

$$\begin{cases} x_i &= \sqrt{2U_i Z_i} \sin u_i, \\ y_i &= \sqrt{2U_i/Z_i} \cos u_i, \end{cases} \quad (10.27)$$

où  $Z_i$  est une constante, choisie de façon à ce que les termes de degré 1 en  $\sqrt{U_i}$  disparaissent. La transformation (10.27) peut être vue comme l'expression des variables  $x_i$  et  $y_i$  en l'absence du forçage perturbatif  $\epsilon \mathcal{H}_1$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_i(U_i, u_i, \Lambda_j = 0, \lambda_j) &= \sqrt{2U_i Z_i} \sin u_i, \\ y_i(U_i, u_i, \Lambda_j = 0, \lambda_j) &= \sqrt{2U_i/Z_i} \cos u_i. \end{cases}$$

On peut voir dans l'expression de la transformation polaire (10.27) la caractéristique de d'Alembert, qui dit notamment qu'une expression contenant l'angle  $ku_i$  où  $k$  est un entier doit avoir un préfacteur dont la dépendance en  $U_i$  est de la forme  $U_i^{|k|/2}(1 + \sum_j \alpha_j U_i^j)$ . Henrard (1974) a montré que cette relation était conservée à tout ordre si on résolvait le problème par la méthode des Transformées de Lie (Deprit, 1969) si le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  est analytique<sup>6</sup>. Considérons ici que nous utilisons la méthode des Transformées de Lie pour résoudre le problème.

Ainsi, toute fonction  $x_q$  ou  $y_q$  pour  $1 \leq q \leq n$ , composante du vecteur d'état  $\vec{X}$  ou  $\vec{Y}$ , suit la caractéristique de d'Alembert pour  $(U_i, u_i)$ , et donc peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x_q(\vec{U}, \vec{u}, \vec{\Lambda}, \vec{\lambda}) &= \sum_{\substack{\vec{h} \in \mathbb{Z}^p \\ \vec{k} \in \mathbb{Z}^n}} \alpha_{\vec{k}, \vec{h}} \prod_{i=1}^n U_i^{\frac{|k_i|}{2}} \left( 1 + \sum_{\vec{m} \in \mathbb{N}^n} \gamma_{\vec{m}, \vec{k}, \vec{h}} \prod_{s=1}^n \sqrt{U_s}^{m_s} \right) \\ &\quad \times \exp \left( i \left( \sum_{i=1}^n k_i u_i + \sum_{j=1}^p h_j \lambda_j \right) \right) \end{aligned} \quad (10.28)$$

et

$$\begin{aligned} y_q(\vec{U}, \vec{u}, \vec{\Lambda}, \vec{\lambda}) &= \sum_{\substack{\vec{h} \in \mathbb{Z}^p \\ \vec{k} \in \mathbb{Z}^n}} \beta_{\vec{k}, \vec{h}} \prod_{i=1}^n U_i^{\frac{|k_i|}{2}} \left( 1 + \sum_{\vec{m} \in \mathbb{N}^n} \delta_{\vec{m}, \vec{k}, \vec{h}} \prod_{s=1}^n \sqrt{U_s}^{m_s} \right) \\ &\quad \times \exp \left( i \left( \sum_{i=1}^n k_i u_i + \sum_{j=1}^p h_j \lambda_j \right) \right), \end{aligned} \quad (10.29)$$

où  $\alpha_{\vec{k}, \vec{h}}$ ,  $\beta_{\vec{k}, \vec{h}}$ ,  $\gamma_{\vec{m}, \vec{k}, \vec{h}}$  et  $\delta_{\vec{m}, \vec{k}, \vec{h}}$  sont des constantes complexes,  $m_i$ ,  $k_i$  et  $h_j$  sont des entiers, et  $m = \|\vec{m}\| = \sum_s m_s$  est pair. On suppose que les membres de droite convergent absolument pour  $U_i$  inférieur à un certain  $U_{i,0}$  strictement positif. On a ainsi

6. développable en série entière au voisinage de tout point de son ensemble de définition

$$\begin{aligned}
x_q(t) &= \sum_{\substack{\vec{h} \in \mathbb{Z}^p \\ \vec{k} \in \mathbb{Z}^n}} \alpha_{\vec{k}, \vec{h}} \prod_{i=1}^n U_i(t)^{\frac{|k_i|}{2}} \left( 1 + \sum_{\vec{m} \in \mathbb{N}^n} \gamma_{\vec{m}, \vec{k}, \vec{h}} \prod_{s=1}^n \sqrt{U_s(t)}^{m_s} \right) \\
&\quad \times \exp \left( \imath \left( \sum_{i=1}^n k_i u_i(t) + \sum_{j=1}^p h_j \lambda_j(t) \right) \right),
\end{aligned} \tag{10.30}$$

$$\begin{aligned}
y_q(t) &= \sum_{\substack{\vec{h} \in \mathbb{Z}^p \\ \vec{k} \in \mathbb{Z}^n}} \beta_{\vec{k}, \vec{h}} \prod_{i=1}^n U_i(t)^{\frac{|k_i|}{2}} \left( 1 + \sum_{\vec{m} \in \mathbb{N}^n} \delta_{\vec{m}, \vec{k}, \vec{h}} \prod_{s=1}^n \sqrt{U_s(t)}^{m_s} \right) \\
&\quad \times \exp \left( \imath \left( \sum_{i=1}^n k_i u_i(t) + \sum_{j=1}^p h_j \lambda_j(t) \right) \right).
\end{aligned} \tag{10.31}$$

En supposant que l'ordre des Transformées de Lie  $M$  auquel on s'arrête pour obtenir  $x_q$  et  $y_q$  est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer les quantités  $U_i(t)$  comme des constantes comme ce serait le cas si  $M$  était  $\infty$ , on peut décomposer  $x_q(t)$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
x_q(t) &= \underbrace{\sum_{\vec{h} \in \mathbb{Z}^p} \alpha_{\vec{0}, \vec{h}} \left( 1 + \sum_{\vec{m} \in \mathbb{N}^n} \gamma_{\vec{m}, \vec{0}, \vec{h}} \prod_{s=1}^n \sqrt{U'_s}^{m_s} \right) \exp \left( \imath \left( \sum_{j=1}^p h_j \lambda_j(t) \right) \right)}_{S_q} + \\
&\quad \underbrace{\sum_{\substack{\vec{h} \in \mathbb{Z}^p \\ \vec{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\vec{0}\}}} \alpha_{\vec{k}, \vec{h}} \prod_{i=1}^n U'_i \frac{|k_i|}{2} \left( 1 + \sum_{\vec{m} \in \mathbb{N}^n} \gamma_{\vec{m}, \vec{k}, \vec{h}} \prod_{s=1}^n \sqrt{U'_s}^{m_s} \right) \exp \left( \imath \left( \sum_{i=1}^n k_i u'_i + \sum_{j=1}^p h_j \lambda_j(t) \right) \right)}_{L_q},
\end{aligned} \tag{10.32}$$

en une partie libre  $L_q$  et une partie forcée  $S_q$ .  $y_q(t)$  peut être décomposée de la même manière. On voit directement

$$S_q \sim A + \sum_{i,j} B_{i,j} \sqrt{U'_i} \sqrt{U'_j} + \dots, \tag{10.33}$$

$$L_q \sim \sum_i C_i \sqrt{U'_i} + \dots \tag{10.34}$$

En appelant  $\Sigma$  et  $\Lambda$  les matrices jacobiennes des fonctions  $\vec{S}$  et  $\vec{L}$  limitées aux variables d'actions  $U'_i$  (ce qui est différent du cas non-Hamiltonien, puisqu'ici notre système est dégénéré), on a

$$\Sigma = \left( \frac{\partial S_q}{\partial U'_i} \right)_{1 \leq q, i \leq n}, \tag{10.35}$$

$$\Lambda = \left( \frac{\partial L_q}{\partial U'_i} \right)_{1 \leq q, i \leq n}, \tag{10.36}$$

ce qui donne directement  $\frac{\partial S_q}{\partial U_i'} = \mathcal{O}(1)$  et  $\frac{\partial L_q}{\partial U_i'} = \mathcal{O}(1/\sqrt{U_i'})$ , donc, lorsque  $U_i'$  tend vers 0,  $\frac{\partial S_q}{\partial U_i'}$  converge vers une valeur complexe finie tandis que  $\frac{\partial L_q}{\partial U_i'}$  diverge vers l'infinie. Donc l'inverse de  $\Lambda$ , soit  $\Lambda^{-1}$ , converge vers la matrice nulle  $\mathbb{O}_n$ , ainsi que le produit  $\Lambda^{-1}\Sigma$ . Nous vérifions donc la condition suffisante (10.18) pour que notre algorithme converge.

### 10.3.3 Vitesse de convergence

Dans le cas où on pourrait écrire

$$S(0; x) \sim x_\infty + a(x - x_\infty)^\alpha + \dots, \quad (10.37)$$

$$L(0; x) \sim b(x - x_\infty)^\beta + \dots, \quad (10.38)$$

où ... signifierait *termes d'ordre supérieur*, pour  $\alpha > \beta \geq 0$ , on a aussi la vitesse de convergence de notre algorithme. Si on pose  $\theta_n = x_n - x_\infty$ , alors l'Éq.(10.19) s'écrit

$$a\theta_{n+1}^\alpha + b\theta_{n+1}^\beta \sim a\theta_n^\alpha, \quad (10.39)$$

ce qui peut être résolu de façon approximative pour  $\theta_{n+1}$ , par exemple en utilisant la formule d'inversion de Lagrange (Carletti, 2003), ce qui donne

$$\theta_{n+1} \sim \left(\frac{a}{b}\right)^{1/\beta} \theta_n^{\alpha/\beta} + \dots, \quad (10.40)$$

et suggère ainsi que notre algorithme converge à la vitesse  $\alpha/\beta$ . Il découle de la règle de d'Alembert que  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1/2$ , donc notre algorithme aurait une convergence quadratique dans le cas Hamiltonien.

J'écris bien *aurait*, car il s'agit d'une vitesse de convergence théorique. Elle suppose notamment que la précision machine est infinie ; en pratique elle est de l'ordre de  $10^{-15} - 10^{-16}$  en double précision, qui est un ordre rapidement atteint à la vitesse quadratique, la précision machine se révèle donc plus limitante que la précision mathématique.

## 10.4 2 exemples numériques

Dans le cadre de cette étude, Nicolas Delsate a fait des essais numériques poussés pour illustrer notre algorithme et tenter de confirmer la convergence quadratique. Des exemples sont présents tout au long de ce manuscrit, ici je me limiterai à 2 : la résonance spin-orbite dans un cas extrême, car quasi-résonnant, et un exemple de proie-prédateur avec forçage périodique, dans un cadre non Hamiltonien.

### 10.4.1 La résonance spin-orbite 1 :1 en longitude

La théorie associée à ce cas a déjà été largement développée. Nous partons du Hamiltonien

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(y, x, \Lambda, \lambda) = & \frac{y^2}{2} - \epsilon \left( \alpha_1(e) \cos(2x - \lambda) + \alpha_2(e) \cos(2x - 2\lambda) \right. \\ & \left. + \alpha_3(e) \cos(2x - 3\lambda) + \alpha_4(e) \cos(2x - 4\lambda) + \alpha_5(e) \cos(2x - 5\lambda) \right) + \Lambda \end{aligned} \quad (10.41)$$

avec  $\lambda = t$  et

$$\begin{aligned}\alpha_1(e) &= -\frac{e}{4} + \frac{e^3}{32}, & \alpha_2(e) &= \frac{1}{2} - \frac{5}{4}e^2 + \frac{13}{32}e^4, & \alpha_3(e) &= \frac{7}{4}e - \frac{123}{32}e^3 \\ \alpha_4(e) &= \frac{17}{4}e^2 - \frac{115}{12}e^4 & \text{et} & & \alpha_5(e) &= \frac{845}{96}e^3 - \frac{32\,525}{1\,536}e^5.\end{aligned}$$

Nous fixons  $\epsilon = 0.3$  et  $e = 5.49 \times 10^{-2}$  afin de se rapprocher d'une résonance entre la fréquence orbitale (normalisée à 1) et la fréquence propre  $\omega$ . Un tel cas défavorise la convergence de notre algorithme, ceci nous permet de maximiser le nombre d'itérations avant d'être bloqués par la précision machine, et donc d'étudier la façon dont il converge. Les équations issues de ce Hamiltonien sont

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ &= -2\epsilon \left( \alpha_1(e) \sin(2x - \lambda) + \alpha_2(e) \sin(2x - 2\lambda) + \alpha_3(e) \sin(2x - 3\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_4(e) \sin(2x - 4\lambda) + \alpha_5(e) \sin(2x - 5\lambda) \right),\end{aligned}\tag{10.42}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = y,\tag{10.43}$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda},\tag{10.44}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda} = 1,\tag{10.45}$$

et bien sûr on n'intègre numériquement que les 2 donnant  $y$  et  $x$ . On est dans un cas à 2 degrés de liberté, l'un libre et l'autre forcé, la fréquence de forçage étant ici normalisée à 1. On a donc  $n = p = 1$ . En définissant l'argument résonnant  $\sigma = x - \lambda$ , une Transformée de Lie à l'ordre 2 donne les expressions approchées suivantes :

$$\begin{aligned}
\sigma \approx & (-0.159\,123 + 1.015\,533U) \sin \lambda \\
& + (-4.534\,205 \times 10^{-3} + 1.511\,041 \times 10^{-2}U) \sin 2\lambda \\
& + (-2.633\,611 \times 10^{-4} + 1.140\,088 \times 10^{-3}U) \sin 3\lambda \\
& + (-1.055\,803 \times 10^{-5} + 5.937\,715 \times 10^{-5}U) \sin 4\lambda \\
& + (-1.119\,934 \times 10^{-7} + 1.662\,371 \times 10^{-6}U) \sin 5\lambda \\
& + (-2.529\,386 \times 10^{-9} + 2.976\,143 \times 10^{-8}U) \sin 6\lambda \\
& + 1.627\,894\sqrt{U} \sin u + 2.058\,034 \times 10^{-3}U \sin 2u \\
& + 2.976\,133 \times 10^{-2}\sqrt{U} \sin(\lambda + u) + 0.142\,827\sqrt{U} \sin(\lambda - u) \\
& + 4.307\,322 \times 10^{-3}\sqrt{U} \sin(2\lambda + u) - 2.413\,618 \times 10^{-2}\sqrt{U} \sin(2\lambda - u) \\
& + 2.894\,153 \times 10^{-4}\sqrt{U} \sin(3\lambda + u) - 7.262\,346 \times 10^{-4}\sqrt{U} \sin(3\lambda - u) \\
& + 1.396\,981 \times 10^{-5}\sqrt{U} \sin(4\lambda + u) - 2.614\,574 \times 10^{-5}\sqrt{U} \sin(4\lambda - u) \\
& + 2.043\,814 \times 10^{-7}\sqrt{U} \sin(5\lambda + u) - 1.071\,171 \times 10^{-6}\sqrt{U} \sin(5\lambda - u) \\
& - 3.552\,194 \times 10^{-2}U \sin(\lambda + 2u) + 0.685\,948U \sin(\lambda - 2u) \\
& - 2.153\,015 \times 10^{-3}U \sin(2\lambda + 2u) - 1.915\,010 \times 10^{-2}U \sin(2\lambda - 2u) \\
& - 1.827\,299 \times 10^{-4}U \sin(3\lambda + 2u) + 5.436\,345 \times 10^{-4}U \sin(3\lambda - 2u) \\
& - 1.021\,550 \times 10^{-5}U \sin(4\lambda + 2u) + 3.627\,801 \times 10^{-5}U \sin(4\lambda - 2u) \\
& + \mathcal{O}(U^{3/2}),
\end{aligned} \tag{10.46}$$

et

$$\begin{aligned}
y \approx & 1 + (-0.159\,123 + 1.015\,533U) \cos \lambda \\
& + (-9.068\,410 \times 10^{-3} + 3.022\,082 \times 10^{-2}U) \cos 2\lambda \\
& + (-7.900\,833 \times 10^{-4} + 3.420\,266 \times 10^{-3}U) \cos 3\lambda \\
& + (-4.223\,213 \times 10^{-5} + 2.375\,086 \times 10^{-4}U) \cos 4\lambda \\
& + (-5.599\,670 \times 10^{-7} + 8.311\,856 \times 10^{-6}U) \cos 5\lambda \\
& + (-1.517\,631 \times 10^{-8} + 1.392\,351 \times 10^{-7}U) \cos 6\lambda \\
& + 1.230\,493\sqrt{U} \cos u + 3.176\,270 \times 10^{-3}U \cos 2u \\
& + 5.272\,743 \times 10^{-2}\sqrt{U} \cos(\lambda + u) + 3.261\,102 \times 10^{-2}\sqrt{U} \cos(\lambda - u) \\
& + 1.193\,850 \times 10^{-2}\sqrt{U} \cos(2\lambda + u) - 2.964\,706 \times 10^{-2}\sqrt{U} \cos(2\lambda - u) \\
& + 1.091\,580 \times 10^{-3}\sqrt{U} \cos(3\lambda + u) - 1.618\,286 \times 10^{-3}\sqrt{U} \cos(3\lambda - u) \\
& + 6.665\,941 \times 10^{-5}\sqrt{U} \cos(4\lambda + u) - 8.440\,693 \times 10^{-5}\sqrt{U} \cos(4\lambda - u) \\
& + 1.179\,623 \times 10^{-6}\sqrt{U} \cos(5\lambda + u) - 4.529\,258 \times 10^{-6}\sqrt{U} \cos(5\lambda - u) \\
& - 9.034\,478 \times 10^{-2}U \cos(\lambda + 2u) - 0.372\,710U \cos(\lambda - 2u) \\
& - 7.628\,889 \times 10^{-3}U \cos(2\lambda + 2u) - 8.744\,867 \times 10^{-2}U \cos(2\lambda - 2u) \\
& - 8.302\,064 \times 10^{-4}U \cos(3\lambda + 2u) + 7.918\,844 \times 10^{-4}U \cos(3\lambda - 2u) \\
& - 5.662\,812 \times 10^{-5}U \cos(4\lambda + 2u) + 8.912\,232 \times 10^{-5}U \cos(4\lambda - 2u) \\
& + \mathcal{O}(U^{3/2}),
\end{aligned} \tag{10.47}$$

avec

$$\omega = 0.739\,732\,052\,1, \quad (10.48)$$

$U$  étant l'amplitude de l'oscillation libre, que l'on souhaite voir nulle. Dans ce cas les conditions initiales idéales sont

$$\sigma(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 0.830\,975\,124\,73. \quad (10.49)$$

La Tab.10.1 donne le comportement de notre algorithme. Les équations ont été intégrées à l'aide d'un intégrateur de Bulirsh-Stoer, sur un intervalle égal à 238 périodes de forçage. Les calculs ont été faits en Fortran 90, compilés avec un compilateur Ifort 11.0. On peut remarquer plusieurs choses :

- L'analyse en fréquence détecte de moins en moins de termes à mesure que les itérations augmentent. C'est normal car la partie libre du signal est de plus en plus faible.
- La position du terme de fréquence  $\omega$  descend dans l'ordre des termes détectés.
- La période du terme libre, évoluant comme l'inverse de la fréquence, diminue à mesure que l'algorithme converge. C'est un résultat classique pour les résonances en mécanique céleste, où la période du terme résonnant va tendre vers l'infini à mesure qu'on s'approche de la séparatrice.
- On ne peut pas réellement dire si la quantité  $U_{n+1}/U_n^2$  reste constante, donc si la convergence de l'algorithme est vraiment quadratique. Le rôle de la précision machine n'est sans doute pas à négliger.

TABLE 10.1 – Convergence de notre algorithme dans le cas quasi-résonnant. Les colonnes sont respectivement : nombre d'itérations  $n$ , variables, conditions initiales (C.I.), nombre de fréquences détectées, rang du terme libre dans la détermination, d'amplitude  $Ampl.$  et de fréquence déterminée numériquement  $\omega^\bullet$ . La dernière colonne permet de tester la convergence quadratique.

$n$		C.I.	#freq.	Rang	Ampl.	$\omega^\bullet$	$U_{n+1}/U_n^2(y)$	$U_{n+1}/U_n^2(\sigma)$
0	$y$	1.000 000 000	30	1	$7.368\,530 \times 10^{-2}$	0.741 860	0.481 3	0.456 3
	$\sigma$	0.000 000 000	30	1	$9.932\,502 \times 10^{-2}$	0.741 860		
1	$y$	0.851 607 082	21	2	$6.122\,476 \times 10^{-3}$	0.747 751	0.506 6	0.495 7
	$\sigma$	$-3.170\,672\,140 \times 10^{-9}$	16	2	$8.187\,849 \times 10^{-3}$	0.747 751		
2	$y$	0.838 740 063	26	4	$4.336\,535 \times 10^{-5}$	0.747 791	0.527 4	0.516 1
	$\sigma$	$-9.855\,863\,550 \times 10^{-10}$	22	4	$5.799\,125 \times 10^{-5}$	0.747 791		
3	$y$	0.838 648 575	23	9	$2.219\,788 \times 10^{-9}$	0.747 791	-	-
	$\sigma$	$-1.102\,439\,070 \times 10^{-9}$	20	8	$2.968\,459 \times 10^{-9}$	0.747 791		
4	$y$	0.838 648 571	13	13	$1.158\,263 \times 10^{-14}$	0.747 791	-	-
	$\sigma$	$-1.638\,333\,711 \times 10^{-14}$	12	12	$1.548\,912 \times 10^{-14}$	0.747 791		

La Fig.10.1 illustre graphiquement le résultat.

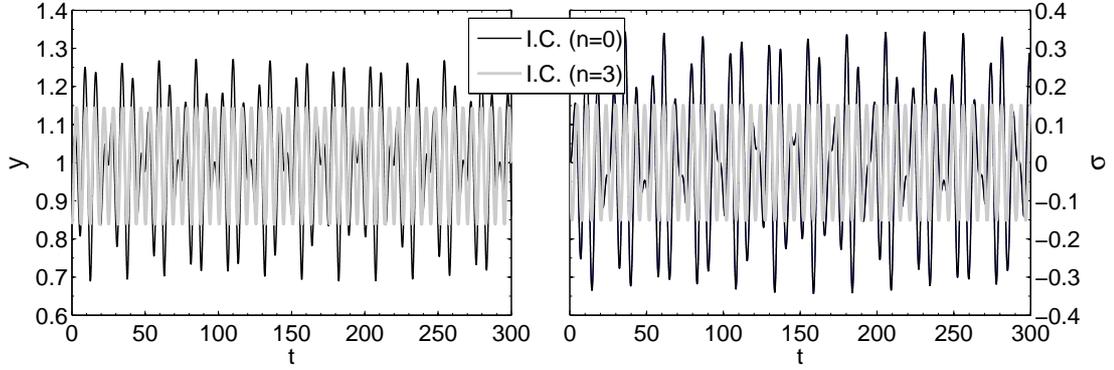


FIGURE 10.1 – Illustration de la convergence de notre algorithme pour la rotation synchrone quasi-résonnante. En noir on voit le résultat de la première intégration numérique, avec pour conditions initiales ( $y = 1$ ,  $\sigma = 0$ ), alors qu'en gris on voit le résultat après 3 itérations de notre algorithme. Les oscillations à la fréquence  $\omega$  ont disparu.

### 10.4.2 Un système proie-prédateur avec forçage périodique

Pour les derniers calculs de cette thèse d'HDR, oublions l'astronomie, revenons sur Terre. Nous avons tenu à montrer que notre algorithme peut s'utiliser dans un cadre très large, donc nous avons choisi un exemple de biologie mathématique, plus précisément un exemple de proie-prédateur avec forçage périodique repris de (Blom et al., 1981), qui utilise les célèbres équations de Lotka-Volterra. Nous sortons aussi du cadre Hamiltonien.

Les équations sont

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 (1 + \gamma \cos(2\pi t) - x_2 - \eta x_1), \quad (10.50)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \beta x_2 (-1 + x_1), \quad (10.51)$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\eta$  étant des constantes strictement positives. L'idée est la suivante : les prédateurs  $x_2$  (des loups) se nourrissent de proies  $x_1$  (des lapins), qui eux-même ont besoin pour vivre d'une ressource (la carotte), dont la quantité disponible varie périodiquement (au cycle des saisons). Avec  $\gamma = 0$  (pas de forçage, système autonome) et  $\eta = 0$ , on peut prouver facilement l'existence de solutions périodiques de période  $2\pi/\sqrt{\alpha\beta}$  oscillant autour de l'équilibre  $(x_1, x_2) = (1, 1)$ . Si  $\eta > 0$  l'équilibre devient  $(x_1, x_2) = (1, 1 - \eta)$  et les oscillations sont amorties. Si  $\gamma \neq 0$ , le système présente des oscillations  $2\pi$ -périodiques.

Nous avons intégré numériquement les équations du système avec dissipation ( $\eta = 0.025$ ), et sans ( $\eta = 0$ ). Pour ce dernier cas, nous avons appliqué notre algorithme (Tab.10.2). Nous voyons que cet algorithme converge assez efficacement vers la solution forcée.

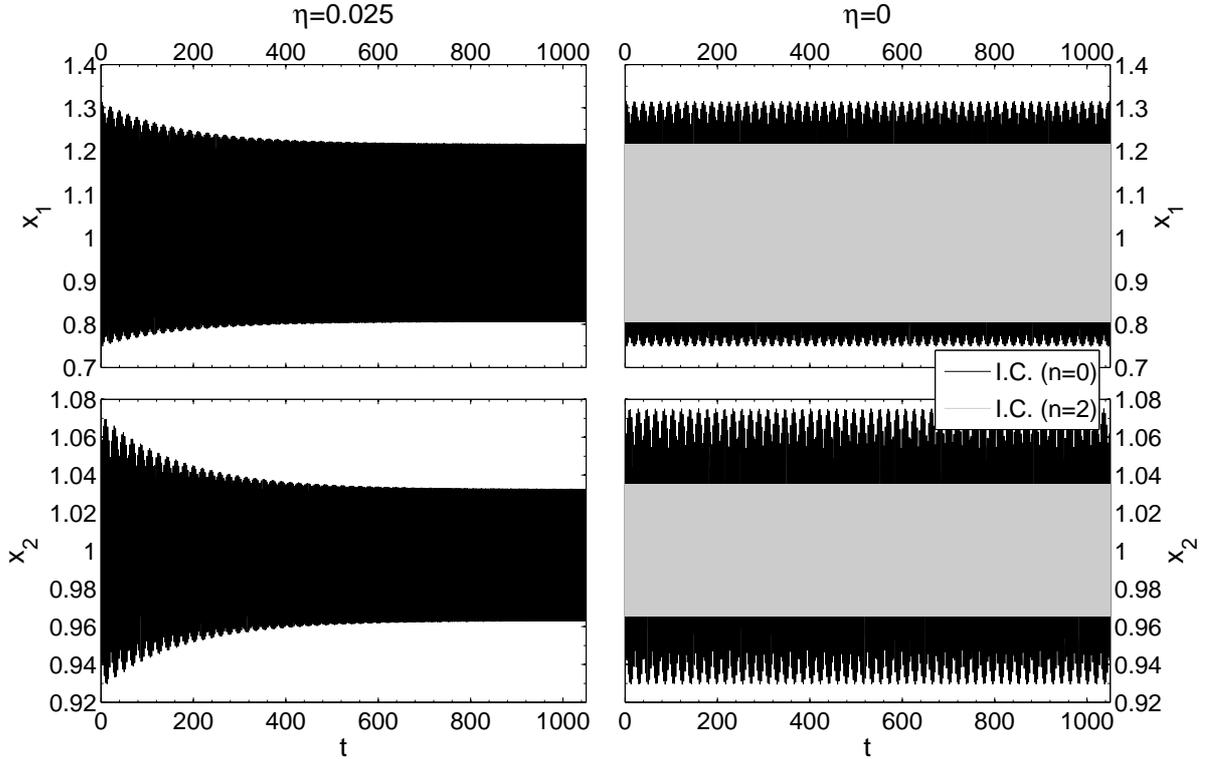


FIGURE 10.2 – Intégrations numériques du système proie-prédateur pour  $\alpha = 4.539$ ,  $\beta = 1.068$  et  $\gamma = 0.25$ , avec pour conditions initiales  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 1 - \eta$  (en noir), la période propre étant  $T = 2.85374$ . On voit un amortissement des oscillations pour  $\eta = 0.025$ . À droite, les courbes grises résultent d’une intégration numérique des équations du système avec des conditions initiales obtenues après 2 itérations de notre algorithme.

## 10.5 Conclusion

Nous avons exploré la convergence d’un algorithme donnant un équilibre quasi-périodique, cas souvent rencontré dans les problèmes spin-orbite. D’autres algorithmes existent, par exemple, dans le cadre de la dynamique galactique, (Rodionov & Sotnikova, 2006; Rodionov & Orlov, 2008; Rodionov et al., 2009; Rodionov & Athanassoula, 2011) proposent d’inclure une dissipation dans le système, de le laisser évoluer lentement, d’obtenir ainsi de nouvelles conditions initiales qui seront réutilisées... et ainsi d’approcher itérativement l’équilibre. On peut difficilement, de cette façon, éviter de déplacer l’équilibre, comme l’illustre le paramètre  $\eta$  dans notre problème proie-prédateur. Dans un autre contexte, celui de l’obliquité de Mercure, Bois & Rambaux (2007) proposent d’ajuster un centre de libration à leur signal, qui servira de nouvelle condition initiale.

En interne, nous appelons cet algorithme NAFFO, pour Numerical Algorithm For Forced Oscillations. Ce nom a l’avantage de commencer comme Namur, et il rend hommage à l’algorithme NAFF, sans lequel notre algorithme n’existerait pas. Comme cet algorithme ne vient pas originellement de nous, nous n’avons pas de légitimité pour le faire connaître sous un nom que nous aurions nous-même choisi.

Dans le Chapitre 7, je présente un algorithme d’extrapolation sinusoïdale des éphémérides or-

TABLE 10.2 – Utilisation de notre algorithme sur le système proie-prédateur, avec  $\alpha = 4.539$ ,  $\beta = 1.068$ ,  $\gamma = 0.25$  et  $\eta = 0$ .

n		I.C.	#freq.	Rang	Ampl.	$\omega^\bullet$
0	$x_1$	1.000 000 000 000 000	50	2	$3.831\,163 \times 10^{-2}$	2.206 634
	$x_2$	1.000 000 000 000 000	50	1	$1.854\,280 \times 10^{-2}$	2.206 634
1	$x_1$	0.989 166 714 745 100	22	4	$3.573\,335 \times 10^{-5}$	2.207 483
	$x_2$	0.965 514 795 157 481	21	3	$1.729\,063 \times 10^{-5}$	2.207 483
2	$x_1$	0.989 186 585 234 344 297 1	26	6	$4.508\,632 \times 10^{-9}$	2.207 483
	$x_2$	0.965 545 142 090 197 513 7	26	6	$2.181\,634 \times 10^{-9}$	2.207 483
3	$x_1$	0.989 186 576 347 806 470 6	14	11	$6.524\,090 \times 10^{-17}$	2.207 483
	$x_2$	0.965 545 142 191 326 750 5	14	11	$3.156\,872 \times 10^{-17}$	2.207 483
4	$x_1$	0.989 186 576 347 806 470 2	14	11	$6.503\,088 \times 10^{-17}$	2.207 483
	$x_2$	0.965 545 142 191 326 750 4	14	11	$3.146\,710 \times 10^{-17}$	2.207 483

bitales. J'envisage de faire un jour une étude mathématique de cet algorithme, pour essayer de le publier en tant que tel.

Quatrième partie

**Conclusions**



## Chapitre 11

# Conclusion

Comment conclure un tel document ? J'espère qu'il aura intéressé le lecteur. Il existe de nombreuses manières de rédiger une thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, j'ai personnellement fait le choix de rédiger un document sur les résonances spin-orbite, car mon intérêt pour le sujet a coïncidé avec mon arrivée à Namur. Notamment je ne m'y étais absolument pas intéressé au moment où j'ai passé ma thèse de doctorat, en 2005. J'ai voulu y rassembler mes principaux résultats sur le sujet, quitte à parfois tomber dans l'écueil du catalogue. Mon idée première était d'écrire un *textbook* sur le sujet, tâche qui s'est avérée trop ambitieuse. . . pour l'instant. En tout cas, rédiger ce document m'a permis de prendre du recul sur mes travaux, qui devrait m'être profitable.

Ma thèse de doctorat a porté sur la dynamique orbitale des satellites naturels, sujet sur lequel je travaille en fait encore, notamment dans le cadre du groupe de travail Encelade. Je travaille également sur les observations de phénomènes mutuels, qui seront, je l'espère, nombreuses cette année à Lille.

Ces années de recherche se sont également accompagnées d'enseignement et d'encadrement. J'étais notamment en charge, pendant 5 ans à l'Université de Namur, du cours de mécanique céleste de Master 1. J'ai également co-encadré le stage de Master 1 de Nathalie B. à Lille, ainsi que les mémoires de Master de Marianne L. & Aurélie H à Namur. Mais ma plus grande expérience d'encadrement, et ma plus grande fierté pour l'instant, est la co-direction de la thèse de doctorat d'Émilie Verheylewgen, soutenue à Namur le 4 avril 2014, sur la dynamique des satellites d'Uranus. J'ai longtemps cru que le rapport entre enseignant et étudiant était à sens unique, je sais maintenant que c'est un échange, et toutes ces personnes m'ont beaucoup appris.



# Bibliographie

- Acton C.H., 1996, Ancillary data services of NASA's navigation and ancillary information facility, *Planetary and Space Science*, 44, 65-70
- Anderson J.D., Colombo G., Esposito P.B., Lau E.L. & Trager G.B., 1987, The mass, gravity field, and ephemeris of Mercury, *Icarus*, 71, 337-349
- Anderson J.D., Sjogren W.L. & Schubert G., 1996, Galileo gravity results and the internal structure of Io, *Science*, 272, 709-712
- Anderson J.D., Jacobson R.A., McElrath T.P., Moore W.B., Schubert G. & Thomas P.C., 2001, Shape, mean radius, gravity field, and interior structure of Callisto, *Icarus*, 153, 157-161
- Anderson J.D., Jacobson R.A., Lau E.L., Moore W.B. & Schubert G., 2001, Io's gravity field and interior structure, *Journal of Geophysical Research*, 106, 32963-32969
- Anderson B.J., Johnson C.L., Korth H., Purucker M.E., Winslow R.M., Slavin J.A., Solomon S.C., McNutt Jr. R.L., Raines J.M. & Zurbuchen T.H., 2011, The global magnetic field of Mercury from MESSENGER orbital observations, *Science*, 333, 1859-1862
- Anderson B.J., Johnson C.L., Korth H., Winslow R.M., Borovsky J.E., Purucker M.E., Slavin J.A., Solomon S.C., Zuber M.T. & McNutt Jr. R.L., 2012, Low-degree structure in Mercury's planetary magnetic field, *Journal of Geophysical Research*, 117, E00L12
- Andoyer H., 1926, *Mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris
- Andrade E.N. da C., 1910, On the viscous flow in metals, and allied phenomena, *Proceedings of the Royal Society of London A*, 84
- Archinal B.A., A'Hearn M.F., Bowell E., Conrad A., Consolmagno G.J., Courtin R., Fukushima T., Hestroffer D., Hilton J.L., Krasinsky G.A., Neumann G., Oberst J., Seidelmann P.K., Stooke P., Tholen D.J., Thomas P.C. & Williams I.P., 2011, Report of the IAU Working Group on cartographic coordinates and Rotational Elements : 2009, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 109, 101-135
- Arnold V.I., 1963, Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian, *Uspekhi Mat. Nauk*, 18, 13-40, en russe. Traduction anglaise : *Russian Mathematical Surveys*, 18, 9-36
- Ashby N., Bender P.L. & Wahr, J.M., 2007, Future gravitational physics tests from ranging to the Bepicolombo Mercury planetary orbiter, *Physical Review D*, 75, 022001

- Baland R.-M., Van Hoolst T., Yseboodt M. & Karatekin Ö., 2011, Titan's obliquity as evidence of a subsurface ocean ?, *Astronomy and Astrophysics*, 530, A141
- Balogh A., Grard R., Solomon S.C., Schulz R., Langevin Y., Kasaba Y. & Fujimoto M., 2007, Missions to Mercury, *Space Science Review*, 132, 611-645
- Baruteau C. & Rieutord M., 2013, Inertial waves in a differentially rotating spherical shell, *Journal of Fluid Mechanics*, 719, 47-81
- Bayly B.J., 1986, Three-dimensional instability of elliptical flow, *Physical Review Letters*, 57, 2160-2163
- Béghin C., Sotin C. & Hamelin M., 2010, Titan's native ocean revealed beneath some 45 km of ice by a Schumann-like resonance, *Comptes Rendus Geoscience*, 342, 425-433
- Béghin C., Randriamboarison O., Hamelin M., Karkoschka E., Sotin C., Whitten R.C., Berthelier J.-J., Grard R. & Simoes F., 2012, Analytic theory of Titan's Schumann resonance : Constraints on ionospheric conductivity and buried water ocean, *Icarus*, 218, 1028-1042
- Beletskii V.V., 1972, Resonance rotation of celestial bodies and Cassini's Laws, *Celestial Mechanics*, 6, 356-378
- Benkhoff J., van Casteren J., Hayakawa H., Fujimoto M., Laakso H., Novara M., Ferri P., Middleton H.R. & Ziethe R., 2010, BepiColombo - Comprehensive exploration of Mercury : Mission overview and science goals, *Planetary and Space Science*, 58, 2-20
- Benz W., Slattery W.L. & Cameron A.G.W., 1988, Collisional stripping of Mercury's mantle, *Icarus*, 74, 516-528
- Bertotti B., Iess L. & Tortora P., 2003, A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft, *Nature*, 425, 374-376
- Bills B.G. & Comstock R.L., 2005, Forced obliquity variations of Mercury, *Journal of Geophysical Research*, 110, E04006
- Bills B.G. & Nimmo F., 2008, Forced obliquity and moments of inertia of Titan, *Icarus*, 196, 293-297
- Black G.J., Nicholson P.D. & Thomas P.C., 1995, Hyperion : rotational dynamics, *Icarus*, 117, 149-161
- Blom J.G., de Bruin R., Grasman J. & Verwer J.G., 1981, Forced prey-predator oscillations, *Journal of Mathematical Biology*, 12, 141-152
- Bois E. & Rambaux N., 2007, On the oscillations in Mercury's obliquity, *Icarus*, 192, 308-317
- Boué G. & Laskar J., 2009, Spin axis evolution of two interacting bodies, *Icarus*, 201, 750-767
- Brasser R., Walsh K.J. & Nesvorný D., 2013, Constraining the primordial orbits of the terrestrial planets, *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433, 3417-3427
- Brouwer D. & Clemence G.M., 1960, *Methods of celestial mechanics*, Academic Press, New York

- Burns J.A., 1972, Dynamical characteristics of Phobos and Deimos, *Review of Geophysics and Space Physics*, 10, 463–483
- Burns J.A., Hamill P., Cuzzi J.N. & Durisen J.H., 1979, On the “thickness” of Saturn’s rings caused by satellite and solar perturbation and by planetary precession, *The Astronomical Journal*, 84, 1783-1801
- Cameron A.G.W., 1985, The partial volatilization of Mercury, *Icarus*, 64, 285-294
- Campbell J.K. & Synnott S.P., 1985, Gravity field of the Jovian system from Pioneer and Voyager tracking data, *The Astronomical Journal*, 90, 364-372
- Cao H., Aurnou J.M., Wicht J., Dietrich W., Soderlund K.M. & Russell C.T., 2014, A dynamo explanation for Mercury’s anomalous magnetic field, *Geophysical Research Letters*, 41, 4127-4134
- Carletti T., 2003, The Lagrange inversion formula on non-archimedean fields – Non-analytical form of differential and difference equations, *DCDS*, 9, 4, 835-858
- Cassini G.D., 1693, *Traité de l’origine et du progrès de l’astronomie*, Paris
- Cayley A., 1861, Tables of the developments of functions in the theory of elliptic motion, *Memories of the Royal Astronomical Society*, 29, 191-306
- Cebron D., Le Bars M., Moutou C. & Le Gal P., 2012, Elliptical instability in terrestrial planets and moons, *Astronomy and Astrophysics*, 539, A78
- Celletti A., 1990, Analysis of resonances in the spin-orbit problem in *Celestial Mechanics : Higher order resonances and some numerical experiments (Part II)*, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 41, 453-479
- Champenois S., 1998, *Dynamique de la résonance entre Mimas et Téthys, premier et troisième satellites de Saturne*, Ph.D. Thesis, Observatoire de Paris
- Chapman C.R., 1967, Optical evidence on the rotation of Mercury, *Earth and Planetary Science Letters*, 3, 381-385
- Charnoz S., Crida A., Castillo-Rogez J.C., Lainey V., Dones L., Karatekin Ö., Tobie G., Mathis S., Le Poncin-Lafitte C. & Salmon J., 2011, Accretion of Saturn’s mid-sized moons during the viscous spreading of young massive rings : Solving the paradox of silicate-poor rings versus silicate-rich moons, *Icarus*, 216, 535-550
- Chirikov B.V., 1979, A universal instability of many-dimensional oscillator systems, *Physics Reports*, 52, 263-379
- Choukroun M. & Sotin C., 2012, Is Titan’s shape caused by its meteorology and carbon cycle?, *Geophysical Research Letters*, 39, L04201
- Cicalò S. & Milani A., 2012, Determination of the rotation of Mercury from satellite gravimetry, *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427, 468-482

- Colombo G., 1966, Cassini's Second and Third Laws, *The Astronomical Journal*, 71, 891-896
- Comstock R.L. & Bills B.G., 2003, A solar system survey of forced librations in longitude, *Journal of Geophysical Research*, 108(E09), 5100
- Correia A.C.M. & Laskar J., 2004, Mercury's capture into the 3/2 spin-orbit resonance as a result of its chaotic dynamics, *Nature*, 429, 848-850
- Correia A.C.M. & Laskar J., 2009, Mercury's capture into the 3/2 spin-orbit resonance including the effect of core-mantle friction, *Icarus*, 201, 1-11
- Correia A.C.M. & Laskar J., 2010, Long-term evolution of the spin of Mercury I. Effect of the obliquity and core-mantle friction, *Icarus*, 205, 338-355
- Correia A.C.M. & Laskar J., 2012, Impact cratering on Mercury : Consequences for the spin evolution, *The Astrophysical Journal Letters*, 751 :L43
- Couetdic J., Laskar J., Correia A.C.M., Mayor M. & Udry S., 2010, Dynamical stability analysis of the HD202206 system and constraints to the planetary orbits, *Astronomy and Astrophysics*, 519, A10
- Counselman III C.C., Spin-orbit resonance of Mercury, thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology
- D'Hoedt S. & Lemaître A., 2004, The spin-orbit resonant rotation of Mercury : A two degree of freedom Hamiltonian model, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 89, 267-283
- D'Hoedt S., Lemaître A. & Rambaux N., 2006, Note on Mercury's rotation : the four equilibria of the Hamiltonian model, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 96, 253-258
- D'Hoedt S. & Lemaître A., 2008, Planetary long periodic terms in Mercury's rotation : a two dimensional adiabatic approach, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101, 127-139
- D'Hoedt S., Noyelles B., Dufey J. & Lemaître A., 2009, Determination of an instantaneous Laplace plane for Mercury's rotation, *Advances in Space Research*, 44, 597-603
- D'Hoedt S., Noyelles B., Dufey J. & Lemaître A., 2010, A secondary resonance in Mercury's rotation, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 107, 93-100
- De Haerdtl E., 1892, Sur une inégalité du quatrième ordre provenant de l'action mutuelle des deux derniers satellites de Jupiter, *Bulletin Astronomique*, 9, 212-216
- Delsate N., 2011, Analytical and numerical study of the ground-track resonances of Dawn orbiting Vesta, *Planetary and Space Science*, 59, 1372-1383
- Denevi B.W., Robinson M.S., Solomon S.C., Murchie S.L., Blewett D.T., Domingue D.L., McCoy T.J., Ernst C.M., Head J.W., Watters T.R. & Chabot N.L., 2009, The evolution of Mercury's crust : A global perspective from MESSENGER, *Science*, 324, 613-618
- Deprit A., 1969, Canonical transformations depending on a small parameter, *Celestial Mechanics*, 1, 12-30

- Dones L. & Tremaine S., 1993, On the origin of planetary spins, *Icarus*, 103, 67-92
- Dufey J., Lemaître A. & Rambaux N., 2008, Planetary perturbations on Mercury's libration in longitude, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101, 141-157
- Dufey J., Noyelles B., Rambaux N. & Lemaître A., 2009, Latitudinal librations of Mercury with a fluid core, *Icarus*, 203, 1-12
- Dumberry M., Rivoldini A., Van Hoolst T. & Yseboodt M., 2013, The role of Mercury's core density structure on its longitudinal librations, *Icarus*, 225, 62-74
- Duriez L. & Vienne A., 1997, Theory of motion and ephemerides of Hyperion, *Astronomy and Astrophysics*, 324, 366-380
- Eckhardt D.H., 1981, Theory of the libration of the Moon, *The Moon and the Planets*, 25, 3-49
- Edgeworth R., Dalton B.J. & Parnell T., 1984, The pitch drop experiment, *The European Journal of Physics*, 5, 198-200
- Efroimsky M., 2012a, Bodily tides near spin-orbit resonances, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 112, 283-330
- Efroimsky M., 2012b, Tidal dissipation compared to seismic dissipation : in small bodies, Earths, and Super-Earths, *The Astrophysical Journal*, 746 :150
- Einstein A., 1915, Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 831-839, en allemand
- Eluszkiewicz J., 1990, Compaction and internal structure of Mimas, *Icarus*, 84, 215-225
- Fahnestock E.G. & Scheeres D.J., 2008, Simulation and analysis of the dynamics of binary near-Earth Asteroid (66391) 1999 KW4, *Icarus*, 194, 410-435
- Farinella P., Milani A., Nobili A.M., Paolicchi P. & Zappalà, 1983, Hyperion : Collisional disruption of a resonant satellite, *Icarus*, 54, 353-360
- Fassett C.I., Head J.W., Baker D.M.H., Zuber M.T., Smith D.E., Neumann G.A., Solomon S.C., Klimczak C., Strom R.G., Chapman C.R., Prockter L.M., Phillips R.J., Oberst J. & Preusker F., 2012, Large impact basins on Mercury : Global distribution, characteristics, and modification history from MESSENGER orbital data, *Journal of Geophysical Research*, 117, E00L08
- Fegley Jr. B. & Cameron A.G.W., 1987, A vaporization model for iron/silicate fractionation in the Mercury protoplanet, *Earth and Planetary Science Letters*, 82, 207-222
- Feigenbaum M.J., 1979, The universal metric properties of nonlinear transformations, *Journal of Statistical Physics*, 21, 669-706
- Fienga A., Laskar J., Kuchynka P., Manche H., Desvignes G., Gastineau M., Cognard I. & Theureau G., 2011, The INPOP10a planetary ephemeris and its applications in fundamental physics, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111, 363-385

- Fortes A.D., Grindrod P.M., Trickett S.K. & Vocadlo L., 2007, Ammonium sulfate on Titan : Possible origin and role in cryovolcanism, *Icarus*, 188, 139-153
- Fortes A.D., 2012, Titan's internal structure and the evolutionary consequences, *Planetary and Space Science*, 60, 10-17
- Fowles G.R. & Cassiday G.L., 1999, *Analytical Mechanics : Sixth Edition*, Thomson Learning Inc., Wadsworth
- Galassi M., Davies J., Theiler J., Gough B., Jungman G., Alken P., Booth M. & Rossi F., 2009, *GNU Scientific Library Reference Manual - Third Edition (v1.12)*, Network Theory Ltd, Bristol
- Geissler P.E., Greenberg R., Hoppa G., Helfenstein P., McEwen A., Pappalardo R., Tufts R., Ockert-Bell M., Sullivan R., Greeley R., Belton M.J.S., Denk T., Clark B., Burns J., Veverka J. & the Galileo Imaging Team, 1998, Evidence for non-synchronous rotation of Europa, *Nature*, 391, 368-370
- Genova A., Iess L. & Marabucci M., 2013, Mercury's gravity field from the first six months of MESSENGER data, *Planetary and Space Science*, 81, 55-64
- Giampieri G., 2004, A note on the tidally induced potential of a satellite in eccentric orbit, *Icarus*, 167, 228-230
- Giese B., Hussmann H., Roatsch T., Helfenstein P., Thomas P.C. & Neukum G., 2011, Enceladus : Evidence for librations forced by Dione, EPSC Abstracts, EPSC-DPS2011-976
- Goldreich P.M. & Mitchell J.L., 2010, Elastic ice shells of synchronous moons : Implications for cracks on Europa and non-synchronous rotation of Titan, *Icarus*, 209, 631-638
- Goldreich P. & Peale S., 1966, Spin-orbit coupling in the solar system, *The Astronomical Journal*, 71, 425-438
- Goldreich P. & Peale S., 1967, Spin-orbit coupling in the Solar System – II. The resonant rotation of Venus, *The Astronomical Journal*, 72, 662-668
- Goldstein R.M., 1971, Radar observations of Mercury, *The Astronomical Journal*, 76, 1152-1153
- Grard R. & Balogh A., 2001, Returns to Mercury : science and mission objectives, *Planetary and Space Science*, 49, 1395-1407
- Grasset O. & Sotin C., 1996, The cooling rate of a liquid shell in Titan's interior, *Icarus*, 123, 101-112
- Grasset O., Sotin C. & Deschamps F., 2000, On the internal structure and dynamics of Titan, *Planetary and Space Science*, 48, 617-636
- Grasset O., Dougherty M.K., Coustenis A., Bunce E.J., Erd C., Titov D., Blanc M., Coates A., Drossart P., Fletcher L.N., Hussmann H., Jaumann R., Krupp N., Lebreton J.-P., Prieto-Ballesteros O., Tortora P., Tosi F. & Van Hoolst T., 2013, JUperiter ICy moons Explorer (JUICE) : An ESA mission to orbit Ganymede and to characterise the Jupiter system, *Planetary and Space Science*, 78, 1-21

- Greenspan H.P., 1968, *The theory of rotating fluids*, Cambridge University Press, Cambridge
- Hairer E., Nørsett S.P. & Wanner G., 1993, *Solving Ordinary Differential Equations I.*, Springer, Berlin
- Harbison R.A., Thomas P.C. & Nicholson P.C., 2011, Rotational modeling of Hyperion, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 110, 1-16
- Hemingway D., Nimmo F., Zebker H. & Iess L., 2013, A rigid and weathered ice shell on Titan, *Nature*, 500, 550-552
- Henrard J., 1974, Virtual singularities in the artificial satellite theory, *Celestial Mechanics*, 10, 437-449
- Henrard J. & Lemaître A., 1983, A second fundamental model for resonance, *Celestial Mechanics*, 30, 197-218
- Henrard J. & Schwanen G., 2004, Rotation of synchronous satellites : Application to the Galilean satellites, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 89, 181-200
- Henrard J., 2005, The rotation of Io, *Icarus*, 178, 144-153
- Henrard J., 2005b, The rotation of Europa, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 91, 131-149
- Henrard J., 2005c, Additions to the theory of the rotation of Europa, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 93, 101-112
- Henrard J., 2008, The rotation of Io with a liquid core, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101, 1-12
- Henrard J. & Lemaître A., 2005, The untangling transformation, *The Astronomical Journal*, 130, 2415-2417
- Henrard J. & Murigande C., 1987, Colombo's top, *Celestial Mechanics*, 40, 354-366
- Herreman W., Le Bars M. & Le Gal P., 2009, On the effects of an imposed magnetic field on the elliptical instability in rotating spheroids, *Physics of Fluids*, 21, 046602
- Hinderer J., Legros H. & Amalvict M., 1982, A search for Chandler and nearly diurnal free wobbles using Liouville equations, *Geophysical Journal of the Royal astronomical Society*, 71, 303-332
- Hou X.Y. & Liu L., 2010, On quasi-periodic motions around the triangular libration points of the real Earth-Moon system, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 108, 301-313
- Hou X.Y., Scheeres D.J. & Liu L., 2014, Dynamics of the Jupiter Trojans with Saturn's perturbation in the present configuration of the two planets, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 119, 119-142
- Hough S.S., 1895, The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 186, 469-506

- Howett C.J.A., Spencer J.R., Schenk P., Johnson R.E., Paranicas C., Hurford T.A., Verbiscer A. & Segura M., 2011, A high-amplitude thermal inertia anomaly of probable magnetospheric origin on Saturn's moon Mimas, *Icarus*, 216, 221-226
- Howett C.J.A., Spencer J.R., Hurford T., Verbiscer A. & Segura M., 2012, PacMan returns : An electron-generated thermal anomaly on Tethys, *Icarus*, 221, 1084-1088
- Hussmann H., Choblet G., Lainey V., Matson D.L., Sotin C., Tobie G. & Van Hoolst T., 2010, Implications of rotation, orbital states, energy sources, and heat transport for internal processes in icy satellites, *Space Science Review*, 153, 317-348
- Hussmann H., Spohn T. & Wiczerkowski K., 2002, Thermal equilibrium states of Europa's ice shell : Implications for internal ocean thickness and surface heat flow, *Icarus*, 156, 143-151
- Iess L. & Boscagli G., 2001, Advanced radio science instrumentation for the mission BepiColombo to Mercury, *Planetary and Space Science*, 49, 1597-1608
- Iess L., Rappaport N.J., Jacobson R.A., Racioppa P., Stevenson D.J., Tortora P., Armstrong J.W. & Asmar S.W., 2010, Gravity field, shape, and moment of inertia of Titan, *Science*, 327, 1367-1369
- Iess L., Jacobson R.A., Ducci M., Stevenson D.J., Lunine J.I., Armstrong J.W., Asmar S.W., Racioppa P., Rappaport N.J. & Tortora P., 2012, The tides of Titan, *Science*, 337, 457-459
- Jacobson R.A., Spitale J., Porco C.C. & Owen W.M., 2006, The GM values of Mimas and Tethys and the libration of Methone, *The Astronomical Journal*, 132, 711-713
- Jara-Oru  H.M. & Vermeersen B.L.A., 2011, Effects of low-viscous layers and a non-zero obliquity on surface stresses induced by diurnal tides and non-synchronous rotation : The case of Europa, *Icarus*, 215, 417-438
- Jara-Oru  H.M. & Vermeersen B.L.A., 2014, The forced libration of Europa's deformable shell and its dependence on interior parameters, *Icarus*, 229, 31-44
- Jeffreys H., 1952, *The Earth : Its origin, history and physical constitution*, Cambridge University Press, Cambridge
- Kaula W.M., 1964, Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution, *Reviews of Geophysics*, 2, 661-685
- Kaula W.M., 1966, *Theory of satellite geodesy*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, MA
- Kerswell R.R. & Malkus W.V.R., 1998, Tidal instability as the source for Io's magnetic signature, *Geophysical Research Letters*, 25, 603-606
- Klaasen K.P., 1975, Mercury rotation period determined from Mariner 10 photography, *Journal of Geophysical Research*, 80, 2415-2416
- Klavetter J.J., 1989, Rotation of Hyperion – I. Observations, *The Astronomical Journal*, 97, 570-579
- Kokubo E. & Ida S., 2007, Formation of terrestrial planets from protoplanets. II. Statistics of planetary spin, *The Astrophysical Journal*, 671, 2082-2090

- Koziel K., 1967, The constants of the Moon's physical libration derived on the basis of four series of heliometric observations from the years 1877 to 1915, *Icarus*, 7, 1-28
- Lainey V., Duriez L. & Vienne A., 2006, Synthetic representation of the Galilean satellites' orbital motions from L1 ephemerides, *Astronomy and Astrophysics*, 456, 783-788
- Lainey V., Arlot J.E., Karatekin Ö. & Van Hoolst T., 2009, Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations, *Nature*, 459, 957-959
- Lammer H., Bredehöft J.H., Coustenis A., Khodachenko M.L., Kaltenecker L., Grasset O., Prieur D., Raulin F., Ehrenfreund P., Yamauchi M., Wahlund J.-E., Grießmeier J.-M., Stangl G., Cockell C.S., Kulikov Yu. N., Grenfell J.L. & Rauer H., 2009, What makes a planet habitable?, *Astronomy and Astrophysics Review*, 17, 181-249
- Laplace P.S., 1785. *Théorie de Jupiter et de Saturne*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris
- Laskar J., 1988, Secular evolution of the solar system over 10 million years, *Astronomy and Astrophysics*, 198, 341-362
- Laskar J., 1989, A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System, *Nature*, 338, 237-238
- Laskar J., 1993, Frequency analysis of a dynamical system, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56, 191-196
- Laskar J., 2005, Frequency map analysis and quasiperiodic decomposition, in *Hamiltonian systems and fourier analysis : new prospects for gravitational dynamics*, Benest et al. editors, Cambridge Sci. Publ., 99-129
- Laskar J., 2008, Chaotic diffusion in the Solar System, *Icarus*, 196, 1-15
- Le Bars M., Lacaze L., Le Dizès S., Le Gal P. & Rieutord M., 2010, Tidal instability in stellar and planetary binary systems, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 178, 48-55
- Lieske J.H., 1973, On the 3-7 commensurability between Jupiter's outer two Galilean satellites, *Astronomy and Astrophysics*, 27, 59-65
- Locatelli U. & Giorgilli A., 2000, Invariant tori in the secular motions of the three-body planetary systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 78, 47-74
- Lowrie W., 2011, *A student's guide to geophysical equations*, Cambridge University Press, Cambridge, UK
- Lunine J.I. & Stevenson D.J., 1987, Clathrate and ammonia hydrates at high pressure : Application to the origin of methane on Titan, *Icarus*, 70, 61-77
- Ma C., Arias E.F., Eubanks T.M., Fey A.L., Gontier A.-M., Jacobs C.S., Sovers O.J., Archinal B.A. & Charlot P., 1998, The International Celestial Reference Frame as realized by Very Long Baseline Interferometry, *The Astronomical Journal*, 116, 516-546

- Maciejewski A.J., 1995, Reduction, relative equilibria and potential in the two rigid bodies problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 63, 1-28
- Mackenzie R.A., Iess L., Tortora P. & Rappaport N.J., 2008, A non-hydrostatic Rhea, *Geophysical Research Letters*, 35, L05204
- Makarov V.V., 2012, Conditions of passage and entrapment of terrestrial planets in spin-orbit resonances, *The Astrophysical Journal*, 752 :73
- Makarov V.V., 2013, Why is the Moon synchronously rotating ?, *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Letters*, 434, L21-L25
- Makarov V.V. & Efroimsky M., 2013, No pseudosynchronous rotation for terrestrial planets and moons, *The Astrophysical Journal*, 764 :27
- Margot J.-L., Peale S.J., Jurgens R.F., Slade M.A. & Holin I.V., 2007, Large longitude libration of Mercury reveals a molten core, *Science*, 316, 710-714
- Margot J.-L., 2009, A Mercury orientation model including non-zero obliquity and librations, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 105, 329-336
- Margot J.-L., Peale S.J., Solomon S.C., Hauck II S.A., Ghigo F.D., Jurgens R.F., Yseboodt M., Giorgini J.D., Padovan S. & Campbell D.B., 2012, Mercury's moment of inertia from spin and gravity data, *Journal of Geophysical Research*, 117, E00L09
- Matsuyama I. & Nimmo F., 2008, Tectonic patterns on reoriented and despun planetary bodies, *Icarus*, 195, 459-473
- Matsuyama I. & Nimmo F., 2009, Gravity and tectonic patterns of Mercury : Effect of tidal deformation, spin-orbit resonance, nonzero eccentricity, despinning, and reorientation, *Journal of Geophysical Research*, 114, E01010
- Maxwell J.C., 1867, On the dynamical theory of gases, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 157, 49-83
- McGovern W.E., Gross S.H. & Rasool S.I., 1965, Rotation period of the planet Mercury, *Nature*, 208, 375
- McKinnon W.B., 2013, The shape of Enceladus as explained by an irregular core : Implications for gravity, libration, and survival of its subsurface ocean, *Journal of Geophysical Research : Planets*, 118, 1775-1788
- McNutt Jr. R.L., Solomon S.C., Gold R.E., Leary J.C. & the MESSENGER Team, 2006, The MESSENGER mission to Mercury : Development history and early mission status, *Advances in Space Research*, 38, 564-571
- Melnikov A.V. & Shevchenko I.I., 1998, The stability of the rotational motion of nonspherical natural satellites, with respect to tilting the axis of rotation, *Astronomicheskii Vestnik*, 32, 548-559, en russe. Traduction anglaise : *Solar System Research*, 32, 480-490

- Meriggiola R. & Iess L., 2012, A new rotational model of Titan from Cassini SAR data, EPSC Abstracts, EPSC2012-593
- Migus A., 1980, Analytical lunar libration tables, *The Moon and the Planets*, 23, 391-427
- Milani A., Rossi A., Vokrouhlický D., Villani D. & Bonanno C., 2001, Gravity field and rotation state of Mercury from the BepiColombo Radio Science Experiments, *Planetary and Space Science*, 29, 1579-1596
- Milani A., Vokrouhlický D., Villani D., Bonanno C. & Rossi A., 2002, Testing general relativity with the BepiColombo radio science experiment, *Physical Review D*, 66, 082001
- Mitri G., Meriggiola R., Hayes A., Lefevre A., Tobie G., Genova A., Lunine J.I. & Zebker H., 2014, Shape, topography, gravity anomalies and tidal deformation of Titan, *Icarus*, 236, 169-177
- Moons M., 1982a, Physical libration of the Moon, *Celestial Mechanics*, 26, 131-142
- Moons M., 1982b, Analytical theory of the libration of the Moon, *The Moon and the Planets*, 27, 257-284
- Moser J., 1962, On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 2, 1-20
- Moser J.K., 1968, Lectures on Hamiltonian systems, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 81, 1-60
- Murray C.D. & Dermott S.F., 1999, *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge
- Nekhoroshev N.N., 1977, Exponential estimates of the stability time of near-integrable Hamiltonian, *Russian Mathematical Surveys*, 32, 1-65
- Nekhoroshev N.N., 1979, Exponential estimates of the stability time of near-integrable Hamiltonian II, *Trudy Sem. Petrovs.*, 5, 5-50
- Ness N.F., Behannon K.W., Lepping R.P., Whang Y.C. & Schatten K.H., 1974, Magnetic field observations near Mercury : Preliminary results from Mariner 10, *Science*, 185, 151-160
- Ness N.F., Behannon K.W., Lepping R.P. & Whang Y.C., 1975, The magnetic field of Mercury, 1, *Journal of Geophysical Research*, 80, 2708-2716
- Ness N.F., Behannon K.W., Lepping R.P. & Whang Y.C., 1976, Observations of Mercury's magnetic field, *Icarus*, 28, 479-488
- Nimmo F. & Bills B.G., 2010, Shell thickness variations and the long-wavelength topography of Titan, *Icarus*, 208, 896-904
- Noir J., Hemmerlin F., Wicht J., Baca S.M. & Aurnou J.M., 2009, An experimental and numerical study of librationally driven flow in planetary cores and subsurface oceans, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 173, 141-152

- Novotný P. & Söhnle O., 1988, Densities of binary aqueous solutions of 306 inorganic substances, *Journal of Chemical and Engineering Data*, 33, 49-55
- Noyelles B., 2005, Effets des marées sur la dynamique des satellites de Jupiter et de Saturne, thèse de doctorat, Observatoire de Paris
- Noyelles B. & Vienne A., 2007, Chaos induced by De Haerdtl inequality in the Galilean system, *Icarus*, 190, 594-607
- Noyelles B., Lemaître A. & Vienne A., 2008, Titan's rotation : A 3-dimensional theory, *Astronomy and Astrophysics*, 478, 959-970
- Noyelles B., 2008, Titan's rotational state : The effects of a forced "free" resonant wobble, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101, 13-30
- Noyelles B., 2009, Expression of Cassini's third law for Callisto, and theory of its rotation, *Icarus*, 202, 225-239
- Noyelles B., 2010, Theory of the rotation of Janus and Epimetheus, *Icarus*, 207, 887-902
- Noyelles B., Dufey J. & Lemaître A., 2010, Core-mantle interactions for Mercury, *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 407, 479-496
- Noyelles B., Karatekin Ö. & Rambaux N., 2011, The rotation of Mimas, *Astronomy and Astrophysics*, 536, A61
- Noyelles B. & D'Hoedt S., 2012, Modeling the obliquity of Mercury, *Planetary and Space Science*, 60, 274-286
- Noyelles B., 2012, Behavior of nearby synchronous rotations of a Poincaré-Hough satellite at low eccentricity, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 112, 353-383
- Noyelles B. & Lhotka C., 2013, The influence of orbital dynamics, shape and tides on the obliquity of Mercury, *Advances in Space Research*, 52, 2085-2101
- Noyelles B., 2013, The rotation of Io predicted by the Poincaré-Hough model, *Icarus*, 223, 621-624
- Noyelles B. & Nimmo F., 2014, New insights on Titan's interior from its obliquity, soumis, arXiv :1403.2276
- Noyelles B., Frouard J., Makarov V.V. & Efroimsky M., 2014, Spin-orbit evolution of Mercury revisited, *Icarus*, 241, 26-44
- Noyelles B., Delsate N. & Carletti T., 20xx, Equilibrium search algorithm of a perturbed quasi-integrable system, soumis, arXiv :1101.2138
- Padovan S., Margot J.-L., Hauck II S.A., Moore W.B. & Solomon S.C., 2014, The tides of Mercury and possible implications for its interior structure, *Journal of Geophysical Research : Planets*, 119, 850-866
- Peale S.J., 1969, Generalized Cassini's laws, *The Astronomical Journal*, 74, 483-489

- Peale S.J., 1972, Determination of parameters related to the interior of Mercury, *Icarus*, 17, 168-173
- Peale S.J., 1976, Does Mercury have a molten core ?, *Nature*, 262, 765-766
- Peale S.J. & Boss A.P., 1977, A spin-orbit constraint on the viscosity of a Mercurian liquid core, *Journal of Geophysical Research*, 82, 743-749
- Peale S.J. & Boss A.P., 1977a, Mercury's core : The effect of obliquity on the spin-orbit constraints, *Journal of Geophysical Research*, 82, 3423-3429
- Peale S.J. & Cassen P., 1978, Contribution of tidal dissipation to Lunar thermal history, *Icarus*, 36, 245-269
- Peale S.J., Cassen P. & Reynolds R.T., 1979, Melting of Io by tidal dissipation, *Science*, 203, 892-894
- Peale S.J., 1999, Origin and evolution of the natural satellites, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 37, 533-602
- Peale S.J., Phillips R.J., Solomon S.C., Smith D.E. & Zuber M.T., 2002, A procedure for determining the nature of Mercury's core, *Meteoritics and Planetary Science*, 37, 1269-1283
- Peale S.J., 2005, The free precession and libration of Mercury, *Icarus*, 178, 4-18
- Peale S.J., 2006, The proximity of Mercury's spin to Cassini state 1 from adiabatic invariance, *Icarus*, 181, 338-347
- Peale S.J., Yseboodt M. & Margot J.-L., 2007, Long-period forcing of Mercury's libration in longitude, *Icarus*, 187, 365-373
- Peale S.J., Margot J.L. & Yseboodt M., 2009, Resonant forcing of Mercury's libration in longitude, *Icarus*, 199, 1-8
- Peale S.J., Margot J.-L., Hauck S.A. II & Solomon S.C., 2014, Effect of core-mantle and tidal torques on Mercury's spin axis orientation, *Icarus*, 231, 206-220
- Peplowski P.N., Evans L.G., Hauck II S.A., McCoy T.J., Boynton W.V., Gillis-Davis J.J., Ebel D.S., Goldsten J.O., Hamara D.K., Lawrence D.J., McNutt Jr. R.L., Nittler L.R., Solomon S.C., Rhodes E.A., Sprague A.L., Starr R.D. & Stockstill-Cahill K.R., 2011, Radioactive elements on Mercury's surface from MESSENGER : Implications for the planet's formation and evolution, *Science*, 333, 1850-1852
- Pettengill G.H. & Dyce R.B., 1965, A radar determination of the rotation of the planet Mercury, *Nature*, 206, 1240
- Pfyffer G., Van Hoolst T. & Dehant V., 2011, Librations and obliquity of Mercury from the Bepi-Colombo radio-science and camera experiments, *Planetary and Space Science*, 59, 848-861
- Pierrehumbert R.T., 1986, Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid, *Physical Review Letters*, 57, 2157-2159
- Poincaré H., 1910, Sur la précession des corps déformables, *Bulletin Astronomique*, 27, 321-357

- Rambaux N. & Bois E., 2004, Theory of the Mercury's spin-orbit motion and analysis of its main librations, *Astronomy and Astrophysics*, 413, 381-393
- Rambaux N., Lemaître A. & D'Hoedt S., 2007, Coupled rotational motion of Mercury, *Astronomy and Astrophysics*, 470, 741-747
- Rambaux N., Van Hoolst T., Dehant V. & Bois E., 2007b, Inertial core-mantle coupling and libration of Mercury, *Astronomy and Astrophysics*, 468, 711-719
- Rambaux N., Van Hoolst T. & Karatekin Ö., 2011, Librational response of Europa, Ganymede, and Callisto with an ocean for a non-Keplerian orbit, *Astronomy and Astrophysics*, 527, A118
- Rambaux N. & Williams J.G., 2011, The Moon's physical librations and determination of their free modes, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 109, 85-100
- Rappaport N., Bertotti B., Giampieri G. & Anderson J.D., 1997, Doppler measurements of the quadrupole moments of Titan, *Icarus*, 126, 313-323
- Rathbun J.A., Spencer J.R., Tamppari L.K., Martin T.Z., Barnard L. & Travis L.D., 2004, Mapping of Io's thermal radiation by the Galileo photopolarimeter-radiometer (PPR) instrument, *Icarus*, 169, 127-139
- Richard A., Rambaux N. & Charnay B., 2014, Librational response of a deformed 3-layer Titan perturbed by non-keplerian orbit and atmospheric couplings, *Planetary and Space Science*, 93-94, 22-34
- Rivoldini A., Van Hoolst T. & Verhoeven O., 2009, The interior structure of Mercury and its core sulfur content, *Icarus*, 201, 12-30
- Roberts J.H. & Nimmo F., 2008, Tidal heating and the long-term stability of a subsurface ocean on Enceladus, *Icarus*, 194, 675-689
- Robutel P., Rambaux N. & Castillo-Rogez J., 2011, Analytical description of physical librations of saturnian coorbital satellites Janus and Epimetheus, *Icarus*, 211, 758-769
- Rodionov S.A., Athanassoula E., Sotnikova N.Ya., 2009, An iterative method for constructing equilibrium phase models of stellar systems, *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 392, 904-916
- Rodionov S.A. & Athanassoula E., 2011, Extensions and applications of the iterative method, *Astronomy and Astrophysics*, 529, A98
- Rodionov S.A. & Orlov V.V., 2008, Phase models of the Milky Way stellar disc, *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 385, 200-214
- Rodionov S.A., Sotnikova N.Ya., 2006, An iterative method for the construction of equilibrium N-body models for stellar disks, *Astronomy Reports*, 50, 983-1000
- Ross M.N. & Schubert G., 1987, Tidal heating in an internal ocean model of Europa, *Nature*, 325, 133-134

- Rutter M.D., Secco R.A., Uchida T., Hongjian L., Wang Y., Rivers M.L. & Sutton S.R., 2002, Towards evaluating the viscosity of the Earth's outer core : An experimental high pressure study of liquid Fe-S (8.5 wt.% S), *Geophysical Research Letters*, 29, 1217, 58
- Saillenfest M., Représentation synthétique du mouvement des satellites de Saturne, rapport de stage de M2, Observatoire de Paris
- Shapiro I.I., 1967, Theory of the radar determination of planetary rotations, *The Astronomical Journal*, 72, 1309-1323
- Sicardy B., 2010, Stability of the triangular Lagrange points beyond Gascheau's value, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 107, 145-155
- Sidlichovsky M. & Nesvorný D., 1997, Frequency modified Fourier Transform and its application to asteroids, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 65, 137-148
- Simões F., Grard R., Hamelin M., López-Moreno J.J., Schwingenschuh K., Béghin C., Berthelier J.-J., Besser B., Brown V.J.G., Chabassière M., Falkner P., Ferri F., Fulchignoni M., Hofe R., Jernej I., Jeronimo J.M., Molina-Cuberos G.J., Rodrigo R., Svedhem H., Tokano T. & Trautner R., 2007, A new numerical model for the simulation of ELF wave propagation and the computation of eigenmodes in the atmosphere of Titan : Did Huygens observe any Schumann resonance ?, *Planetary and Space Science*, 55, 1978-1989
- Smith B.A. & Reese E.J., 1968, Mercury's rotation period : Photographic confirmation, *Science*, 162, 1275-1277
- Smith B.A., Soderblom L., Batson R.M., Bridges P.M., Inge J.L., Masursky H., Shoemaker E., Beebe R.F., Boyce J., Briggs G., Bunker A., Collins S.A., Hansen C., Johnson T.V., Mitchell J.L., Terrile R.J., Cook A.F., Cuzzi J.N., Pollack J.B., Danielson G.E., Ingersoll A.P., Davies M.E., Hunt G.E., Morrison D., Owen T., Sagan C., Veverka J., Strom R. & Suomi V.E., 1982, A new look at the Saturn system – The Voyager 2 images, *Science*, 215, 504-537
- Smith D.E., Zuber M.T., Phillips R.J., Solomon S.C., Neumann G.A., Lemoine F.G., Peale S.J., Margot J.-L., Torrence M.H., Talpe M.J., Head III J.W., Hauck II S.A., Johnson C.L., Perry M.E., Barnouin O.S., McNutt Jr. R.L. & Oberst J., 2010, The equatorial shape and gravity field of Mercury from MESSENGER flybys 1 and 2, *Icarus*, 209, 88-100
- Smith D.E., Zuber M.T., Phillips R.J., Solomon S.C., Hauck II S.A., Lemoine F.G., Mazarico E., Neumann G.A., Peale S.J., Margot J.-L., Johnson C.L., Torrence M.H., Perry M.E., Rowlands D.D., Goossens S., Head J.W. & Taylor A.H., 2012, Gravity field and internal structure of Mercury from MESSENGER, *Science*, 336, 214-217
- Sohl F., Hussmann H., Schwentker B., Spohn T. & Lorenz R.D., 2003, Interior structure models and tidal Love numbers of Titan, *Journal of Geophysical Research*, 108, E12, 5130
- Solomon S.C., McNutt Jr. R.L., Gold R.E., Acuna M.H., Baker D.N., Boynton W.V., Chapman C.R., Cheng A.F., Gloeckler G., Head III J.W., Krimigis S.M., McClintock W.E., Murchie S.L., Peale S.J., Phillips R.J., Robinson M.S., Slavin J.A., Smith D.E., Strom R.G., Trombka J.I. & Zuber M.T., 2001, The MESSENGER mission to Mercury : scientific objectives and implementation, *Planetary and Space Science*, 49, 1445-1465

- Solomon S.C., 2003, Mercury : the enigmatic innermost planet, *Earth and Planetary Science Letters*, 216, 441-455
- Sonneveld P., 1969, Errors in cubic spline interpolation, *Journal of Engineering Mathematics*, 3, 107-117
- Sotin C., Mitri G., Rappaport N., Schubert G. & Stevenson D., 2010, Chapter 4 : Titan's interior structure, in : *Titan from Cassini-Huygens*, Brown R.H., Lebreton J.-P. and Waite J.H. eds, Springer
- Spohn T., Sohl F., Wiczerkowski K. & Conzelmann V., 2001, The interior structure of Mercury : what we know, what we expect from BepiColombo, *Planetary and Space Science*, 49, 1561-1570
- Standish E.M., 1998, JPL planetary and lunar ephemeris DE405 / LE405, JPL Interoffice Memorandum IOM 312 D-98-048
- Stiles B.W., Kirk R.L., Lorenz R.D., Hensley S., Lee E., Ostro S.J., Allison M.D., Callahan P.S., Gim Y., Iess L., Persi Del Marmo P., Hamilton G., Johnson W.T.K. & West R.D., 2008, Determining Titan's spin state from CASSINI RADAR images, *The Astronomical Journal*, 135, 1669-1680
- Stiles B.W., Kirk R.L., Lorenz R.D., Hensley S., Lee E., Ostro S.J., Allison M.D., Callahan P.S., Gim Y., Iess L., Persi Del Marmo P., Hamilton G., Johnson W.T.K. & West R.D., 2010, Erratum : Determining Titan's spin state from CASSINI RADAR images, *The Astronomical Journal*, 139 :3111
- Strom R.G., 1979, Mercury : A post-Mariner 10 assessment, *Space Science Review*, 24, 3-70
- Strom R.G., Chapman C.R., Merline W.J., Solomon S.C. & Head III J.W., 2008, Mercury cratering record viewed from MESSENGER's first flyby, *Science*, 321, 79-81
- Strom R.G., Banks M.E., Chapman C.R., Fassett C.I., Forde J.A., Head III J.W., Merline W.J., Prockter L.M. & Solomon S.C., 2011, Mercury crater statistics from MESSENGER flybys : Implications for stratigraphy and resurfacing history, *Planetary and Space Science*, 59, 1960-1967
- Szeto A.M.K. & Xu S., 1997, Gravitational coupling in a triaxial ellipsoidal Earth, *Journal of Geophysical Research*, 102, 27651-27657
- Tajeddine R., Rambaux N., Lainey V., Charnoz S., Richard A., Rivoldini A. & Noyelles B., 2014, Constraints on Mimas' interior from Cassini ISS libration measurements, *Science*, 346, 322-324
- Thomas P., Veverka J., Wenkert D., Danielson G.E. & Davies M.E., 1984, Hyperion : 13-day rotation from Voyager data, *Nature*, 307, 716-717
- Thomas P. & Veverka J., 1985, Hyperion : Analysis of Voyager observations, *Icarus*, 64, 414-424
- Thomas P.C., Armstrong J.W., Asmar S.W., Burns J.A., Denk T., Giese B., Helfenstein P., Iess L., Johnson T.V., McEwen A., Nicolaisen L., Porco C., Rappaport N., Richardson J., Somenzi L., Tortora P., Turtle E.P. & Veverka J., 2007a, Hyperion's sponge-like appearance, *Nature*, 448, 50-53

- Thomas P.C., Burns J.A., Helfenstein P., Squyres S., Veverka J., Porco C., Turtle E.P., McEwen A., Denk T., Giese B., Roatsch T., Johnson T.V. & Jacobson R.A., 2007b, Shapes of the saturnian icy satellites and their significance, *Icarus*, 190, 573-584
- Thomas P.C., 2010, Sizes, shapes, and derived properties of the saturnian satellites after the Cassini nominal mission, *Icarus*, 208, 395-401
- Tiscareno M.S., Thomas P.C. & Burns J.A., 2009, The rotation of Janus and Epimetheus, *Icarus*, 204, 254-261
- Tobie G., Grasset O., Lunine J.I., Mocquet A. & Sotin C., 2005, Titan's internal structure inferred from a coupled thermal-orbital model, *Icarus*, 175, 496-502
- Touma J. & Wisdom J., 2001, Nonlinear core-mantle coupling, *The Astronomical Journal*, 122, 1030-1050
- Tricarico P., 2014, Multi-layer hydrostatic equilibrium of planets and synchronous moons : Theory and application to Ceres and to Solar system moons, *The Astrophysical Journal*, 782 :99
- Turcotte D.L. & Schubert G., 2002, *Geodynamics*, 2nd edition, Cambridge University Press
- Tyler R., 2011, Tidal dynamical considerations constrain the state of an ocean on Enceladus, *Icarus*, 211, 770-779
- Usselman T.M., 1975, Experimental approach to the state of the core ; Part I, The liquidus relation of the Fe-rich portion of the Fe-Ni-S system from 30 to 100 kb, *American Journal of Science*, 275, 278-290
- Van Hoolst T., Sohl F., Holin I., Verhoeven O., Dehant V. & Spohn T., 2007, Mercury's interior structure, rotation, and tides, *Space Science Review*, 132, 203-227
- Van Hoolst T., Rambaux N., Karatekin Ö., Dehant V. & Rivoldini A., 2008, The librations, shape, and icy shell of Europa, *Icarus*, 195, 386-399
- Van Hoolst T., Rivoldini A., Baland R.-M. & Yseboodt M., 2012, The effect of tides and an inner core on the forced longitudinal libration of Mercury, *Earth and Planetary Science Letters*, 333-334, 83-90
- Van Hoolst T., Baland R.-M. & Trinh A., 2013, On the librations and tides of large icy satellites, *Icarus*, 226, 299-315
- Vantighem S., 2014, Inertial modes in a rotating triaxial ellipsoid, *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, physical & engineering sciences*, 470, 20140093
- Veasey M. & Dumberry M., 2011, The influence of Mercury's inner core on its physical librations, *Icarus*, 214, 265-274
- Vienne A. & Duriez L., 1995, TASS1.6 : Ephemerides of the major Saturnian satellites, *Astronomy and Astrophysics*, 297, 588-605
- Ward W.R. & Hamilton D.P., 2004, Tilting Saturn. I. Analytical model, *The Astronomical Journal*, 128, 2501-2509

- Weidenschilling S.J., 1978, Iron/silicate fractionation and the origin of Mercury, *Icarus*, 35, 99-111
- Widorn T., 1950, Der Lichtwechsel des Saturnsatelliten Japetus im Jahre 1949, *Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Abt IIa*, 159, 189-199, en allemand
- Wieczorek M.A., Correia A.C.M., Le Feuvre M., Laskar J. & Rambaux N., 2012, Mercury's spin-orbit resonance explained by initial retrograde and subsequent synchronous rotation, *Nature Geoscience*, 5, 18-21
- Williams J.G., Slade M.A., Eckhardt D.H. & Kaula W.M., 1973, Lunar physical librations and laser ranging, *Moon*, 8, 469-484
- Williams J.G., Boggs D.H., Yoder C.F., Ratcliff J.T. & Dickey J.O., 2001, Lunar rotational dissipation in solid body and molten core, *Journal of Geophysical Research*, 106, 27933-27968
- Williams J.G., Turyshev S.G. & Boggs D.H., 2009, Lunar laser ranging tests of the equivalence principle with the Earth and Moon, *International Journal of Modern Physics D*, 18, 1129-1175
- Wisdom J., Peale S.J. & Mignard F., 1984, The chaotic rotation of Hyperion, *Icarus*, 58, 137-152
- Wisdom J., 2004, Spin-orbit secondary resonance dynamics of Enceladus, *The Astronomical Journal*, 128, 484-491
- Wurm G., Trieloff M. & Rauer H., 2013, Photophoretic separation of metals and silicates : the formation of Mercury-like planets and metals depletion in chondrites, *The Astrophysical Journal*, 769 :78
- Yasui M. & Arakawa M., 2008, Experimental study on the rate dependent strength of ice-silica mixture with silica volume fractions up to 0.63, *Geophysical Research Letters*, 35, L12206
- Yasui M. & Arakawa M., 2009, Compaction experiments on ice-silica particle mixtures : Implication for residual porosity of small icy bodies, *Journal of Geophysical Research*, 114, E09004
- Yergovich T.W., Swift G.W. & Kurata F., 1971, Density and viscosity of aqueous solutions of methanol and acetone from the freezing point to 10°C, *Journal of Chemical and Engineering Data*, 16, 222-226
- Yseboodt M. & Margot J.-L., 2006, Evolution of Mercury's obliquity, *Icarus*, 181, 327-337
- Yseboodt M., Margot J.-L. & Peale S.J., 2010, Analytical model of the long-period forced longitude librations of Mercury, *Icarus*, 207, 536-544
- Yseboodt M., Rivoldini A., Van Hoolst T. & Dumberry M., 2013, Influence of an inner core on the long-period forced librations of Mercury, *Icarus*, 226, 41-51
- Zebker H.A., Stiles B., Hensley S., Lorenz R., Kirk R.L. & Lunine J., 2009, Size and shape of Saturn's moon Titan, *Science*, 324, 921-923